Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 201-204

CONSOLATO PELLEGRINO (*)

Creazione di limiti nelle categorie comma. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

0. – In un precedente mio lavoro ho provato l'esistenza, sotto certe condizioni, dei limiti in una categoria comma (cfr. [1]); la dimostrazione data risulta particolarmente utile per costruire i limiti in una categoria comma ottenuta mediante categorie con limiti assegnati.

Nel presente lavoro, sotto ipotesi più semplici, dimostro un teorema che riguarda la creazione di limiti (cfr. [2]) nelle suddette categorie.

1. – Dati i funtori $\mathscr{F}_1 \colon \underline{\mathscr{C}}_1 \to \underline{\mathscr{C}}$ e $\mathscr{F}_2 \colon \underline{\mathscr{C}}_2 \to \underline{\mathscr{C}}$, sia $\langle \underline{\mathscr{C}}_1 \times \underline{\mathscr{C}}_2, \mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2 \rangle$ il prodotto delle categorie $\underline{\mathscr{C}}_1$ e $\underline{\mathscr{C}}_2$, sia $\langle (\mathscr{F}_1 \downarrow \mathscr{F}_2), \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2, \mathscr{R} \rangle$ la categoria comma su $\mathscr{F}_1$ ed $\mathscr{F}_2$ (cfr. [2]) e sia $\langle\!\langle \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \rangle\!\rangle$ l'unico funtore di $(\mathscr{F}_1 \downarrow \mathscr{F}_2)$ in $\underline{\mathscr{C}}_1 \times \underline{\mathscr{C}}_2$ tale che per $i = 1, 2$, $\mathscr{P}_i \langle\!\langle \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \rangle\!\rangle = \mathscr{R}_i$.

Detto $\mathscr{D}$ un diagramma in $(\mathscr{F}_1 \downarrow \mathscr{F}_2)$ di schema $\underline{\mathscr{J}}$ si ha il seguente:

LEMMA. *Se $\mathscr{F}_2$ [$\mathscr{F}_1$] è un funtore continuo [co-continuo] allora il funtore $\langle\!\langle \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \rangle\!\rangle$ crea i limiti [co-limiti] per $\mathscr{D}$.*

DIMOSTRAZIONE. Se la coppia $\langle \Lambda, \lambda \rangle$ è un eventuale cono limite per il diagramma $\langle\!\langle \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \rangle\!\rangle \mathscr{D}$ si ha che:

a) per $i = 1, 2$ la coppia $\langle \mathscr{P}_i(\Lambda), \mathscr{P}_i \lambda \rangle$ è un cono limite in $\underline{\mathscr{C}}_i$ per il diagramma $\mathscr{R}_i \mathscr{D} = \mathscr{P}_i \langle\!\langle \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \rangle\!\rangle \mathscr{D}$, infatti $\mathscr{P}_i$ è un funtore continuo;

b) la coppia $\langle \mathscr{F}_2 \mathscr{P}_2(\Lambda), \mathscr{F}_2 \mathscr{P}_2 \lambda \rangle$ è un cono limite in $\underline{\mathscr{C}}$ per il diagramma $\mathscr{F}_2 \mathscr{R}_2 \mathscr{D}$ in quanto $\mathscr{F}_2$ è continuo per ipotesi;

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del G.N.S.A.G.A. del C.N.R. — Ricevuto il 30-X-1975.

c) la coppia $\langle \mathscr{F}_1\mathscr{P}_1(\Lambda), (\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D})\circ(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda)\rangle$ (1) è un cono in $\underline{\mathscr{C}}$ compatibile con $\mathscr{F}_2\mathscr{R}_2\mathscr{D}$ in quanto $\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D}$ è una trasformazione naturale da $\mathscr{F}_1\mathscr{R}_1\mathscr{D}$ in $\mathscr{F}_2\mathscr{R}_2\mathscr{D}$ mentre la coppia $\langle \mathscr{F}_1\mathscr{P}_1(\Lambda), \mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda\rangle$ è un cono in $\underline{\mathscr{C}}$ compatibile con $\mathscr{F}_1\mathscr{R}_1\mathscr{D}$;

d) posto $\Lambda^* = \langle \mathscr{P}_1(\Lambda), \mathscr{P}_2(\Lambda), \overleftarrow{(\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D})\circ(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda)}\rangle$ (2) si ha che Λ^* è un oggetto di $(\mathscr{F}_1{\downarrow}\mathscr{F}_2)$;

