Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 233-238

ARTURO A. L. SANGALLI (*)

Sugli automorfismi delle categorie di algebre simili. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduzione.

Sia $\mathscr{K}_\mu$ la categoria di tutte le algebre di uno stesso tipo μ di similarità, con morfismi tutti gli omomorfismi. In questo articolo si descrivono gli automorfismi $\mathscr{K}_\mu \to \mathscr{K}_\mu$ « di varietà », cioè quegli isomorfismi di categoria $F: \mathscr{K}_\mu \to \mathscr{K}_\mu$ che commutano col funtore dimenticante $\mathscr{K}_\mu \to$Ens (un tale funtore F fa corrispondere ad ogni algebra A, il cui insieme base sarà denotato $|A|$, un'algebra $F(A)$ basata sullo stesso $|A|$ e in modo tale che ogni omomorfismo $A \to A'$ sia anche un omomorfismo $F(A) \to F(A')$). Questi isomorfismi di varietà sono precisamente le « equivalenze equazionali » di FELSCHER [**1**], introdotte da MALCEV [**3**] sotto il nome di « equivalenze razionali ». Si dimostra il seguente risultato:

Teorema 1. *Gli automorfismi di varietà $\mathscr{K}_\mu \to \mathscr{K}_\mu$ sono tutti e soli quelli determinati (nel modo sott'indicato) dalle coppie (f, f'), dove f è una biezione dell'insieme delle operazioni del tipo μ (biezione che preserva il rango delle operazioni), e f' è un'applicazione che associa ad ogni operazione n-aria di μ una permutazione dell'insieme $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$. L'automorfismo F determinato dalla coppia (f, f') è il seguente:*

l'interpretazione in $F(A)$ dell'operazione n-aria Q del tipo μ è l'interpretazione in A dell'operazione $f(Q)\langle p^{(n)}_{\xi(0)}, \ldots, p^{(n)}_{\xi(n-1)}\rangle$, dove $\xi = f'(Q)$ e $p^{(n)}_i$ denota la i-esima proiezione $|A|^n \to |A|$.

Di fatto si dimostra un risultato simile per gli isomorfismi di varietà $F: \mathscr{K}_\varrho \to \mathscr{K}_\mu$. Come corollario si ottengono il Teorema 1 e anche il

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università di Parma, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. - Ricevuto: 25-XI-1974.

Teorema 2. *Esiste un isomorfismo (di varietà) $\mathscr{K}_\varrho \to \mathscr{K}_\mu$ se e solo se i tipi ϱ e μ hanno lo stesso numero di operazioni di rango n per ogni n, nel qual caso ci sono $\prod_{\substack{n=0\\ \mu_n \neq \emptyset}}^{\infty} \bar{\bar{\mu}}_n!(n!)^{\bar{\bar{\mu}}_n}$ isomorfismi, dove $\bar{\bar{\mu}}_n$ è il cardinale (finito) dell'insieme μ_n delle operazioni di rango n del tipo μ.*

2. - Richiami, definizioni e notazioni.

La dimostrazione che seguirà si basa sulla rappresentazione delle varietà (e dei suoi morfismi) per mezzo dei sistemi trasformazionali algebrici (S.T.A.) esposta in [4] (consultare questo articolo per le definizioni di S.T.A., morfismo di S.T.A., ecc.).

La categoria TYP dei tipi (di similarità di algebre) ha come oggetti le sequenze $\mu = \langle \mu_n \rangle_{n\in\omega}$ d'insiemi disgiunti, e come morfismi $f: \langle \mu_n \rangle \to \langle \varrho_n \rangle$ le applicazioni $f: \bigcup_{n\in\omega} \mu_n \to \bigcup_{n\in\omega} \varrho_n$ che preservano il rango, cioè, se $Q \in \mu_n$ allora $f(Q) \in \varrho_n$.

Se μ è un tipo, con T_μ sarà denotato l'insieme dei termini di tipo μ (più precisamente: fissato un insieme infinito $\{v_i | i \in \omega\}$ di variabili, T_μ viene ottenuto nel solito modo: ogni v_i ed ogni $Q \in \mu_0$ sono in T_μ; se $t_0, \dots, t_{n-1}$ sono in T_μ e $Q \in \mu_n$, allora $Q(t_0, \dots, t_{n-1}) \in T_\mu$). Ogni $Q \in \mu_n$ determina un'operazione n-aria $\hat{Q}$ su T_μ definendo $\hat{Q}(t_0, \dots, t_{n-1}) = Q(t_0, \dots, t_{n-1})$ (oppure $\hat{Q}(\emptyset) = Q$, se $n = 0$). L'insieme T_μ ha una struttura di S.T.A., le sue operazioni privilegiate (chiamate « opérations distinguées » in [4]) sono precisamente quelle che appartengono al « clone » [2] generato dalle operazioni $\hat{Q}$, con $Q \in \bigcup \mu_n$.

