

C. SUTTI - A. ROVERSI (*)

L'«interpolazione più regolare» mediante il calcolo variazionale. (**)

ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1.1. - Introduzione.

La teoria più avanzata dell'interpolazione dedica ampio spazio all'uso delle funzioni di tipo spline [1]. Questo tipo di funzioni infatti, permette di affrontare e risolvere anche problemi in cui l'approssimazione polinomiale classica [2] mostra i propri limiti, ad esempio quando la funzione da approssimare è assegnata sotto forma di tabella molto fitta o presenta un andamento irregolare. In tali casi si constata che le funzioni di tipo spline, essendo di tipo polinomiale a tratti, offrono un grado di adattabilità e maneggevolezza superiori ai polinomi ordinari.

Il problema dell'interpolazione nel caso di nodi fissati è completamente risolto: precisamente è noto che, per ogni intero $K < n$, la funzione «interpolante più regolare» di n punti assegnati è la spline naturale di grado $(2K - 1)$ avente tali punti come nodi [3].

Nel presente lavoro viene affrontato il problema dell'«interpolazione più regolare» con il calcolo variazionale, e viene dimostrato, in tale approccio, il risultato sopra citato. L'asserto viene provato ponendosi nella classe delle funzioni con derivata di ordine K continua quasi ovunque nell'intervallo contenente i punti dati e individuando univocamente in tale classe la funzione «interpolante più regolare».

(*) Indirizzo A.: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) La dott. C. SUTTI ha eseguito il lavoro nell'ambito dei Gruppi di ricerca matematica del C.N.R. - Ricevuto: 4-V-1973.

1.2. - Richiami della teoria delle funzioni di tipo spline.

1.2.1. - Definizione di funzione di tipo spline.

Dato un insieme strettamente crescente di numeri reali

$$x_0 < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1},$$

una funzione di tipo spline $S(x)$ di grado m avente gli n nodi x_1, x_2, \dots, x_n è una funzione definita nell'intervallo (x_0, x_{n+1}) e avente le due proprietà seguenti:

- P₁) In ogni intervallo (x_i, x_{i+1}) , $i = 0, 1, \dots, n$ (dove eventualmente $x_0 = -\infty$, $x_{n+1} = +\infty$), $S(x)$ è un polinomio di grado m o minore.
 P₂) $S(x)$ è continua ovunque con le sue derivate fino all'ordine $(m-1)$.

1.2.2. - Definizione di funzione di tipo spline naturale.

Una funzione spline $S(x)$ di grado dispari $(2K-1)$ con i nodi x_1, x_2, \dots, x_n , è detta spline naturale se gode della ulteriore caratteristica di essere in ognuno dei due intervalli $(-\infty, x_1)$ e $(x_n, +\infty)$ un polinomio di grado $(K-1)$ o minore; in generale questi due polinomi possono essere diversi.

1.2.3. - Definizione della funzione « interpolante più regolare ».

Sia G la classe delle funzioni interpolanti n nodi assegnati e ordinati da x_1 a x_n , la funzione $g \in G$ che rende minimo il funzionale

$$1.2.4. \quad \sigma(g) = \int_{x_1}^{x_n} (g^{(K)}(x))^2 dx \quad \text{per } K > 1$$

viene detta « interpolante più regolare » [1] degli n punti dati $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$.

Per quanto riguarda il problema dell'« interpolazione più regolare » sono noti i seguenti risultati:

Per $K=2$ HOLLADAY ha dimostrato [4] il teorema qui enunciato:

1.2.5. - Teorema. Dati $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, per ogni $i = 1, 2, \dots, n-1$, sia $g(x)$ una cubica sull'intervallo $[x_i, x_{i+1}]$. Sia inoltre

$$\frac{d^2g(x_1)}{dx^2} = \frac{d^2g(x_n)}{dx^2} = 0.$$

Per ogni $i = 2, 3, \dots, n-1$, sia

$$g(x_i)_+ = g(x_i)_-, \quad g'(x_i)_+ = g'(x_i)_- \quad \text{e} \quad g''(x_i)_+ = g''(x_i)_- .$$

Sia $f(x)$ una qualunque funzione definita su $[x_1, x_n]$ tale che $f(x_i) = g(x_i)$ per $i = 1, 2, \dots, n$. Allora

$$\int_{x_1}^{x_n} (f''(x))^2 dx > \int_{x_1}^{x_n} (g''(x))^2 dx \quad \text{per ogni } f \neq g .$$

