Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 175-188

LUIGI PAGANONI (*)

Sulla equivalenza fra misurabilità e continuità per le soluzioni di una classe di equazioni funzionali. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduzione.

Si consideri la classica equazione funzionale di CAUCHY

$$f(x+y)=f(x)+f(y) \qquad x,y\in R\ (^1)\,.$$

È noto (si veda [1] per un'ampia bibliografia) che ogni soluzione $f: R\rightarrow R$ di tale equazione che sia misurabile secondo LEBESGUE o, più in generale, limitata su un insieme con misura di LEBESGUE positiva, è continua.

Questo fatto è conseguenza delle seguenti proprietà:

a) se f è misurabile secondo LEBESGUE o limitata su un insieme con misura di LEBESGUE positiva, esiste un punto $x_0\in R$ in un intorno del quale f si mantiene limitata;

b) se f è limitata in un intorno di un punto $x_0\in R$, essa è limitata in un intorno dell'origine;

c) se f è limitata in un intorno dell'origine, essa è continua nell'origine;

d) se f è continua nell'origine, essa è continua su R.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università degli Studi di Milano, Via C. Saldini, 50, 20133 Milano.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni. Ricevuto: 31-4-1974.

(1) Qui e nel seguito si denota con R il campo reale.

Le proprietà b), c) e d) sono conseguenza immediata della particolare natura dell'equazione di CAUCHY; la a) è conseguenza di un classico teorema di STEINHAUS [**6**] che afferma che se due insiemi A e B hanno misura di LEBESGUE positiva, allora l'insieme $A+B$ contiene un intervallo.

In questa Nota si dimostra che valgono proprietà analoghe anche per le soluzioni di equazioni funzionali molto più generali.

2. - La nozione di misura di Steinhaus.

In [**3**] M. KUCZMA e J. SMITAL hanno denotato con « misura di STEINHAUS » una misura μ, definita su una σ-algebra $\mathscr{M}$ di sottoinsiemi di R, per la quale vale la seguente proprietà: se $A, B \in \mathscr{M}$ e $\mu(A), \mu(B) > 0$, allora $A+B$ contiene un punto interno.

Per lo scopo che abbiamo in vista, è opportuno estendere preliminarmente tale nozione al caso di spazi astratti e di operazioni su A e B più generali della somma diretta.

Sia E uno spazio topologico, $\mathscr{M}$ una σ-algebra di sottoinsiemi di E e μ una misura su $\mathscr{M}$; inoltre sia $S \subset E \times E$ e $F: S \to E$. Diremo che μ è una *misura di Steinhaus per* F se, per ogni insieme $A \times B \subset S$ con $\mu(A), \mu(B) > 0$, $F(A \times B)$ contiene un punto interno.

È evidente che qualora sia $E = R$, $S = R \times R$, $F(x, y) = x + y$, si ottiene come caso particolare la definizione di M. KUCZMA e J. SMITAL.

Sono note condizioni sufficienti a garantire che una misura μ sia una misura di STEINHAUS per F (si veda ad esempio [**2**] nel caso $E = R$ e [**4**] nel caso di spazi topologici generali).

Segnaliamo, in particolare, che vale il seguente

TEOREMA 2.1 (²). *Sia μ l'usuale misura di Borel su R^n $(n \geq 1)$, $A \subset R^n \times R^n$ un aperto e $F: A \to R^n$. Se F è di classe C^1 in A e le applicazioni derivate F'_x, F'_y sono non singolari* (³), *allora μ è una misura di Steinhaus per F.*

3. - I risultati principali.

Siano E e N spazi topologici. Si consideri l'equazione funzionale

$$(*) \qquad f[F(x, y)] = H[f(x), f(y); x, y]$$

(²) Questo Teorema è un immediato corollario del Teorema 2 di [**4**].