C'è un funtore θ: STA $\to$ TYP che fa corrispondere ad un S.T.A. T la sequenza $\langle \theta_n(T) \rangle$ degli insiemi $\theta_n(T)$ di operazioni privilegiate n-arie di T. Un morfismo $U: T_1 \to T_2$ di S.T.A. determina un morfismo $\theta(U): \theta(T_1) \to \theta(T_2)$ di TYP definendo $\theta(U)(Q) = U * Q$ (la definizione di $U * -$ si trova in 1.2, [4]). Il funtore θ ha un aggiunto sinistro. Più precisamente si ha il

Lemma 1. *Sia T un* S.T.A., *μ un tipo di similarità e f un morfismo $\mu \to \theta(T)$ in* TYP. *Allora esiste un unico morfismo di* S.T.A. *$U: T_\mu \to T$ tale che $U * \hat{Q} = f(Q)$ per ogni $Q \in \bigcup \mu_n$.*

Dim. U viene definito per induzione sulla lunghezza $l(t)$ di $t \in T_\mu$. Per $l(t) = 1$: $U(v_n) = n$, $U(Q) = f(Q)(\emptyset)$; per $l(t) > 1$: $U(Q(t_0, \dots, t_{n-1})) = f(Q)(U(t_0), \dots$ $\dots, U(t_{n-1}))$. Si verifica facilmente per induzione su $l(t)$ che U commuta con le trasformazioni. Per mostrare che U preserva le operazioni privilegiate si verifica che l'insieme delle operazioni privilegiate E di T_μ le quali hanno la proprietà: « per ogni $t_0, \ldots, t_{n-1} \in T_\mu$, $U(E(t_0, \ldots, t_{n-1})) = U * E(U(t_0), \ldots, U(t_{n-1}))$ » è un « clone » su T_μ che contiene $\hat{Q}$ per ogni $Q \in \bigcup \mu_n$.

3. - Dimostrazione dei Teoremi 1 e 2.

In vista dell'equivalenza (controvariante) di categorie VAR $\to$ STA definita in 2.3 [4] (VAR denota qui la categoria delle varietà) è sufficiente caratterizzare gli isomorfismi $T_\mu \to T_\varrho$ in STA e tener conto del modo nel quale si passa da un morfismo $T_\mu \to T_\varrho$ in STA al corrispondente morfismo $\mathscr{K}_\varrho \to \mathscr{K}_\mu$ in VAR ([4], p. 194). Si dimostra prima il

Lemma 2. *Sia* $U: T_\mu \to T_\varrho$ *un isomorfismo in* STA *e sia* $Q \in \mu_n$.
(i) *se* $n = 0$, *allora* $U * \hat{Q} = \hat{F}$ *per un unico* $F \in \varrho_0$;
(ii) *se* $n > 0$, *allora* $U * \hat{Q} = \hat{F}\langle p^{(n)}_{\xi(0)}, \ldots, p^{(n)}_{\xi(n-1)}\rangle$ *per un unico* $F \in \varrho_n$ *ed una unica permutazione* ξ *di* $\{0, \ldots, n-1\}$.

Dim. Il funtore θ: STA $\to$ TYP associa ad U l'isomorfismo $U * -: \langle\theta_n(T_\mu)\rangle \to \langle\theta_n(T_\varrho)\rangle$ in TYP. Dunque, per ogni $n \in \omega$, $U * -: \theta_n(T_\mu) \to \theta_n(T_\varrho)$ è una biezione (la biezione inversa è $U^{-1} * -$).

Poichè $U * \hat{Q}$ è un'operazione privilegiata di T_ϱ essa deve essere di una delle seguenti forme:

(a) $\hat{F}$, per qualche $F \in \varrho_0$;

(b) $p^{(n)}_i$, per qualche $i \in n$;

(c) $\hat{F} z^{(n)}$, per qualche $F \in \varrho_0$, $n > 0$ (qui $z^{(n)}$ denota l'unica applicazione $T^n_\varrho \to 1$);

(d) $\hat{F}\langle F_0, \ldots, F_{m-1}\rangle$, per qualche $m > 0$, $F \in \varrho_m$, $F_i \in \theta_n(T_\varrho)$, $i \in m$.