e) per ogni oggetto α di $\underline{\mathscr{J}}$ $\lambda_\alpha = \langle \mathscr{P}_1(\lambda_\alpha), \mathscr{P}_2(\lambda_\alpha)\rangle$ è un morfismo di $(\mathscr{F}_1{\downarrow}\mathscr{F}_2)$ da Λ^* in $\mathscr{D}(\alpha)$ infatti per $i=1, 2$ $\mathscr{P}_i(\lambda_\alpha)$ è un morfismo di $\underline{\mathscr{C}}_i$ da $\mathscr{P}_i(\Lambda) = \mathscr{R}_i(\Lambda^*)$ in $\mathscr{R}_i\mathscr{D}(\alpha)$ ed inoltre $\mathscr{F}_2\mathscr{P}_2(\lambda_\alpha)\circ\overleftarrow{(\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D})\circ(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda)} = \big(\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D}(\alpha)\big)\circ\big(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1(\lambda_\alpha)\big)$;

f) per ogni morfismo $m\colon \alpha \to \beta$ in $\underline{\mathscr{J}}$ si ha che $\mathscr{D}(m)\lambda_\alpha = \lambda_\beta$ infatti per $i = 1, 2$

$$\mathscr{R}_i\big(\mathscr{D}(m)\circ\lambda_\alpha\big) = \mathscr{R}_i\mathscr{D}(m)\circ\mathscr{R}_i(\lambda_\alpha) = \mathscr{R}_i\mathscr{D}(m)\circ\mathscr{P}_i(\lambda_\alpha) = \mathscr{P}_i(\lambda_\beta) = \mathscr{R}_i(\lambda_\beta)\ ;$$

g) da d), e), f) segue che la coppia $\langle \Lambda^*, \lambda\rangle$ è un cono in $(\mathscr{F}_1{\downarrow}\mathscr{F}_2)$ compatibile con $\mathscr{D}$.

Se la coppia $\langle X, \xi\rangle$ è un cono di $(\mathscr{F}_1{\downarrow}\mathscr{F}_2)$ compatibile con il diagramma $\mathscr{D}$, osservato che per $i = 1, 2$ la coppia $\langle \mathscr{R}_i(X), \mathscr{R}_i\xi\rangle$ è un cono compatibile con $\mathscr{R}_i\mathscr{D}$ e ricordato che la coppia $\langle \mathscr{P}_i(\Lambda), \mathscr{P}_i\lambda\rangle$ è un cono limite per $\mathscr{R}_i\mathscr{D}$ posto $\bar{\xi} = \langle \overleftarrow{\mathscr{R}_1\xi}, \overleftarrow{\mathscr{R}_2\xi}\rangle$ (3) si ha che:

h) per ogni oggetto α di $\underline{\mathscr{J}}$

$$\mathscr{F}_2\mathscr{P}_2(\lambda_\alpha)\circ\mathscr{F}_2(\overleftarrow{\mathscr{R}_2\xi})\circ\mathscr{E}_u\mathscr{R}(X) = \mathscr{F}_2\mathscr{P}_2(\lambda_\alpha)\circ\overleftarrow{(\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D})\circ(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda)}\circ\mathscr{F}_1(\overleftarrow{\mathscr{R}_1\xi})\ ;$$

infatti

$$\mathscr{F}_2\mathscr{P}_2(\lambda_\alpha)\circ\mathscr{F}_2(\overleftarrow{\mathscr{R}_2\xi})\circ\mathscr{E}_u\mathscr{R}(X) = \mathscr{F}_2\big(\mathscr{P}_2(\lambda_\alpha)\circ\overleftarrow{\mathscr{R}_2\xi}\big)\circ\mathscr{E}_u\mathscr{R}(X) = \mathscr{F}_2\mathscr{R}_2(\xi_\alpha)\circ\mathscr{E}_u\mathscr{R}(X)\,,$$

mentre

$$\mathscr{F}_2\mathscr{P}_2(\lambda_\alpha)\circ\overleftarrow{(\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D})\circ(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda)}\circ\mathscr{F}_1(\overleftarrow{\mathscr{R}_1\xi}) = \mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D}(\alpha)\circ\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1(\lambda_\alpha)\circ\mathscr{F}_1(\overleftarrow{\mathscr{R}_1\xi}) =$$
$$= \mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D}(\alpha)\circ\mathscr{F}_1\big(\mathscr{P}_1(\lambda_\alpha)\circ\overleftarrow{\mathscr{R}_1\xi}\big) = \mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D}(\alpha)\circ\mathscr{F}_1\mathscr{R}_1(\xi_\alpha)\,,$$

---

(1) Per quanto riguarda $\mathscr{E}_u$ cfr. [2].

(2) Con $\overleftarrow{(\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D})\circ(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda)}$ abbiamo indicato il morfismo canonico di $\underline{\mathscr{C}}$ da $\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1(\Lambda)$ in $\mathscr{F}_2\mathscr{P}_2(\Lambda)$.

