Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 239-252

ARISTIDE SANINI (*)

Connessioni lineari del tipo di Finsler e strutture quasi hermitiane. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

Introduzione.

Lo studio delle connessioni lineari su varietà di FINSLER mediante la tecnica degli spazi fibrati è stata di recente oggetto di una serie di ricerche, dovute in gran parte a M. MATSUMOTO, nella cui monografia [7] vengono rielaborati i risultati più significativi ottenuti.

In questo studio viene in particolare utilizzato il concetto di connessione non lineare [1] sullo spazio di FINSLER M; tale concetto permette di distinguere, secondo Y. ICHIJYO [3], vari tipi di connessioni lineari sul fibrato tangente $T(M)$, fra cui quelle dette *del tipo di Finsler*, equivalenti a connessioni lineari di FINSLER su M.

Scopo di questa Nota è quello di determinare le connessioni lineari su $T(M)$ dei vari tipi definiti in [3] che soddisfino alle seguenti condizioni:

a) siano metriche rispetto ad un'opportuna metrica riemanniana G su $T(M)$, detta metrica «liftata» di una metrica di FINSLER g su M;

b) siano compatibili con una struttura quasi complessa J su $T(M)$, dedotta da una struttura quasi complessa generalizzata j di M;

c): *a*) e *b*).

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Politecnico di Torino, 10100 Torino, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 11-V-73.

Da tale studio si ottiene, in particolare, una rappresentazione delle connessioni lineari di FINSLER su M compatibili con g, con j e con la struttura quasi hermitiana generalizzata (j, g) (1).

Dopo aver richiamato nel n. **1** il concetto di connessione non lineare su M e varie relazioni fra campi tensoriali su $T(M)$ e campi di FINSLER dello stesso tipo da essi individuati su M, al n. **2** si dà una rappresentazione dei vari tipi di connessioni lineari su $T(M)$ mediante una connessione lineare del tipo di FINSLER ed opportuni campi tensoriali di FINSLER.

Al n. **3**, dopo aver introdotto la metrica G, si considerano le connessioni lineari su $T(M)$ che soddisfano alla condizione *a*).

Definita (n. **4**) la struttura quasi complessa J su $T(M)$, i n. **5**, **6** sono dedicati rispettivamente alla determinazione dei vari tipi di connessioni lineari su $T(M)$ soddisfacenti alle condizioni *b*), *c*).

In tutto il lavoro si mantengono notazioni già usate in [**13**] ed inoltre si utilizzano endomorfismi analoghi a quelli già introdotti da G. B. RIZZA in [**10**], [**11**] per rappresentazioni di connessioni lineari compatibili con una struttura quasi complessa e quasi hermitiana.

1. - Connessioni non lineari e campi di Finsler.

Sia M una varietà differenziabile C^∞ di dimensione reale n, $T(M)$ il fibrato tangente ad essa; un elemento $z \in T(M)$ è una coppia $z = (x, \dot{x})$, con $x \in M$, $\dot{x} \in (M)_x$, spazio tangente ad M in x.

Detto (x^i) un sistema di coordinate locali relativo al punto x ed indicata con $\partial_i = \partial/\partial x^i$ la base naturale di $(M)_x$, il vettore $\dot{x}$ si rappresenta con una espressione del tipo: $\dot{x} = \dot{x}^i(\partial/\partial x^i)_x$; la $2n$-pla $(x^i, \dot{x}^i)$ fornisce un sistema di coordinate locali per $z = (x, \dot{x})$.

Detta π la proiezione naturale di $T(M)$ su M, indichiamo con V_z il sottospazio *verticale* dello spazio $\big(T(M)\big)_z$ tangente a $T(M)$ nel punto z, cioè il sottospazio costituito dai vettori $\tilde{X}_z$ tali che: $d\pi(\tilde{X}_z) = 0$.

Al variare di z su $T(M)$, V_z descrive la distribuzione n-dimensionale integrabile V, detta *distribuzione verticale*.

Posto: $\dot{\partial}_i = \partial/\partial \dot{x}^i$, la base naturale di $\big(T(M)\big)_z$ è data da $(\partial_i, \dot{\partial}_i)_z$, mentre $(\dot{\partial}_i)_z$ è la base naturale di V_z.

(1) La definizione di compatibilità tra strutture di FINSLER e strutture quasi complesse e quindi l'introduzione del concetto di struttura di FINSLER di tipo quasi hermitiano sono dovuti a G. B. RIZZA [**8**], [**9**]; in questi lavori viene fra l'altro posto in evidenza il significato geometrico della nozione di compatibilità introdotta.