(³) Basta anzi che tali condizioni siano soddisfatte in un aperto $A_0 \subset A$ con $\mu(A - A_0) = 0$.

in cui $A \subset E \times E$, $F: A \to E$, $H: (N \times N) \times A \to N$, $f: E \to N$. Inoltre, dette E_1 e E_2 le proiezioni di A rispettivamente sul primo e sul secondo fattore e $E_3 = F(A)$, si supporrà $E = E_1 \cup E_2 \cup E_3$ (si veda [**5**]).

$\forall x \in E_1$, sia $A_x = \{y \in E: (x, y) \in A\}$ e $F_x: A_x \to E$ la funzione definita da $F_x(y) = F(x, y)$;

$\forall y \in E_2$, sia $A^y = \{x \in E: (x, y) \in A\}$ e $F^y: A^y \to E$ la funzione definita da $F^y(x) = F(x, y)$.

Vale il seguente

Teorema 3.1. *$N = (N, \delta)$ sia uno spazio metrico e $E = (E, \mathcal{M}, \mu)$ uno spazio di misura. Si supponga che μ sia una misura di* Steinhaus *per F e che esistano due insiemi $U, V \in \mathcal{M}$ con le seguenti proprietà:*

1) *$U \times V \subset A$ e $\mu(U) > 0$, $\mu(V) > 0$,*

2) *per ogni insieme limitato $B \subset N \times N$, $H(B \times (U \times V))$ sia un insieme limitato.*

Allora, se f è una soluzione μ-misurabile (4) *di* ($*$), *esiste $z_0 \in E_3$ tale che f è limitata in un intorno di z_0.*

Più in generale, la stessa conclusione è valida se f, anzichè misurabile, è limitata su due insiemi U_1 e V_1 con $\mu(U_1), \mu(V_1) > 0$ e $U_1 \times V_1 \subset U \times V$.

Sorge ora il problema se, dal fatto che f sia limitata in un intorno di un punto, si possa dedurre la continuità di f in quel punto. Una risposta in questo senso è fornita dai seguenti Teoremi 3.2 e 3.3.

Teorema 3.2. *$E = (E, d)$ e $N = (N, \delta)$ siano spazi metrici, A un aperto e f una soluzione di* ($*$). *Si supponga che:*

1) *$\forall y \in E_2$ [$\forall x \in E_1$], F^y [F_x] sia una mappa aperta,*

2) *$\forall y \in E_2$ e $\forall v \in N$ [$\forall x \in E_1$ e $\forall u \in N$], esistano costanti L, $0 < L < 1$, e $p \geq 0$ tali che, $\forall x_1, x_2 \in A^y$ e $\forall u_1, u_2 \in N$,*

$$\delta(H[u_1, v; x_1, y], H[u_2, v; x_2, y]) \leq L\delta(u_1, u_2) + pd(x_1, x_2)$$

[$\forall y_1, y_2 \in A_x$ *e* $\forall v_1, v_2 \in N$,

$$\delta(H[u, v_1; x, y_1], H[u, v_2; x, y_2]) \leq L\delta(v_1, v_2) + pd(y_1, y_2)] .$$

---

(4) Cioè, per ogni aperto V di N, $f^{-1}(V) \in \mathcal{M}$.

Allora, se (x_0, y_0) *è un punto tale che* $F(x_0, y_0) = x_0$ $[F(x_0, y_0) = y_0]$ *e* f *è limitata in un intorno di* x_0 $[y_0]$, f *è continua in* x_0 $[y_0]$.

Osservazioni. I) Se l'ipotesi 2) è soddisfatta anche con $p = 0$, la richiesta che E sia uno spazio metrico diventa superflua.

II) Si può enunciare un teorema analogo sostituendo l'ipotesi «F^y $[F_x]$ *sia una mappa aperta*» con «F^y $[F_x]$ *sia una mappa continua*» e la disuguaglianza che impegna H con la seguente:

$$\exists L' > 1 \text{ tale che } \delta\big(H[u_1, v; x_1, y], H[u_2, v; x_2, y]\big) \geqslant L'\delta(u_1, u_2)\,,$$

$$\big[\delta\big(H[u, v_1; x, y_1], H[u, v_2; x, y_2]\big) \geqslant L'\delta(v_1, v_2)\big]\,.$$

In questo caso l'ipotesi che E sia uno spazio metrico è superflua.