(3) Con $\overleftarrow{\mathscr{R}_i\xi}$, per $i = 1, 2$, abbiamo indicato il morfismo canonico di $\underline{\mathscr{C}}_i$ da $\mathscr{R}_i(X)$ in $\mathscr{P}_i(\Lambda) = \mathscr{R}_i(\Lambda^*)$.

e, ricordato che

$$\mathscr{F}_2\mathscr{R}_2(\xi_\alpha)\circ\mathscr{E}_u\mathscr{R}(X) = \mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D}(\alpha)\circ\mathscr{F}_1\mathscr{R}_1(\xi_\alpha)$$

in quanto ξ_α è un morfismo di $(\mathscr{F}_1\downarrow\mathscr{F}_2)$ da X in $\mathscr{D}(\alpha)$, si ha che la suddetta eguaglianza è verificata;

i) ricordato che la coppia $\langle\mathscr{F}_2\mathscr{P}_2(\Lambda), \mathscr{F}_2\mathscr{P}_2\lambda\rangle$ è un cono limite in $\underline{\mathscr{C}}$ per $\mathscr{F}_2\mathscr{R}_2\mathscr{D}$ dalla precedente eguaglianza segue che

$$\mathscr{F}_2(\overleftarrow{\mathscr{R}_2\xi})\circ\mathscr{E}_u\mathscr{R}(X) = (\overleftarrow{\mathscr{E}_u\mathscr{R}\mathscr{D})\circ(\mathscr{F}_1\mathscr{P}_1\lambda})\circ\mathscr{F}_1(\overleftarrow{\mathscr{R}_1\xi})\,;$$

l) dalla nota (³) e da *i*) segue che $\bar{\xi}$ è un morfismo di $(\mathscr{F}_1\downarrow\mathscr{F}_2)$ da X in Λ^*;

m) per ogni oggetto α di $\underline{\mathscr{J}}$ $\lambda_\alpha\circ\bar{\xi} = \xi_\alpha$ infatti per $i = 1, 2$

$$\mathscr{R}_i(\lambda_\alpha\circ\bar{\xi}) = \mathscr{R}_i(\lambda_\alpha)\circ\mathscr{R}_i\bar{\xi} = \mathscr{P}_i(\lambda_\alpha)\circ\overleftarrow{\mathscr{R}_i\xi} = \mathscr{R}_i(\xi_\alpha)\,;$$

n) se x è un morfismo di $(\mathscr{F}_1\downarrow\mathscr{F}_2)$ da X in Λ^* tale che per ogni oggetto α di $\underline{\mathscr{J}}$ $\lambda_\alpha\circ x = \xi_\alpha$, allora $x = \bar{\xi}$: infatti per $i = 1, 2$

$$\mathscr{P}_i(\lambda_\alpha)\circ\mathscr{R}_i(x) = \mathscr{R}_i(\lambda_\alpha)\circ\mathscr{R}_i(x) = \mathscr{R}_i(\lambda_\alpha\circ x) = \mathscr{R}_i(\xi_\alpha)\,,$$

e, ricordato che la coppia $\langle\mathscr{P}_i(\Lambda), \mathscr{P}_i\lambda\rangle$ è un cono limite in $\underline{\mathscr{C}}_i$ per $\mathscr{R}_i\mathscr{D}$, si ha che $\mathscr{R}_i(x) = \overleftarrow{\mathscr{R}_i\xi} = \mathscr{R}_i(\bar{\xi})$ e quindi $x = \bar{\xi}$;

o) *da g*), *l*), *m*), *n*) *segue che la coppia* $\langle\Lambda^*, \lambda\rangle$ *è un cono limite in* $(\mathscr{F}_1\downarrow\mathscr{F}_2)$ *per il diagramma* $\mathscr{D}$ *e che per ogni cono* $\langle X, \xi\rangle$ *in* $(\mathscr{F}_1\downarrow\mathscr{F}_2)$ *compatibile con* $\mathscr{D}$ *si ha che* $\overleftarrow{\xi} = \langle\overleftarrow{\mathscr{R}_1\xi}, \overleftarrow{\mathscr{R}_2\xi}\rangle$.

p) $\langle\!\langle\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\rangle\!\rangle(\Lambda^*) = \Lambda$ infatti

$$\langle\!\langle\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\rangle\!\rangle(\Lambda^*) = \langle\mathscr{R}_1(\Lambda^*), \mathscr{R}_2(\Lambda^*)\rangle = \langle\mathscr{P}_1(\Lambda), \mathscr{P}_2(\Lambda)) = \langle\mathscr{P}_1, \mathscr{P}_2\rangle(\Lambda) = \Lambda$$

analogamente si verifica che $\langle\!\langle\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\rangle\!\rangle\lambda = \lambda$.