La proiezione di un campo vettoriale $\tilde{X}$ di $T(M)$ su M è un campo vettoriale di FINSLER X su M; localmente, posto:

$$\tilde{X} = X^i(x, \dot{x})\,\partial_i + \dot{X}^i(x, \dot{x})\,\dot{\partial}_i\,,$$

si ha:

(1) $$X = X^i(x, \dot{x})\,\partial_i\,.$$

Il *lift verticale* del campo di FINSLER (1) è il campo $vX \in V$ definito localmente (²) da:

(2) $$vX = X^i(x, \dot{x})\,\dot{\partial}_i.$$

In analogia ai campi vettoriali, si definisce come campo tensoriale di FINSLER T di tipo (r, s) su M una legge che associa, $\forall x \in M$, $\forall \dot{x} \in (M)_x$, un tensore tangente ad M in x di tipo (r, s), dipendente differenziabilmente da x, $\dot{x}$. Localmente T è rappresentato da:

$$T = T^{i_1 \ldots i_r}_{j_1 \ldots j_s}(x, \dot{x})\,\partial_{i_1} \otimes \ldots \otimes \partial_{i_r} \otimes \mathrm{d}x^{j_1} \otimes \ldots \otimes \mathrm{d}x^{j_s}\,.$$

Indicheremo nel seguito con $\mathscr{F} = \mathscr{F}(T(M))$ l'algebra delle funzioni differenziabili su $T(M)$, con $\mathscr{D}^1 = \mathscr{D}^1_0(T(M))$ e con $\mathscr{D}^r_s = \mathscr{D}^r_s(T(M))$ gli $\mathscr{F}$-moduli dei campi vettoriali e dei campi tensoriali di tipo (r, s) su $T(M)$, mentre con $\mathscr{D}^{*1} = \mathscr{D}^{*1}_0(M)$, $\mathscr{D}^{*r}_s = \mathscr{D}^{*r}_s(M)$ si indicheranno gli analoghi $\mathscr{F}$-moduli dei campi di FINSLER su M. Porremo inoltre:

$$\mathscr{D} = \mathscr{D}(T(M)) = \sum_{r,s=0}^{+\infty} \mathscr{D}^r_s(T(M))\,, \qquad \mathscr{D}^* = \mathscr{D}^*(M) = \sum_{r,s=0}^{+\infty} \mathscr{D}^{*r}_s(M)\,.$$

Def. *Una connessione non lineare* (³) *H su M è una distribuzione differenziabile n-dimensionale H su $T(M)$, supplementare della distribuzione verticale.*

Si ha cioè, $\forall z \in T(M)$: $(T(M))_z = H_z \oplus V_z$.

Il *lift orizzontale* di un campo di FINSLER X è il campo $hX \in H$ tale che $\mathrm{d}\pi(hX) = X$.

Localmente, se X è dato dalla (1), l'espressione di hX è del tipo:

(3) $$hX = X^i(x, \dot{x})\big(\partial_i - \Gamma^p_i(x, \dot{x})\,\dot{\partial}_p\big)\,,$$

ove le quantità Γ^p_i si dicono le *componenti* della connessione non lineare H.

(²) Per una definizione intrinseca di v, cfr. ad es. [**6**], pag. 172.

(³) Cfr. [**6**], pag. 173, ovvero [**1**].

Sussiste la seguente:

Proposizione 1. *Per ogni campo vettoriale $\tilde{X} \in \mathscr{D}^1(T(M))$ sono univocamente determinati due campi vettoriali di Finsler X_h, X_v tali che:*

$$\tilde{X} = hX_h + vX_v \,. \tag{4}$$

Indicando con p_h, p_v le proiezioni di $\mathscr{D}^1(T(M))$ rispettivamente su H, V, si ha: $X_\alpha = \alpha^{-1} p_\alpha(\tilde{X})$ $(\alpha = h, v)$, ove h^{-1}, v^{-1} indicano gli $\mathscr{F}$-isomorfismi di H, V su $\mathscr{D}^{*1}(M)$, inversi rispettivamente di h, v.

Un'estensione della precedente proposizione, che utilizzeremo nel seguito, è data dalla

Proposizione 2. *Un campo tensoriale $\tilde{T} \in \mathscr{D}^{*1}_s(T(M))$ individua 2^{s+1} campi tensoriali $\overset{\alpha_1 \dots \alpha_s}{\underset{\beta}{T}} \in \mathscr{D}^{*1}_s(M)$ così definiti:*

$$\overset{\alpha_1 \dots \alpha_s}{\underset{\beta}{T}}(X_1, \dots, X_s) = \beta^{-1} p_\beta \tilde{T}(\alpha_1 X_1, \dots, \alpha_s X_s) \,, \qquad (X_1, \dots, X_s \in \mathscr{D}^{*1}(M);\ \alpha_1, \dots, \alpha_s, \beta = h, v) \,. \tag{5}$$

2. - Connessioni lineari su $T(M)$.