È facile constatare che solo i casi (a) e (d) possono presentarsi. Infatti, da (b) si avrebbe la contraddizione $\hat{Q} = U^{-1} * (U * \hat{Q}) = p^{(n)}_i$, dal fatto che $U^{-1} * -$ preserva le proiezioni (essendo U^{-1} un morfismo di STA). Se si suppone (c) si ha: $\hat{Q} = U^{-1} * (\hat{F} z^{(n)}) = (U^{-1} * \hat{F}) z^{(n)}$, e $\hat{Q}$ risulterebbe quindi una applicazione costante, ma questo è impossibile se $n > 0$.

Supponiamo di avere (d) e sia

$$(1) \qquad E = U^{-1} * \hat{F}, \qquad E_i = U^{-1} * F_i, \qquad i \in m.$$

Dal fatto che U è un morfismo di STA si ha che $U*-$ è un « morfismo di clone », cioè

$$U*(E\langle E_0, \ldots, E_{m-1}\rangle) = U*E\langle U*E_0, \ldots, U*E_{m-1}\rangle = \hat{F}\langle F_0, \ldots, F_{m-1}\rangle = U*\hat{Q}$$

e quindi

$$\hat{Q} = E\langle E_0, \ldots, E_{m-1}\rangle\,, \tag{2}$$

per l'iniettività di $U*-$.

Le considerazioni fatte per $U*\hat{Q}$ valgono anche per $U^{-1}*\hat{F}$, e siccome $\hat{F}$ ha rango $m>0$, $U^{-1}*\hat{F}$ deve essere necessariamente della forma (d). Quindi $E=\hat{K}\langle K_0, \ldots, K_{r-1}\rangle$, per qualche $r>0$, $K\in\mu_r$, $K_j\in\theta_m(T_\mu)$, $j\in r$. Da (2) risulta

$$\hat{Q} = \hat{K}\langle K_0\langle E_0, \ldots, E_{m-1}\rangle, \ldots, K_{r-1}\langle E_0, \ldots, E_{m-1}\rangle\rangle. \tag{3}$$

Applicando ambedue i membri di (3) alla n-upla $(v_0, \ldots, v_{n-1})$ si ottiene $Q(v_0, \ldots, v_{n-1}) = K(t_0, \ldots, t_{r-1})$, dove $t_j = K_j\langle E_0, \ldots, E_{m-1}\rangle(v_0, \ldots, v_{n-1})$, $j\in r$. Dunque $Q=K$, $n=r$, $v_j=t_j$ (se questo non fosse ovvio, vedere per esempio [**5**], « teorema di formazione », p. 16) e allora $K_j\langle E_0, \ldots, E_{m-1}\rangle = p_j^{(n)}$, $j\in n$. In particolare si ha che $n>0$; quindi, se $n=0$ si deve avere necessariamente (a), e (i) è dimostrato (l'unicità di F è immediata).

Si vede facilmente che ogni K_j deve essere una proiezione e dunque c'è un'applicazione (iniettiva) $\theta: n\to m$ tale che

$$\text{per ogni } j\in n: \quad K_j = p_{\theta(j)}^{(m)} \quad \text{e} \quad E_{\theta(j)} = p_j^{(n)}\,. \tag{4}$$

Da (1) si ha $U*E=\hat{F}$, e quindi

$$\hat{F} = U*(\hat{Q}\langle p_{\theta(0)}^{(m)}, \ldots, p_{\theta(n-1)}^{(m)}\rangle) = U*\hat{Q}\langle p_{\theta(0)}^{(m)}, \ldots, p_{\theta(n-1)}^{(m)}\rangle =$$

$$= \hat{F}\langle F_0\langle p_{\theta(0)}^{(m)}, \ldots, p_{\theta(n-1)}^{(m)}\rangle, \ldots, F_{m-1}\langle p_{\theta(0)}^{(m)}, \ldots, p_{\theta(n-1)}^{(m)}\rangle\rangle.$$

Nello stesso modo nel quale da (3) si è ottenuto (4) si ottiene: esiste un'applicazione (iniettiva) $\xi: m\to n$ tale che

$$\text{per ogni } i\in m: \quad F_i = p_{\xi(i)}^{(n)} \quad \text{e} \quad p_{\theta(\xi(i))}^{(m)} = p_i^{(m)}\,. \tag{5}$$

Si ha pertanto che $n=m$ e che θ e ξ sono delle permutazioni di n l'una inversa dell'altra. Da (5) si ottiene (ii) (l'unicità di F e ξ è immediata).