III) Per poter applicare il Teorema 3.2 deve esistere almeno un punto fisso rispetto ad una delle sezioni F_x o F^y. Se questa condizione non è soddisfatta, la continuità di f non segue in generale dalla sua limitatezza, come mostra il seguente controesempio.

Sia $E = (1, 3) \cup (3, 6)$, $N = R$, $A = (1, 3) \times (1, 3)$, $F(x, y) = x + [y] + 1$ (5), $H[u, v; x, y] = u/2$. L'equazione funzionale $(*)$ è in tal caso $f(x + [y] + 1) = \frac{1}{2} f(x)$, $(x, y) \in A$, ed essa ammette fra le sue soluzioni la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è razionale}\,, \\ 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale e } 1 < x < 3\,, \\ \frac{1}{2} & \text{se } x \text{ è irrazionale e } 3 < x < 6\,. \end{cases}$$

IV) Il Teorema 3.2 cessa di essere valido se, ferme restando le altre ipotesi, viene a cadere o l'ipotesi 1) o l'ipotesi 2). Si consideri infatti il seguente controesempio.

Sia $E = N = R$, $F(x, y) = x + [y]$, $H[u, v; x, y] = u$.

L'equazione funzionale $(*)$ è in tal caso $f(x + [y]) = f(x)$ ed essa ammette fra le sue soluzioni la seguente funzione

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ è razionale}\,, \\ 1 & \text{se } x \text{ è irrazionale}\,. \end{cases}$$

V) Considerazioni analoghe a quelle delle Osservazioni III) e IV) val-

---

(5) Con $[y]$ si denota la parte intera di y.

gono anche per i teoremi citati nell'Osservazione II) e per il successivo Teorema 3.3.

Teorema 3.3. *$E = (E, d)$ e $N = (N, \delta)$ siano spazi metrici, A un aperto e f una soluzione di $(*)$. Sia $E_0 = \{x \in E: (x, x) \in A\}$ e $\psi: E_0 \to E$ la funzione data da $\psi(x) = F(x, x)$, $\forall x \in E_0$. Si supponga che:*

1) *ψ sia una mappa aperta,*

2) *esistano costanti L, $0 < L < 1$, e $p \geq 0$ tali che, $\forall x_1, x_2 \in E_0$ e $\forall u_1, u_2 \in N$,*

$$\delta(H[u_1, u_1; x_1, x_1], H[u_2, u_2; x_2, x_2]) \leq L\delta(u_1, u_2) + pd(x_1, x_2) .$$

Allora, se f è limitata in un intorno di un punto x_0 tale che $\psi(x_0) = x_0$, essa è continua in x_0.

Osservazione. Si può enunciare un analogo teorema sostituendo l'ipotesi « *ψ sia una mappa aperta* » con « *ψ sia una mappa continua* » e la disuguaglianza che impegna H con la seguente:

$$\exists L' > 1 \text{ tale che } \delta(H[u_1, u_1; x_1, x_1], H[u_2, u_2; x_2, x_2]) \geq L' \delta(u_1, u_2) .$$

L'ipotesi che E sia uno spazio metrico è in tal caso superflua. Si noti che la equazione di Cauchy soddisfa le ipotesi di quest'ultimo teorema.

Osserviamo ora che per applicare i Teoremi 3.2 e 3.3 si chiede la limitatezza di f in un intorno di un punto (opportuno) di E_1 o E_2 mentre il Teorema 3.1 garantisce la limitatezza di f in un intorno di un punto (imprecisato) di E_3, che non appartiene necessariamente a E_1 o E_2.