Seguendo la classificazione di [3], supposta assegnata una connessione non lineare H su M, una connessione lineare ∇ su $T(M)$ si dirà del tipo *orizzontale di Finsler* (h.f.), ovvero del tipo *verticale di Finsler* (v.f.), se la distribuzione H, ovvero V, è parallela in ∇.

Una connessione lineare di tipo h.f. e v.f. si dice del tipo *quasi di Finsler* (q.f.); infine una connessione di tipo q.f. che verifichi le condizioni:

$$h^{-1} \nabla_{\alpha X}(hY) = v^{-1} \nabla_{\alpha X}(vY) \qquad (\alpha = h, v;\ X, Y \in \mathscr{D}^{*1}(M)) \,,$$

si dice una connessione lineare del tipo di FINSLER (relativa alla connessione non lineare H).

Se ∇ è una connessione lineare del tipo di FINSLER, poniamo:

$$D^{(\alpha)}_X Y = \beta^{-1} \nabla_{\alpha X}(\beta Y) \qquad (\alpha, \beta = h, v) \,, \tag{6}$$

da cui segue:

Proposizione 3. *Una connessione lineare ∇ del tipo di Finsler su $T(M)$ individua una coppia $(D^{(h)}, D^{(v)})$ di $\mathscr{F}$-omomorfismi di $\mathscr{D}^{*1}(M)$ nello spazio vettoriale delle derivazioni su $\mathscr{D}^* = \sum_{r,s=0}^{+\infty} \mathscr{D}^{*r}_s(M)$, tali che:*

$$D_X^{(\alpha)} f = (\alpha X) f, \quad f \in \mathscr{F}, \quad \alpha = h, v, \tag{7}$$

ossia [4] *una connessione lineare di Finsler $(D^{(h)}, D^{(v)})$ su M, relativa alla connessione non lineare H.*

La connessione lineare di Finsler $(D^{(h)}, D^{(v)})$ su M definita dalle (6) si dirà *associata* alla connessione lineare ∇ del tipo di Finsler su $T(M)$.

L'equivalenza fra connessioni lineari di Finsler su M e connessioni lineari del tipo di Finsler su $T(M)$ segue dalla Prop. 3 e dalla:

Proposizione 4. *Una connessione lineare di Finsler $(D^{(h)}, D^{(v)})$ su M individua una connessione lineare ∇ del tipo di Finsler su $T(M)$, la cui connessione lineare di Finsler associata coincide con $(D^{(h)}, D^{(v)})$.*

Se $\tilde{X} = hX_h + vX_v$, $\tilde{Y} = hY_h + vY_v$ secondo la (4), la connessione ∇ è definita da:

$$\nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} = h(D^{(h)}_{X_h} Y_h + D^{(v)}_{X_v} Y_h) + v(D^{(h)}_{X_h} Y_v + D^{(v)}_{X_v} Y_v)\,. \tag{8}$$

Fissata una connessione lineare ∇ del tipo di Finsler su $T(M)$, ogni altra connessione lineare $\overline{\nabla}$ su $T(M)$ è rappresentata da:

$$\overline{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y} = \nabla_{\tilde{X}} \tilde{Y} + Q(\tilde{X}, \tilde{Y})\,, \qquad Q \in \mathscr{D}^1_2(T(M))\,. \tag{9}$$

---

[4] Cfr. ad es. [**13**]. Osserviamo in particolare che per la coppia $(D^{(h)}, D^{(v)})$ si ha:

$$D_X^{(\alpha)}(fY) = ((\alpha X) f) Y + f D_X^{(\alpha)} Y\,, \qquad X, Y \in \mathscr{D}^{*1}(M)\,,\ f \in \mathscr{F}\,.$$

Posto:

$$D^{(h)}_{\partial_i} \partial_j = \Gamma^k_{ij}(x, \dot{x})\, \partial_k\,, \qquad D^{(v)}_{\partial_i} \partial_j = C^k_{ij}(x, \dot{x})\, \partial_k\,,$$

se $X = X^i(x, \dot{x})\,\partial_i$, $Y = Y^i(x, \dot{x})\,\partial_i$, tenendo presente la (3) segue:

$$D^{(h)}_X Y = X^i(\partial_i Y^j - \Gamma^p_i \dot{\partial}_p Y^j + \Gamma^j_{ik} Y^k)\,\partial_j\,, \qquad D^{(v)}_X Y = X^i(\dot{\partial}_i Y^j + C^j_{ik} Y^k)\,\partial_j\,.$$

Gli operatori $D_X^{(\alpha)}$ si estendono al solito modo a campi tensoriali di Finsler arbitrari; ad es., se $g \in \mathscr{D}^{*0}_2(M)$, si ha:

$$(D_X^{(\alpha)} g)(Y, Z) = (\alpha X)(g(Y, Z)) - g(D_X^{(\alpha)} Y, Z) - g(Y, D_X^{(\alpha)} Z), \ (\alpha = h, v;\ X, Y, Z \in \mathscr{D}^{*1}(M))\,.$$

Indicando con $\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}$ i campi di FINSLER di tipo (1, 2) individuati da Q secondo la (5), dalle (6), (9) si ha:

$$\overline{\nabla}_{\alpha X}(\beta Y) = \beta D_X^{(\alpha)} Y + \gamma \overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}(X, Y) , \qquad (\alpha, \beta, \gamma = h, v) , \tag{10}$$

ove si sommi rispetto a γ.