Il Lemma 2 permette di definire, per ogni isomorfismo $U\colon T_\mu \to T_\varrho$, un morfismo $\Phi U\colon \langle \mu_n \rangle \to \langle \varrho_n \times S_n \rangle$ in TYP (dove S_n denota l'insieme delle permutazioni di $\{0, \ldots, n-1\}$), che soddisfa la condizione:

(6) la composizione $\langle \mu_n \rangle \xrightarrow{\Phi U} \langle \varrho_n \times S_n \rangle \xrightarrow{q} \langle \varrho_n \rangle$ è un isomorfismo in TYP (q denota l'ovvia proiezione canonica).

Infatti ΦU è l'unico morfismo che rende commutativo il diagramma in TYP

$$\begin{tikzcd} \langle \mu_n \rangle \arrow[rr, "\tilde{U}"] \arrow[dr, dashed] & & \theta(T_\rho) \\ & \langle \rho_n \times S_n \rangle \arrow[ur, "s"'] & \end{tikzcd}$$

dove $s(F, \xi)$ è per definizione $\hat{F}\langle p^{(n)}_{\xi(0)}, \ldots, p^{(n)}_{\xi(n-1)} \rangle$ e $\tilde{U}$ corrisponde ad U per l'aggiunzione. Esplicitamente: $\Phi U(Q) = (F, \xi)$ se e solo se $U * \hat{Q} = \hat{F}\langle p^{(n)}_{\xi(0)}, \ldots$ $\ldots, p^{(n)}_{\xi(n-1)} \rangle$. Che ΦU verifichi (6) risulta della seguente osservazione (che segue dalla prova del Lemma 2):

$$U * \hat{Q} = \hat{F}\langle p^{(n)}_{\xi(0)}, \ldots, p^{(n)}_{\xi(n-1)} \rangle \quad \text{se e solo se} \quad U^{-1} * \hat{F} = \hat{Q}\langle p^{(n)}_{\xi^{-1}(0)}, \ldots, p^{(n)}_{\xi^{-1}(n-1)} \rangle .$$

È immediato che la corrispondenza Φ definita sopra è iniettiva. Per dimostrarne la suriettività sia $g\colon \mu \to \langle \varrho_n \times S_n \rangle$ un morfismo in TYP tale che valga (6). Per il Lemma 1 c'è un unico morfismo $U\colon T_\mu \to T_\varrho$ in STA caratterizzato dalla proprietà: per ogni $Q \in \mu_n$, $U * \hat{Q} = sg(Q)$. Questo U è in realtà un isomorfismo: il suo inverso è il morfismo associato (Lemma 1) al seguente morfismo $\varrho \to \theta(T_\mu)$ in TYP: ad $F \in \varrho_n$ corrisponde $\hat{Q}\langle p^{(n)}_{\xi^{-1}(0)}, \ldots, p^{(n)}_{\xi^{-1}(n-1)} \rangle$ se e solo se $g(Q) = (F, \xi)$. Dalla definizione di U è immediato che $\Phi U = g$.

Bibliografia.

[1] W. Felscher, *Equational maps*, Contributions to Math. Logic, Proceedings of the Logic Colloquium, Hannover 1966, North-Holland 1968, 121-161.

[2] P. Hall, *Some word problems*, J. London Math. Soc., **33** (1958), 482-496.

[3] A. I. Malcev, *Structural characteristics of certain classes of algebras (Russian)*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **120** (1958), 29-32.

[4] A. A. L. Sangalli, *Une approche transformationnelle à l'algèbre universelle*, Manuscripta Math., **6** (1972), 177-205.

[5] J. R. Shoenfield, *Mathematical logic*, Addison-Wesley, Reading, Massachusets 1967.

Summary

Let $\mathscr{K}_\mu$ *denote the category of all algebras of a similarity type* μ*, with morphisms all homomorphisms. The isomorphisms* $\mathscr{K}_\varrho \to \mathscr{K}_\mu$ *commuting with the forgetful functors into the category of sets are described. In particular there follows that there is one such isomorphism* $\mathscr{K}_\varrho \to \mathscr{K}_\mu$ *just in case the types* ϱ *and* μ *have the same number of operations of each rank.*

* * *