Sorge quindi il problema (in generale almeno) di assegnare condizioni sufficienti affinchè dalla limitatezza di f in un intorno di un punto di E_3 si possa dedurre che f è limitata in E_1 o E_2. A questo problema risponde il

Teorema 3.4. *$N = (N, \delta)$ sia uno spazio metrico, A un aperto e f una soluzione di $(*)$. Si supponga che:*

1) *E_3 sia connesso,*

2) *$\forall x \in E_1$, F_x sia una mappa aperta,*

3) *$\forall y \in E_2$, F^y sia una mappa continua e aperta,*

4) *$\forall y \in E_2$ e $\forall v \in N$ la funzione $K: N \times A^y \to N$ definita da $K(u, x) = H[u, v; x, y]$ abbia la seguente proprietà:*

$\forall x \in A^y$, esista un intorno $U_y(x)$ tale che, per ogni $D \subset N \times U_y(x)$, $K(D)$ è limitato se e solo se esiste B limitato, con $D \subset B \times U_y(x)$.

Allora, detto E_0 l'insieme dei punti di E in un intorno dei quali f si mantiene limitata, da $E_0 \cap E_3 \neq \emptyset$ segue $E_0 \supset E_1 \cup E_3$.

Osservazioni. I) Il teorema è valido se, più in generale, si suppone $E_0 \cap (E_1 \cup E_3) \neq \emptyset$.

II) Sussiste un analogo teorema se alle ipotesi riguardanti le variabili x e u si sostituiscono analoghe ipotesi riguardanti le variabili y e v e viceversa.

Rimane ora il problema di garantire la continuità globale a partire dalla continuità in un punto.

Conviene per questo premettere la seguente

Definizione. Si ponga, $\forall (v_0, y_0) \in N \times E_2$, $K(u, x) = H[u, v_0; x, y_0]$. Si supponga che, $\forall u_1 \in N$ e $\forall x_1 \in A^{v_0}$, posto $w_1 = K(u_1, x_1)$, esistano W, U, X, intorni rispettivamente di w_1, u_1, x_1, e una funzione continua $\varphi\colon W \times X \to U$ tali che, $\forall (w, u, x) \in W \times U \times X$, da $w = K(u, x)$ segua $u = \varphi(w, x)$. In tal caso si dirà che la funzione $H = H[u, v; x, y]$ gode della proprietà P_1.

La proprietà P_2 si definisce in modo analogo scambiando i ruoli delle variabili u, x con quello delle variabili v, y.

Si può ora enunciare il seguente

Teorema 3.5. *A sia un aperto e E_1, E_2 siano connessi. Si supponga che, $\forall x \in E_1$ e $\forall y \in E_2$, F_x e F^y siano mappe continue, aperte e localmente biunivoche; inoltre H sia continua e goda delle proprietà P_1 e P_2. Allora, se una soluzione di (*) è continua in un punto, essa è continua su tutto E.*

I teoremi fin qui enunciati mostrano che le proprietà segnalate nell'Introduzione a proposito dell'equazione di Cauchy valgono per equazioni funzionali molto più generali; inoltre tali proprietà, contrariamente a quanto potrebbe essere suggerito dalla stessa equazione di Cauchy, non dipendono affatto dalla presenza negli spazi in esame di una qualunque struttura algebrica, ma solo dalla struttura topologica e di misura degli stessi.

Concludiamo questo paragrafo enunciando, a titolo d'esempio, il seguente semplice corollario valido negli spazi euclidei.

Corollario 3.1. *E sia un aperto di R^n, A un aperto convesso e $N = R^m$. Si supponga che:*

1) *F sia di classe C^1, le applicazioni derivate F'_x e F'_y siano non singolari ed esista $(x_0, y_0) \in A$ con $F(x_0, y_0) = x_0$,*

2) *H sia di classe C^1, le applicazioni derivate H'_u e H'_v siano non singolari ed esistano costanti L, $0 < L < 1$, e $p \geq 0$ tali che $\|H'_x\| \leq p$ e $\|H'_u\| \leq L$ uniformemente rispetto alle altre variabili.*

Allora, se f è una soluzione di $(*)$ che sia misurabile secondo Lebesgue [6] *o limitata su un insieme di misura positiva, f è continua su tutto E.*

4. - Misurabilità, limitatezza e continuità puntuale.