Ne segue che, affinchè $\overline{\nabla}$ sia di tipo h.f., ovvero di tipo v.f., deve essere:

$$\overset{\alpha h}{\underset{v}{Q}} = 0 , \qquad \text{ovvero} \qquad \overset{\alpha v}{\underset{h}{Q}} = 0 \qquad (\alpha = h, v) ; \tag{11}$$

$\overline{\nabla}$ è di tipo q.f. se valgono entrambe, mentre è del tipo di FINSLER se oltre alle precedenti, si ha:

$$\overset{\alpha h}{\underset{h}{Q}} = \overset{\alpha v}{\underset{v}{Q}} \qquad (\alpha = h, v) . \tag{12}$$

Se $\overline{\nabla}$ è del tipo di FINSLER, posto:

$$\overset{\alpha h}{\underset{h}{Q}} = \overset{\alpha v}{\underset{v}{Q}} = \overset{\alpha}{Q} \tag{12'}$$

con $\overset{\alpha}{Q} \in \mathscr{D}^{*1}_{2}(M)$ arbitrari, la connessione lineare di FINSLER $(\overline{D}^{(h)}, \overline{D}^{(v)})$ su M associata a $\overline{\nabla}$ è data da:

$$\overline{D}_X^{(\alpha)} Y = D_X^{(\alpha)} Y + \overset{\alpha}{Q}(X, Y) , \qquad X, Y \in \mathscr{D}^{*1}(M) . \tag{13}$$

La (13), al variare di $\overset{\alpha}{Q}$, esprime la totalità delle connessioni lineari di FINSLER su M, relative ad un'assegnata connessione non lineare H, mediante una di esse.

3. - Connessioni lineari metriche rispetto alla metrica liftata G

Supposta assegnata su M una metrica di FINSLER g, una connessione lineare di FINSLER $(D^{(h)}, D^{(v)})$ su M è di tipo metrico (5) se $D^{(\alpha)} g = 0$ $(\alpha = h, v)$, ossia:

$$D_X^{(\alpha)} g = 0 , \qquad \forall X \in \mathscr{D}^{*1}(M) , \ \alpha = h, v ,$$

---

(5) È tale ad es. la ben nota connessione di CARTAN. Cfr. **[6]**, pag. 187, ovvero **[12]**, Ch. 3.

equivalente [6] alla:

$$(14)\qquad (\alpha X)\big(g(Y, Z)\big) = g(D_X^{(\alpha)}\, Y, Z) + g(Y, D_X^{(\alpha)} Z)\,.$$

La metrica di FINSLER g, insieme alla connessione non lineare H, individua una metrica riemanniana G su $T(M)$, detta *metrica liftata di* g, definita da [7]:

$$(15)\qquad G(\tilde{Y}, \tilde{Z}) = g(Y_h, Z_h) + g(Y_v, Z_v)\,,$$

con $\tilde{Y} = hY_h + vY_v$, $\tilde{Z} = hZ_h + vZ_v$.

Si ha [8]:

Proposizione 5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè la connessione lineare* ∇ *del tipo di Finsler su* $T(M)$ *associata alla connessione lineare di Finsler* $(D^{(h)}, D^{(v)})$ *su* M *sia metrica rispetto a* G, *è che* $(D^{(h)}, D^{(v)})$ *sia metrica rispetto a* g.

È immediata conseguenza della relazione:

$$(16)\qquad (\nabla_{\alpha X}(G)(\beta Y, \gamma Z) = \delta_\gamma^\beta\{(\alpha X)\big(g(Y, Z)\big) - g(D_X^{(\alpha)}\, Y, Z) - g(Y, D_X^{(\alpha)} Z)\}\,,$$

ove $\alpha, \beta, \gamma = h, v$; $\delta_\gamma^\beta = 1$ se $\beta = \gamma$, $\delta_\gamma^\beta = 0$ se $\beta \neq \gamma$.

L'esistenza di connessioni lineari di FINSLER su M metriche rispetto a g si prova come segue.