Per $K > 2$ è stato dimostrato il seguente teorema ([5], [6]):

1.2.6. - Teorema. Sia $f(x)$ una funzione continua in $[x_1, x_n]$ insieme con le sue derivate di ordine $1, 2, \dots, K-1$, ($K < n$), con $f^{(K)}$ continua a tratti e valgono le condizioni

$$1.2.7. \quad f(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

dove $x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Se $S(x)$ è l'unica spline naturale di grado $(2K-1)$ con i nodi x_i , soddisfacente a

$$S(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

allora

$$\int_{x_1}^{x_n} (S^{(K)}(x))^2 dx \leq \int_{x_1}^{x_n} (f^{(K)}(x))^2 dx$$

valendo il segno di uguaglianza solo se $f(x) \equiv S(x)$.

1.3. - Il problema dell'« interpolazione più regolare » con il calcolo variazionale: caso $K = 2$.

Siano dati n punti e sia fissato un intero $K < n$, vogliamo dimostrare che l'« interpolante più regolare » è la funzione spline naturale di grado $(2K-1)$ avente gli n punti dati come nodi.

A tale scopo ponendosi nella classe delle funzioni C^{K-1} dimostreremo che alla sottoclasse costituita dalle splines sopradette appartiene l'« interpolante più regolare » cercata. Ne risulterà pertanto dimostrata l'esistenza. Per quanto riguarda l'unicità osserviamo subito che essa è garantita dal teorema seguente [3]:

1.3.1. - Teorema. Dato l'insieme dei punti

$$1.3.2. \quad (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$$

con $x_1 < x_2 < \dots < x_n$, esiste per $K < n$ un'unica spline naturale $S(x)$ di grado $(2K-1)$ avente i nodi in x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) e soddisfacente alle condizioni di interpolazione

$$1.3.3. \quad S(x_i) = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

Tratteremo in questo paragrafo il caso $K = 2$ e nel successivo il caso $K = 3$ e K qualunque, mediante una semplice estensione della stessa procedura dimostrativa.

Dalla definizione 1.2.3. si ha che la funzione g «interpolante più regolare» degli n nodi ordinati da x_1 a x_n , è tale che l'integrale

$$1.3.4. \quad \sigma(g) = \int_{x_1}^{x_n} (g''(x))^2 dx$$

è minimo per $g \in G$, ove $G = \{g \in C^2[x_1, x_n] \text{ q. o.}\}$. D'altra parte osserviamo che $\sigma(g)$ si può esprimere opportunamente come somma di $(n-1)$ addendi, e tali addendi sono tutti positivi, per cui la somma è minima quando essi sono minimi, ovvero si ha

$$1.3.5. \quad \min_{g \in G} \sigma(g) = \min_{g \in G} \left\{ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g''(x))^2 dx \right\} = \sum_{i=1}^{n-1} \min_{g \in G} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g''(x))^2 dx.$$

La determinazione di g si pone quindi come un tipico problema del calcolo delle variazioni. Precisamente, in termini variazionali, si tratta di individuare la funzione y che minimizza il funzionale:

$$1.3.6. \quad U = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, y, y', y'') dx$$

per $y \in C^2(x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, n-1$.

La y che minimizza U deve essere tale che valga

$$1.3.7. \quad \delta U = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2 F_{y''}}{dx^2} \right) \delta y \right] dx + \left[\left(F_{y'} - \frac{dF_{y''}}{dx} \right) \delta y + F_{y''} \delta y' \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \right\} = 0,$$

dove δy rappresenta la variazione attribuita ad y [7].

Perchè la condizione 1.3.7. sia verificata, per l'arbitrarietà di δy , si ha che y in ogni intervallo (x_i, x_{i+1}) deve soddisfare alla seguente equazione di EULERO:

$$1.3.8. \quad F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2F_{y''}}{dx^2} = 0.$$