Se la coppia $\langle Y, \eta\rangle$ è un cono limite in $(\mathscr{F}_1\downarrow\mathscr{F}_2)$ per il diagramma $\mathscr{D}$ tale che $\langle\!\langle\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\rangle\!\rangle(Y) = \Lambda$ e $\langle\!\langle\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\rangle\!\rangle(\eta) = \lambda$ si ha che:

q) $\eta = \lambda$ infatti da $\langle\!\langle\mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2\rangle\!\rangle(\eta) = \lambda$ segue che per $i = 1, 2$ $\mathscr{R}_i(\eta) = \mathscr{P}_i(\lambda) = \mathscr{R}_i(\lambda)$, analogamente si ha che per $i = 1, 2$ $\mathscr{R}_i(Y) = \mathscr{R}_i(\Lambda^*)$;

r) $Y = \Lambda^*$ infatti

$$\overleftarrow{\eta} = \langle\overleftarrow{\mathscr{R}_1\eta}, \overleftarrow{\mathscr{R}_2\eta}\rangle = \langle i_{\mathscr{P}_1(\Lambda)}, i_{\mathscr{P}_2(\Lambda)}\rangle = \langle i_{\mathscr{R}_1(\Lambda^*)}, i_{\mathscr{R}_2(\Lambda^*)}\rangle = i_{\Lambda^*}\,;$$

s) da q), r) segue che $\langle Y, \eta\rangle = \langle \Lambda^*, \lambda\rangle$.

Da *o*), *p*), *s*) segue che il funtore $\langle\!\langle \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \rangle\!\rangle$ crea i limiti per $\mathscr{D}$, inoltre per l'arbitrarietà di $\mathscr{D}$ si ha il seguente

Teorema. *Se* $\mathscr{F}_2$ $[\mathscr{F}_1]$ *è un funtore continuo [co-continuo] allora il funtore* $\langle\!\langle \mathscr{R}_1, \mathscr{R}_2 \rangle\!\rangle$ *crea i limiti [co-limiti]; se poi* $\underline{\mathscr{C}}_1$ *e* $\underline{\mathscr{C}}_2$ *sono categorie complete [co-complete] allora la categoria* $(\mathscr{F}_1 \downarrow \mathscr{F}_2)$ *è completa [co-completa] ed i funtori* $\mathscr{R}_1$ *ed* $\mathscr{R}_2$ *sono continui [co-continui].*

Risultati analoghi valgono nel caso in cui le categorie $\underline{\mathscr{C}}_1$ e $\underline{\mathscr{C}}_2$ hanno i prodotto [co-prodotti] ed il funtore $\mathscr{F}_2$ $[\mathscr{F}_1]$ conserva i prodotti [co-prodotti] oppure le categorie $\underline{\mathscr{C}}_1$ e $\underline{\mathscr{C}}_2$ sono finitamente complete [co-complete] ed il funtore $\mathscr{F}_2$ $[\mathscr{F}_1]$ è finitamente continuo [co-continuo].

Dimostrazione. Ovvia (cfr. [**2**], Th. V.4.2).

Osservazione. *Questo teorema, tra l'altro, è molto utile per riconoscere i coni [co-coni] limiti in una categoria comma che ne soddisfi le ipotesi; per esempio un quadrato commutativo, in una tale categoria, è pull-back se e solo se sono pull-backs le sue immagini nelle categorie* $\underline{\mathscr{C}}_1$ *e* $\underline{\mathscr{C}}_2$ *mediante i funtori* $\mathscr{R}_1$ *ed* $\mathscr{R}_2$ *rispettivamente.*

Bibliografia.

[**1**] C. Pellegrino, *Un Teorema di Completezza per le Categorie Comma, sue Applicazioni agli n-grafi*, Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **23** (1974).

[**2**] S. Mac-Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer-Verlag, New York 1971.

Summary

In this paper, given the functors $\mathscr{F}_1 \colon \underline{\mathscr{C}}_1 \to \underline{\mathscr{C}}$ *and* $\mathscr{F}_2 \colon \underline{\mathscr{C}}_2 \to \underline{\mathscr{C}}$, *we prove that if* $\mathscr{F}_2$ $[\mathscr{F}_1]$ *is continuous [co-continuous] then the functor* $(\mathscr{F}_1 \downarrow \mathscr{F}_2) \to \underline{\mathscr{C}}_1 \times \underline{\mathscr{C}}_2$ *which sends each object* $\langle e, d, f\rangle$ *to the pair* $\langle e, d\rangle$ *creates limits [co-limits].*

* * *