La connessione lineare di FINSLER $(\bar{D}^{(h)}, \bar{D}^{(v)})$ rappresentata dalle (13), è metrica se si ha:

$$(17)\qquad (D_X^{(\alpha)} g)(Y, Z) = g\big(\overset{\alpha}{Q}(X, Y), Z\big) + g\big(Y, \overset{\alpha}{Q}(X, Z)\big)\,,$$

che, in coordinate locali, si scrive:

$$(D_{\partial_i}^{(\alpha)} g)_{jk} = g_{rk}\overset{\alpha}{Q}{}^r_{ij} + g_{jr}\overset{\alpha}{Q}{}^r_{ik}\,,$$

equivalente alla [9]:

$$(18)\qquad \tfrac{1}{2}\big(\overset{\alpha}{Q}{}^r_{ij} + g^{-1kr}\overset{\alpha}{Q}{}^s_{ik}\, g_{js}\big) = \tfrac{1}{2} g^{-1kr}(D_{\partial_i}^{(\alpha)} g)_{jk}\,.$$

---

[6] Si tenga presente l'ultima parte della nota [4].

[7] Cfr. ad es. [**5**], pag. 266.

[8] Cfr. [**6**], pag. 188.

[9] Con g^{-1} si indica la matrice inversa di g.

Considerato l'endomorfismo Γ di $\mathscr{D}^{*1}_2(M)$:

$$\Gamma(Q) = T\,, \qquad T^r_{ij} = g^{-1kr} Q^s_{ik} g_{js}\,, \tag{19}$$

è facile verificare che Γ è involutorio ($\Gamma^2 = I$, identità).

Poichè $\frac{1}{2}(I + \Gamma)$ è idempotente ed inoltre, detto $\overset{\alpha}{P}$ il secondo membro della (18), si ha: $\overset{\alpha}{P} = \Gamma\overset{\alpha}{P}$, segue (10) che la soluzione generale della (18) è data da:

$$\overset{\alpha}{Q}{}^r_{ij} = \tfrac{1}{2} g^{-1kr}(D^{(\alpha)}_{\partial_i} g)_{jk} + \overset{\alpha}{M}{}^r_{ij} - g^{-1kr}\overset{\alpha}{M}{}^s_{ik} g_{js}\,,$$

con $\overset{\alpha}{M} \in \mathscr{D}^{*1}_2(M)$ arbitrari, ossia (11):

$$\overset{\alpha}{Q}(X, Y) = \tfrac{1}{2} g^{-1}\{(D^{(\alpha)}_X g)\, Y\} + (I - \Gamma)\overset{\alpha}{M}(X, Y)\,, \tag{20}$$

che, tenendo conto delle (13), (8) e della Prop. 5, fornisce anche la più generale connessione lineare del tipo di FINSLER su $T(M)$ relativa alla connessione non lineare H e metrica rispetto a G.

Se si suppone che la connessione lineare ∇ del tipo di FINSLER che figura nella (9) sia metrica rispetto a G, si ha, con un facile calcolo, che la connessione $\overline{\nabla}$ è dello stesso tipo se e solo se:

$$g\big(\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}(X, Y), Z\big) + g\big(Y, \overset{\alpha\gamma}{\underset{\beta}{Q}}(X, Z)\big) = 0\,, \qquad X, Y, Z \in \mathscr{D}^{*1}(M)\,, \tag{21}$$

ossia:

$$\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}} = -\Gamma \overset{\alpha\gamma}{\underset{\beta}{Q}}\,, \qquad (\alpha, \beta, \gamma = h, v)\,, \tag{22}$$

da cui, per $\beta \neq \gamma$, si ottengono i campi tensoriali $\overset{\alpha h}{\underset{v}{Q}}$ espressi mediante $\overset{\alpha v}{\underset{h}{Q}}$.

---

(10) Con argomentazioni identiche a quelle indicate in [**14**], pag. 133, ovvero [**10**], pag. 17.

(11) Le soluzioni della (18) si possono ottenere anche permutando circolarmente in essa i campi X, Y, Z e sottraendo dalla somma di due tali relazioni la terza. In tal modo si ottiene:

$$\overset{\alpha}{Q}{}^r_{pq} = \tfrac{1}{2} g^{-1jr}\{(D^{(\alpha)}_{\partial_p} g)_{qj} + (D^{(\alpha)}_{\partial_q} g)_{jp} - (D^{(\alpha)}_{\partial_j} g)_{pq}\} + g_{iq}\overset{\alpha}{A}{}^i_{jp} g^{-1jr} + g_{ip}\overset{\alpha}{A}{}^i_{jq} g^{-1jr} + \overset{\alpha}{A}{}^r_{pq}$$

ove $\overset{\alpha}{A}$ (parte antisimmetrica di $\overset{\alpha}{Q}$) è un campo arbitrario di $\mathscr{D}^{*1}_2(M)$, antisimmetrico nei due indici di covarianza.

Poichè nel seguito non verranno considerati problemi di simmetria, cioè relativi a tensori di torsione, non utilizzeremo tale rappresentazione.