Inoltre scegliendo opportunamente δy nulla nei punti x_1, \dots, x_n , affinché la somma totale espressa nella 1.3.7. sia nulla, segue che devono verificarsi le condizioni suddette:

$$1.3.9. \quad F_{y''}(x_i)_+ = F_{y''}(x_i)_- \quad i = 2, \dots, n-1$$

e

$$1.3.10. \quad F_{y''}(x_1) = F_{y''}(x_n) = 0.$$

Nel caso in esame $F = (g''(x))^2$, da cui la equazione 1.3.8. assume la forma:

$$1.3.11. \quad g^{IV}(x) = 0 \quad \text{per } x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Mentre le condizioni 1.3.9. diventano

$$1.3.12. \quad g''(x_i)_- = g''(x_i)_+ \quad i = 2, \dots, n-1$$

e le 1.3.10. si traducono nelle seguenti

$$g''(x_1) = g''(x_n) = 0.$$

Si può concludere pertanto che la funzione estremante g è un polinomio al più di grado tre su ogni intervallo (x_i, x_{i+1}) , con derivate prima e seconda continue su (x_1, x_n) e derivata seconda nulla in x_1 e in x_n . Inoltre la scelta δg nulla nei nodi x_1, x_2, \dots, x_n , comporta che la funzione g interpola la tabella di punti data. Essa è quindi una spline cubica naturale avente per nodi gli n punti assegnati. Per il Teorema 1.3.1. essa è unica.

1.4. - Generalizzazione: caso K qualunque.

In questo paragrafo esamineremo dapprima il caso $K = 3$ e dimostreremo che, per tale K , la funzione « interpolante più regolare » di n punti assegnati è una spline naturale di quinto grado.

In questo caso le relazioni 1.3.5., 1.3.6., 1.3.7. acquistano rispettivamente la forma

$$1.4.1. \quad \min_{g \in G} \sigma(g) = \min_{g \in G} \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g'''(x))^2 dx = \sum_{i=1}^{n-1} \min_{g \in G} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (g'''(x))^2 dx$$

ove $G = \{g \in C^3[(x_1, x_n) q. o.]\}$,

$$1.4.2. \quad U = \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i}^{x_{i+1}} F(x, y, y', y'', y''') dx, \quad y \in C^3(x_i, x_{i+1}), \quad i=1, \dots, n-1,$$

$$1.4.3. \quad \delta U = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2 F_{y''}}{dx^2} - \frac{d^3 F_{y'''}}{dx^3} \right) \delta y \right] dx + \right. \\ \left. + \left[\left(F_{y'} - \frac{dF_{y''}}{dx} + \frac{d^2 F_{y'''}}{dx^2} \right) \delta y + \left(F_{y''} - \frac{dF_{y'''}}{dx} \right) \delta y' + F_{y'''} \delta y'' \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \right\} = 0.$$

Dalla 1.4.3. si deducono relazioni analoghe alle 1.3.8. e seguenti. Precisamente si ha che la funzione estremante y deve soddisfare alle equazione di EULERO seguente:

$$1.4.4. \quad F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \frac{d^2 F_{y''}}{dx^2} - \frac{d^3 F_{y'''}}{dx^3} = 0$$

che nel caso in esame ($F = (g'''(x))^2$) acquista la forma:

$$1.4.5. \quad g^{VI}(x) = 0 \quad \text{per } x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \dots, n-1.$$

Inoltre imponendo $\delta y = 0$ in x_i , $i = 1, 2, \dots, n$, e per l'arbitrarietà di $\delta y'$ e $\delta y''$, perchè sia nulla la somma totale 1.4.3., devono valere le seguenti condizioni:

$$1.4.6. \quad \left[F_{y''} - \frac{dF_{y'''}}{dx} \right]_{(x_i)_+} = \left[F_{y''} - \frac{dF_{y'''}}{dx} \right]_{(x_i)_-}, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$1.4.7. \quad \left[F_{y''} - \frac{dF_{y'''}}{dx} \right]_{x_1} = \left[F_{y''} - \frac{dF_{y'''}}{dx} \right]_{x_n} = 0,$$

$$1.4.8. \quad F_{y'''}(x_i)_+ = F_{y'''}(x_i)_-, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$1.4.9. \quad F_{y'''}(x_1) = F_{y'''}(x_n) = 0.$$

D'altra parte le relazioni 1.4.6., 1.4.7., 1.4.8., 1.4.9., si traducono nel caso in esame rispettivamente nelle seguenti

$$1.4.10. \quad g^{IV}(x_i)_+ = g^{IV}(x_i)_-, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$1.4.11. \quad g^{IV}(x_1) = g^{IV}(x_n) = 0,$$

$$1.4.12. \quad g'''(x_i)_+ = g'''(x_i)_-, \quad i = 2, \dots, n-1,$$

$$1.4.13. \quad g'''(x_1) = g'''(x_n) = 0.$$

Infine la condizione $\delta g = 0$ nei punti x_1, \dots, x_n garantisce al solito che la funzione g sia un'interpolante della tabella in esame.