Dimostrazione del Teorema 3.1. Sia

$$v_0 \in N\,, \qquad S(v_0, n) = \{v \in N\colon \delta(v, v_0) < n\} \qquad \text{e} \qquad G_n = f^{-1}(S(v_0, n))\,.$$

Per la misurabilità di f, $G_n \in \mathscr{M}$; inoltre $G_n \uparrow E$ e quindi $G_n \cap U \uparrow U$ e $G_n \cap V \uparrow V$. Ne segue che esiste un indice $\bar{n}$ per il quale $\mu(G_{\bar{n}} \cap U) > 0$ e $\mu(G_{\bar{n}} \cap V) > 0$. Detti $R = G_{\bar{n}} \cap U$ e $S = G_{\bar{n}} \cap V$, poichè μ è una misura di STEINHAUS per F, $F(R \times S)$ ha interno non vuoto ed essendo f limitata su R e S, per la 2) f è limitata anche su $F(R \times S) \subset E_3$.

Il Teorema 3.2 e la relativa Osservazione II) sono conseguenza immediata dei seguenti più generali Teoremi 4.1 e 4.2.

Teorema 4.1 [7]. *$E = (E, d)$ e $N = (N, \delta)$ siano spazi metrici e f sia una soluzione di $(*)$. Si supponga che esistano un punto $(x_0, y_0) \in A$, un intorno $U(x_0)$ di x_0 in E e due costanti L, $0 < L < 1$, e $p \geqslant 0$ tali che:*

1) *F^{y_0} sia definita in $U(x_0)$ e aperta in x_0* [8]*; inoltre sia $F^{y_0}(x_0) = x_0$,*

2) *$\forall x \in U(x_0)$ e $\forall u \in N$,*

$$\delta(H[u, f(y_0); x, y_0], H[f(x_0), f(y_0); x_0, y_0]) \leqslant L\delta(u, f(x_0)) + pd(x, x_0)\,.$$

Allora, se f è limitata in un intorno di x_0, essa è continua in x_0.

Dimostrazione. Possiamo sempre supporre f limitata in $U(x_0)$: sia

$$M = \sup_{x \in U(x_0)} \delta(f(x), f(x_0))\,.$$

Posto

$$\forall \varrho > 0\,, \qquad S(x_0, \varrho) = \{x \in E\colon d(x, x_0) < \varrho\}$$

---

(6) Si tenga presente che, essendo la misura di LEBESGUE il completamento della misura di BOREL, se quest'ultima è una misura di STEINHAUS per F, lo è anche la misura di LEBESGUE.

(7) Vale un teorema analogo se alle ipotesi riguardanti le variabili x e u si sostituiscono analoghe ipotesi riguardanti le variabili y e v e viceversa. Lo stesso si può dire anche per il successivo Teorema 4.2.

(8) Sia $g\colon X \to Y$ con X e Y spazi topologici. Si dirà che g è aperta in $a \in X$ se, per ogni intorno V di a, $g(V)$ contiene un intorno di $g(a)$.