In particolare si ha:

Proposizione 6. *Una connessione lineare su $T(M)$ metrica rispetto a G e di tipo* h.f., *ovvero* v.f., *è anche di tipo* v.f., *ovvero* h.f., *cioè è del tipo quasi di Finsler.*

Per $\beta=\gamma$ dalla (22) si ottiene:

$$\underset{\beta}{\overset{\alpha\beta}{Q}} = (I-\Gamma)\underset{\beta}{\overset{\alpha\beta}{M}} \tag{23}$$

con $\underset{\beta}{\overset{\alpha\beta}{M}} \in \mathscr{D}^{*1}_{2}(M)$ arbitrari, che fornisce le connessioni lineari del tipo quasi di FINSLER su $T(M)$ compatibili con G; in particolare, le connessioni lineari del tipo di FINSLER metriche rispetto a G si ottengono ponendo nelle (23): $\underset{h}{\overset{\alpha h}{Q}} = \underset{v}{\overset{\alpha v}{Q}} = \overset{\alpha}{Q}$, $\underset{h}{\overset{\alpha h}{M}} = \underset{v}{\overset{\alpha v}{M}} = \overset{\alpha}{M}$, relazioni che coincidono con le (20), in cui si tenga presente che, per l'ipotesi fatta, è $D^{(\alpha)}_{X} g = 0$.

4. - Strutture quasi complesse e quasi hermitiane.

In accordo con [3], si dirà *struttura quasi complessa generalizzata su M* un campo di FINSLER j di tipo $(1,1)$ tale che: $j^2=-I$; ovviamente la dimensione di M deve essere pari ($n=2m$).

Se g è una metrica di FINSLER su M, la coppia (j,g) si dirà una *struttura quasi hermitiana generalizzata* se:

$$g(X,Y)=g(jX,jY)\,, \qquad \forall X, Y \in \mathscr{D}^{*1}(M)\,. \tag{24}$$

Tenendo presente che le componenti del tensore metrico sono positivamente omogenee di grado zero nell'argomento direzionale $\dot{x}$, perchè la (24) abbia senso, occorrerà supporre che anche j soddisfi alla stessa condizione di omogeneità.

Data su M una connessione non lineare H, la struttura j individua in modo naturale una struttura quasi complessa J su $T(M)$ (12) definita da:

$$J(\alpha X)=\alpha(jX)\,, \qquad (\alpha=h,v)\,. \tag{25}$$

(12) L'introduzione della struttura J è dovuta a Y. ICHIJYO [3] (ove viene indicata con F, mentre j è indicata con f). In tale lavoro vengono anche determinate le condizioni affinchè J sia integrabile ed affinchè (J,G) sia una struttura quasi kähleriana.

Se la coppia (j, g) è una struttura quasi hermitiana generalizzata per M, la coppia (J, G), con G metrica liftata di g, è una struttura quasi hermitiana su $T(M)$.

Si ha inoltre:

Proposizione 7. *Una connessione lineare ∇ del tipo di Finsler su $T(M)$ è compatibile con J $(\nabla J = 0)$ se e solo se la connessione lineare di Finsler $(D^{(h)}, D^{(v)})$ associata a ∇ è compatibile con j $(D^{(\alpha)}j = 0)$.*

Segue immediatamente dalle relazioni:

$$\nabla_{\alpha X}\{J(\beta Y)\} = \nabla_{\alpha X}\{\beta(jY)\} = \beta D_X^{(\alpha)}(jY)\,,$$

$$J\{\nabla_{\alpha X}(\beta Y)\} = J\{\beta D_X^{(\alpha)} Y\} = \beta j D_X^{(\alpha)} Y\,.$$

5. - Connessioni lineari su $T(M)$ compatibili con la struttura quasi complessa J.

Si verifica facilmente che la connessione lineare $\overline{\nabla}$ su $T(M)$ definita dalla (10) è compatibile con la struttura quasi complessa J se e solo se:

$$\beta D_X^{(\alpha)}(jY) + \gamma \overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}(X, jY) = \beta j D_X^{(\alpha)} Y + \gamma j \overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}(X, Y)\,,$$

$\big(X, Y \in \mathscr{D}^{*1}(M);\ \alpha, \beta, \gamma = h, v;$ si sommi rispetto a $\gamma\big)$ da cui si ottiene:

$$\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}(X, jY) = j\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}(X, Y)\,, \qquad (\beta \neq \gamma)\,, \tag{26}$$

$$D_X^{(\alpha)}(jY) + \overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{Q}}(X, jY) = jD_X^{(\alpha)} Y + j\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{Q}}(X, Y)\,, \qquad (\beta = \gamma)\,. \tag{27}$$