Concludiamo pertanto che la funzione estremante è una spline naturale di grado cinque avente per nodi gli n punti x_1, x_2, \dots, x_n . Essa è poi unica, sempre per il Teorema 1.3.1.

Analogamente per K qualunque, dalla seguente ovvia generalizzazione della relazione 1.4.3.:

$$1.4.14. \quad \delta U = \sum_{i=1}^{n-1} \left\{ \int_{x_i}^{x_{i+1}} \left[\left(F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \dots (-)^K \frac{d^K F_{y^K}}{dx^K} \right) \delta y \right] dx + \right. \\ \left. + \left[\left(F_{y'} - \frac{dF_{y''}}{dx} + \dots (-)^{K-1} \frac{d^{K-1} F_{y^K}}{dx^{K-1}} \right) \delta y + \left(F_{y''} - \frac{dF_{y'''}}{dx} + \dots (-)^{K-2} \frac{d^{K-2} F_{y^K}}{dx^{K-2}} \right) \delta y' + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(F_{y'''} - \frac{dF_{y^{IV}}}{dx} + \dots (-)^{K-3} \frac{d^{K-3} F_{y^K}}{dx^{K-3}} \right) \delta y'' + \dots F_{y^K} \delta y^{K-1} \right]_{x_i}^{x_{i+1}} \right\} = 0$$

segue che nell'intervallo (x_i, x_{i+1}) , $0 < i < n$, y deve soddisfare alla equazione di EULERO:

$$1.4.15. \quad F_y - \frac{dF_{y'}}{dx} + \dots (-)^K \frac{d^K F_{y^K}}{dx^K} = 0$$

da cui, per $F \equiv (g^{(K)}(x))^2$, g deve essere soluzione dell'equazione:

$$1.4.16. \quad g^{(2K)} = 0 \quad \text{per } x \in (x_i, x_{i+1}) \text{ e } 0 < i < n.$$

Inoltre sempre scegliendo $\delta g = 0$ nei nodi, e $\delta g' \dots \delta g^{(K-1)}$ arbitrari si ha

$$1.4.17. \quad g^{(2K-l)}(x_i)_+ = g^{(2K-l)}(x_i)_-, \quad l = 2, 3, \dots, K \text{ e } i = 2, \dots, n-1$$

e

$$1.4.18. \quad g^{(2K-l)}(x_1) = g^{(2K-l)}(x_n) = 0, \quad l = 2, 3, \dots, K.$$

La funzione g cercata è pertanto una spline naturale di grado $(2K-1)$ e aventi come nodi i punti x_i , $i = 1, \dots, n$. Infine è unica per il Teorema 1.3.1.

1.5. - Conclusioni.

La trattazione esposta ritrova risultati già noti nella teoria dell'interpolazione di funzioni continue mediante splines. Essa però presenta, rispetto alle procedure con cui in passato tali risultati sono stati ottenuti, una portata maggiore. Infatti la tecnica dimostrativa utilizzata permette di individuare, pur partendo da una classe di funzioni molto vasta, la funzione « interpolante più regolare » come una ben determinata spline naturale. Le trattazioni finora conosciute di tale problema, invece, prendendo in esame la funzione soluzione stessa, possono solo verificare l'asserto.

Osserviamo inoltre che nella nostra presentazione del problema di « interpolazione più regolare », è stato possibile utilizzare la stessa procedura dimostrativa per ogni K , cioè per casi di qualunque grado.

Bibliografia.

- [1] J. H. AHLBERG, E. N. NILSON and J. WALSH, *The theory of splines and their applications*, Math. Sci. Eng., vol. 38, Academic Press (1967).
- [2] F. B. HILDEBRAND, *Analisi Numerica*, Ambrosiana 1967.
- [3] T. N. E. GREVILLE (ed.), *Theory and Applications of Spline Functions*, Academic Press, New York 1969.
- [4] T. C. HOLLADAY, *Smoothest curve approximation*, Math. Tables Aids Comput., **11** (1957), 233-243.
- [5] C. DE BOOR, *Best approximation properties of spline functions of odd degree*, J. Math. Mech., **12** (1963), 747-749.
- [6] I. J. SCHOENBERG, *On Interpolation by Spline Functions and its Minimal Properties*, (Proc. of the conference held in the Math. Res. Inst. at Oberwolfach, Black Forest, Aug. 4-10, 1963). P. L. Butzer ed., Birkhäuser Verlag, Basel (1964), 109-129.
- [7] G. SANSONE, *Lezioni di Analisi Matematica*, Vol. 2, Cedam, Padova 1941.

* * *