sia r_0 tale che $S(x_0, r_0) \subset U(x_0)$; per la 1), $\forall n \geqslant 1$, n intero, esiste allora r_n, con $0 < r_n < L r_{n-1}$, tale che $S(x_0, r_n) \subset F^{y_0}(S(x_0, r_{n-1}))$. Posto

$$\omega_n = \operatorname*{Sup}_{x \in S(x_0, r_n)} \delta(f(x), f(x_0)) ,$$

vogliamo mostrare che, $\forall n \geqslant 0$,

$$(\circ) \qquad \omega_n \leqslant L^{n-1}(LM + p r_0 n) .$$

Procediamo per induzione. La $(\circ)$ è vera per $n = 0$ perchè $S(x_0, r_0) \subset U(x_0)$. Supposta la $(\circ)$ vera per $n-1$, dimostriamola per n. Sia $x \in S(x_0, r_n)$ qualsiasi: esiste allora $\bar{x} \in S(x_0, r_{n-1})$ tale che $x = F(\bar{x}, y_0)$. Ne segue, per la 2),

$$\delta(f(x), f(x_0)) = \delta(H[f(\bar{x}), f(y_0); \bar{x}, y_0], H[f(x_0), f(y_0); x_0, y_0]) \leqslant$$

$$\leqslant L\delta(f(\bar{x}), f(x_0)) + p d(\bar{x}, x_0) \leqslant L\omega_{n-1} + p L^{n-1} r_0 \leqslant L^{n-1}(LM + p r_0 n)$$

e quindi la $(\circ)$ è vera per n.

Essendo $L < 1$, il secondo membro della $(\circ)$ tende a 0 per $n \to +\infty$; perciò f è continua nel punto x_0.

Teorema 4.2. *$N = (N, \delta)$ sia uno spazio metrico e f sia una soluzione di $(*)$. Si supponga che esistono un punto $(x_0, y_0) \in A$, un intorno $U(x_0)$ di x_0 in E e una costante $L' > 1$, tali che:*

1) *F^{y_0} sia definita in $U(x_0)$ e continua in x_0; inoltre sia $F^{y_0}(x_0) = x_0$,*

2) *$\forall x \in U(x_0)$ e $\forall u \in N$,*

$$\delta(H[u, f(y_0); x, y_0], H[f(x_0), f(y_0); x_0, y_0]) \geqslant L' \delta(u, f(x_0)) .$$

Allora, se f è limitata in un intorno di x_0, essa è continua in x_0.

Dimostrazione. Si può sempre supporre f limitata in $U(x_0)$: sia

$$M = \operatorname*{Sup}_{x \in U(x_0)} \delta(f(x), f(x_0)) .$$

Si definisca ora una successione di intorni di x_0, $\{U_n(x_0)\}$, nel modo seguente:

$$U_0(x_0) = U(x_0) , \qquad U_n(x_0) = (F^{y_0})^{-1}(U_{n-1}(x_0)) , \qquad n \geqslant 1 .$$

Allora, posto $\omega_n = \sup\limits_{x \in U_n(x_0)} \delta(f(x), f(x_0))$, vogliamo mostrare che:

$$(\circ\circ) \qquad \omega_n \leqslant M/(L')^n, \qquad n \geqslant 0 .$$

Si procede per induzione. La $(\circ\circ)$ è vera per ipotesi per $n = 0$; supposta la $(\circ\circ)$ vera per $n-1$, la si dimostra per n.

Sia infatti $x \in U_n(x_0)$; allora $F(x, y_0) \in U_{n-1}(x_0)$ e, per la 2), si ha:

$$\omega_{n-1} \geqslant \delta(f[F(x, y_0)], f(x_0)) =$$
$$= \delta(H[f(x), f(y_0); x, y_0], H[f(x_0), f(y_0); x_0, y_0]) \geqslant L' \delta(f(x), f(x_0)) .$$

Perciò $\omega_n \leqslant \omega_{n-1}/L' \leqslant M/(L')^n$.

Poichè $\omega_n \to 0$ per $n \to +\infty$, ne segue che f è continua in x_0.

Procedendo in modo analogo si possono dimostrare il seguente Teorema 4.3 e la successiva Osservazione; da essi seguono immediatamente il Teorema 3.3 e la relativa Osservazione.