Considerato l'endomorfismo involutorio W di $\mathscr{D}^{*1}_{2}(M)$ definito da:

$$(WT)(X, Y) = -jT(X, jY)\,, \qquad T \in \mathscr{D}^{*1}_{2}(M)\,, \tag{28}$$

e gli endomorfismi idempotenti:

$$O = \tfrac{1}{2}(I + W)\,, \qquad O^* = \tfrac{1}{2}(I - W)\,, \tag{29}$$

le (26), (27) sono rispettivamente equivalenti alle:

$$O^* \overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}} = 0 \qquad (\beta \neq \gamma)\,, \tag{26'}$$

$$(O^* \overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{Q}})(X,\, Y) = -\tfrac{1}{2} j\{(D_X^{(\alpha)} j)\, Y\} \tag{27'}$$

e la loro soluzione generale è data da [13]:

$$\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}(X,\, Y) = (O \overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{F}})(X,\, Y)\,, \qquad (\beta \neq \gamma)\,, \tag{30}$$

$$\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{Q}}(X,\, Y) = -\tfrac{1}{2} j\{(D_X^{(\alpha)} j)\, Y\} + (O \overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{F}})(X,\, Y)\,, \tag{31}$$

con $\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{F}} \in \mathscr{D}^{*1}_{\ 2}(M)$ arbitrari.

Tenendo conto delle condizioni del n. 2, dalle (30), (31) si ottengono le connessioni lineari su $T(M)$ compatibili con J di tipo h.f., v.f., q.f. e di FINSLER, ponendo rispettivamente:

1) $\overset{\alpha h}{\underset{v}{F}} = 0$;

2) $\overset{\alpha v}{\underset{h}{F}} = 0$;

3) $\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{F}} = 0 (\beta \neq \gamma)$;

4) $\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{F}} = 0 (\beta \neq \gamma)$, $\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{F}} = \overset{\alpha}{F}$.

Inoltre dalla Prop. 7 si ha che *la più generale connessione lineare di Finsler su M compatibile con la struttura quasi complessa generalizzata j è rappresentata dalle* (13) *in cui si ponga:*

$$\overset{\alpha}{Q}(X,\, Y) = -\tfrac{1}{2} j\{(D_X^{(\alpha)} j)\, Y\} + (O \overset{\alpha}{F})(X,\, Y) \qquad (\alpha = h,\, v)\,, \tag{32}$$

con $\overset{\alpha}{F} \in \mathscr{D}^{*1}_{\ 2}(M)$ arbitrari.

---

[13] Cfr. nota [10].

6. - Connessioni lineari su $T(M)$ compatibili con la struttura quasi hermitiana (J, G)

Determiniamo le connessioni lineari $\overline{\nabla}$ su $T(M)$ compatibili con la struttura quasi hermitiana (J, G) utilizzando la rappresentazione (10), in cui supporremo che $(D^{(h)}, D^{(v)})$ sia metrica rispetto a g. La connessione (10) soddisfa alle condizioni richieste se i campi dati dalle (30), (31) verificano la (21).

Osserviamo anzitutto che, essendo $(D^{(h)}, D^{(v)})$ metrica, dalla (24) segue facilmente che:

$$g(j\{(D_X^{(\alpha)}j)\,Y\}, Z) + g(Y, j\{(D_X^{(\alpha)}j)\,Z\}) = 0\,, \tag{33}$$

per cui, imponendo che i campi (30), (31) verifichino la (21) si ottiene:

$$g((O\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{F}})(X, Y), Z) + g(Y, (O\overset{\alpha\gamma}{\underset{\beta}{F}})(X, Z)) = 0\,,$$

che è equivalente alla:

$$O\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{F}} + \Gamma O\overset{\alpha\gamma}{\underset{\beta}{F}} = 0\,. \tag{34}$$

Dalla (34) e dalla (30) seguono, per $\beta \neq \gamma$, le espressioni di $\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}$ mediante $\overset{\alpha\gamma}{\underset{\beta}{Q}}$.

Se $\beta = \gamma$, la (34) si scrive:

$$L\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{F}} = 0\,, \tag{35}$$

ove: $L = \frac{1}{2}(I + \Gamma)O$ è un endomorfismo idempotente di $\mathscr{D}^{*1}_{\;2}(M)$, essendo Γ e $W = 2O - I$ involutori e permutabili [14].

---

[14] Si ha infatti, $\forall T \in \mathscr{D}^{*1}_{\;2}(M)$:

$$(\Gamma W T)^i_{hk} = -\overset{-1}{g}{}^{ip} j^{\cdot r}_{s} T^s_{ht} j^{\cdot t}_{p} g_{kr} = -j^{\cdot i}_{p} \overset{-1}{g}{}^{tp} T^s_{ht} g_{sr} j^{\cdot r}_{k} = (W\Gamma T)^i_{hk}\,,$$

in quanto:

$$j^{\cdot r}_{s} g_{kr} = -j^{\cdot r}_{k} g_{sr}\,, \qquad \overset{-1}{g}{}^{tp} j^{\cdot t}_{p} = -\overset{-1}{g}{}^{tp} j^{\cdot i}_{p},$$

essendo g « adattata » alla struttura j, come espresso dalla (24).