Teorema 4.3. *$E = (E, d)$ e $N = (N, \delta)$ siano spazi metrici e f sia una soluzione di $(*)$. Si supponga che esistano un punto $(x_0, x_0) \in A$, un intorno $U(x_0)$ di x_0 in E e delle costanti L, $0 < L < 1$, e $p \geqslant 0$ tali che:*

1) *la funzione $\psi(x) = F(x, x)$ sia definita in $U(x_0)$ e aperta in x_0; inoltre sia $\psi(x_0) = x_0$,*

2) *$\forall x \in U(x_0)$ e $\forall u \in N$,*

$$\delta(H[u, u; x, x], H[f(x_0), f(x_0); x_0, x_0]) \leqslant L\delta(u, f(x_0)) + pd(x, x_0) .$$

Allora, se f è limitata in un intorno di x_0, essa è continua in x_0.

Osservazione. Vale un teorema analogo se si sostituisce l'ipotesi « *$\psi(x)$ aperta in x_0* » con « *$\psi(x)$ continua in x_0* » e la disuguaglianza che impegna H con la seguente:

$$\exists L' > 1 \text{ tale che } \delta(H[u, u; x, x], H[f(x_0), f(x_0); x_0, x_0]) \geqslant L' \delta(u, f(x_0)) .$$

L'ipotesi che E sia uno spazio metrico è in tal caso superflua.

Dimostrazione del Teorema 3.4. Supposto di aver dimostrato che $E_0 \supset E_3$, ne segue $E_0 \supset E_1$.

Sia infatti $x_0 \in E_1$; scelto $y_0 \in A_{x_0}$ si ha $z_0 = F(x_0, y_0) \in E_3$ ed esiste perciò un intorno V di z_0 in cui f si mantiene limitata. Per la 3),

$$U = U_{y_0}(x_0) \cap (F^{y_0})^{-1}(V)$$

è un intorno di x_0 e,

$$\forall x \in U\,, \qquad F(x, y_0) \in V \quad \text{e} \quad f[F(x, y_0)] = H[f(x), f(y_0); x, y_0] = K[f(x), x]\,.$$

Posto

$$D = \{(f(x), x) \quad : \quad x \in U\}\,,$$

dalla 4), essendo $K(D)$ limitato, segue che $\{f(x): x \in U\}$ è limitato e quindi $x_0 \in E_0$.

Dimostriamo ora che $E_0 \supset E_3$. Per ipotesi $E_0 \cap E_3 \neq \emptyset$ (9); inoltre E_0, data la sua definizione, è un aperto e perciò $E_0 \cap E_3$ è aperto in E_3. Se si dimostra quindi che $E_0 \cap E_3$ è chiuso in E_3, dalla 1) segue $E_0 \supset E_3$. Sia $\bar{z} \in E_3$ un punto di accumulazione per E_0; $\bar{z} = F(\bar{x}, \bar{y})$. Dalla 2) e dal fatto che A è un aperto segue che $F_{\bar{x}}(A_{\bar{x}})$ è un aperto contenente $\bar{z}$; in tale aperto cadrà perciò almeno un punto $z = F(\bar{x}, y) \in E_0$. Sia $V(z)$ un intorno di z in cui f è limitata; ragionando come sopra si può concludere che $(F^y)^{-1}(V(z))$ contiene un intorno di $\bar{x}$ sul quale f è limitata. Poichè $\bar{z} = F(\bar{x}, \bar{y})$, segue allora dalle 3) e 4) che f è limitata in un intorno di $\bar{z}$ e quindi $\bar{z} \in E_0$:

5. - Continuità puntuale e continuità globale.

Prima di dimostrare il Teorema 3.5 è opportuno premettere i seguenti Teoremi 5.1 e 5.2 e i relativi Corollari.

Teorema 5.1 (10). *Sia f una soluzione di $(*)$ e sia $(x_0, y_0) \in A$ un punto tale che:*

1) *F_{x_0} sia aperta in y_0 e localmente biunivoca in y_0* (11),

(9) Se si parte dall'ipotesi che $E_0 \cap (E_1 \cup E_3) \neq \emptyset$ (si veda l'Osservazione I) dopo il Teorema 3.4), si può concludere lo stesso, per l'ipotesi 4), che $E_0 \cap E_3 \neq \emptyset$.