La soluzione generale della (35) è data da:

$$\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{F}} = (I - L)\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{B}}\,, \tag{36}$$

da cui:

$$O\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{F}} = \tfrac{1}{2}O(I - \Gamma)\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{B}}\,, \tag{37}$$

con $\overset{\alpha\beta}{\underset{\beta}{B}} \in \mathscr{D}^{*1}_{\,2}(M)$ arbitrari.

Tenendo presenti le (30), (31), dalle (34) ($\beta \neq \gamma$) e (37) si ottengono i vari tipi di connessioni lineari su $T(M)$ compatibili con la struttura quasi hermitiana (J, G). In particolare, le connessioni lineari $\overline{\overline{\nabla}}$ del tipo di FINSLER si ottengono dalla (10), in cui la connessione lineare ∇ sia metrica rispetto a G ed i campi $\overset{\alpha\beta}{\underset{\gamma}{Q}}$ verifichino le (11), (12′) con:

$$\overset{\alpha}{Q}(X, Y) = -\tfrac{1}{2}j\{(D_X^{(\alpha)}j)\,Y\} + \tfrac{1}{2}O(I - \Gamma)\overset{\alpha}{B}(X, Y)\,, \tag{38}$$

$\overset{\alpha}{B} \in \mathscr{D}^{*1}_{\,2}(M)$ arbitrari, essendo al solito $(D^{(h)}, D^{(v)})$ la connessione lineare di FINSLER su M associata a ∇.

Si ha quindi che le connessioni lineari di FINSLER su M compatibili con la struttura quasi hermitiana generalizzata (j, g) sono date dalle (13), con $(D^{(h)}, D^{(v)})$ metrica rispetto a g e $\overset{\alpha}{Q}$ definiti dalla (38).

Bibliografia.

[1] W. BARTHEL, *Nichtlineare Zusammenhänge und deren Holonomiegruppen*, J. Reine Angew. Math., **212** (1963), 120-149.

[2] A. COSSU, *Connessioni che conservano una struttura quasi complessa*, Atti Accad. Naz. Lincei (8) **30** (1961), 863-873.

[3] Y. ICHIJYO, *Almost complex structures of tangent bundles and Finsler metrics*, J. Math. Kyoto Univ., (6) **3** (1967), 419-452.

[4] S. KOBAYASHI and K. NOMIZU, *Foundations of differential geometry*, Vol. I,II, Interscience Publ., New York, 1963-69.

[5] M. MATSUMOTO, *Connections, metrics and almost complex structures of tangent bundles*, J. Math. Kyoto Univ., (5) **1** (1966), 251-278.

[6] M. MATSUMOTO, *Theory of Finsler spaces and differential geometry of tangent bundles*, J. Math. Kyoto Univ., (7) **2** (1967), 169-204.

[7] M. MATSUMOTO, *The theory of Finsler connections*, Pubblications of the study group of Geometry, **5** (1970).

[8] G. B. RIZZA, *Strutture di Finsler sulle varietà quasi complesse*, Rend. Acc. Naz. Lincei, (8) **33** (1962), 271-275.

[9] G. B. RIZZA, *Strutture di Finsler di tipo quasi Hermitiano*, Riv. Mat. Univ. Parma, (2) **4** (1963), 83-106.

[10] G. B. RIZZA, *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni su di una varietà quasi complessa*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **1** (1969), 9-25.

[11] G. B. RIZZA, *Connessioni metriche sulle varietà quasi hermitiane*, Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste, **1** (1969), 163-181.

[12] H. RUND, *The differential geometry of Finsler spaces*, Springer Verlag, Berlin 1959.

[13] A. SANINI, *Derivazioni su distribuzioni e connessioni di Finsler*, Rend. Sem. Mat. Univ. Torino, **31** (1972-73).

[14] K. YANO, *Differential geometry on complex and almost complex spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965.

[15] K. YANO and T. OKUBO, *On tangent bundles with Sasakian metrics of Finslerian and Riemannian manifolds*, Ann. Mat. Pura Appl., (4) **87** (1970), 137-162.

Riassunto

Assegnata una connessione non lineare su uno spazio di Finsler M, si determinano vari tipi di connessioni lineari sul suo fibrato tangente compatibili con una struttura quasi hermitiana (J, G) dedotta da una struttura quasi hermitiana generalizzata (j, g) di M.

Ne segue in particolare una rappresentazione delle connessioni lineari di Finsler su M compatibili con (j, g).

Summary

For a given non linear connexion on a Finsler space M, the author builds various kinds of linear connexions on its tangent bundle, compatible with an almost hermitian structure (J, G), associated with a generalized almost hermitian structure (j, g) of M.

In particular one obtains a representation of the linear Finsler connexions on M, compatible with (j, g).

* * *