(10) Accanto a ciascun teorema del presente paragrafo se ne può enunciare uno simmetrico sostituendo le ipotesi riguardanti le variabili x e u con analoghe ipotesi riguardanti le variabili y e v e viceversa.

(11) Sia $g: X \to Y$ con X e Y spazi topologici. Si dirà che g è localmente biunivoca in $a \in X$ se esiste un intorno V di a tale che g/V sia biunivoca.

2) *la funzione* $K[v, y] = H[f(x_0), v; x_0, y]$ *sia continua nel punto* $(v, y) = (f(y_0), y_0)$.

Allora, se f *è continua in* y_0, *essa è continua anche nel punto* $F(x_0, y_0)$.

Osservazioni. I) Se le ipotesi 1) e 2) sono soddisfatte per ogni $x \in A^{y_0}$, la continuità di f è garantita sull'insieme $F^{y_0}(A^{y_0})$. In particolare, se $F^{y_0}(A^{y_0}) = E$, f risulta continua ovunque; questo si verifica, ad esempio, tutte le volte che (come nel caso dell'equazione di CAUCHY) esiste $y_0 \in E_2$ tale che, $\forall x \in E$, $F(x, y_0) = x$.

II) L'ipotesi 1) può essere sostituita con la seguente più generale ipotesi: « *per ogni rete* $\{z_\alpha\}$ *convergente a* $z_0 = F(x_0, y_0)$ *esista una rete* $\{y_\alpha\}$, *con* $z_\alpha = F(x_0, y_\alpha)$, *convergente a* y_0 ».

Si pensi ad esempio alla funzione $f\colon [0, a) \to R$ così definita: $f(x) = \operatorname{sen} 1/x$ per $0 < x < a$, $f(0) = 0$. Tale funzione è aperta in $y_0 = 0$, ma non è localmente biunivoca in tale punto; tuttavia essa soddisfa l'ipotesi sopra scritta.

Dimostrazione. Per la 1) esiste un intorno $U(y_0)$ di y_0 in A_{x_0} tale che la funzione $\varphi = F_{x_0}/U(y_0)$ sia biunivoca e porti intorni di y_0 in intorni di $z_0 = F(x_0, y_0)$. Si ponga $V(z_0) = \varphi(U(y_0))$ e sia $\psi = \varphi^{-1}\colon V(z_0) \to U(y_0)$. Per la 1) ψ è continua in z_0 e $\psi(z_0) = y_0$; inoltre, $\forall z \in V(z_0)$, si ha $z = \varphi(\psi(z)) = F(x_0, \psi(z))$. Allora $f(z) = H[f(x_0), f(\psi(z)); x_0, \psi(z)]$; per la 2) e per il fatto che ψ è continua in z_0 e f è continua in y_0, segue che f è continua in z_0.

Si consideri ora la seguente successione monotona di insiemi $S_n(y_0)$:

$$S_0(y_0) = \{y_0\}\,, \qquad S_n(y_0) = S_{n-1}(y_0) \cup F\big(A \cap (E_1 \times S_{n-1}(y_0))\big) \qquad n = 1, 2, \dots\,,$$

e sia

$$S(y_0) = \lim_n S_n(y_0)\,.$$

Dal Teorema 5.1 e dalla relativa Osservazione I) segue immediatamente il seguente

Corollario 5.1. *Si supponga che,* $\forall x \in E_1$, $F_x\colon A_x \to E$ *sia una mappa aperta e localmente biunivoca; inoltre* H *sia continua nel complesso della seconda e quarta variabile. Allora, se una soluzione* f *di* $(*)$ *è continua in un punto* $y_0 \in E_2$, *essa è continua in* $S(y_0)$.

Se si pone $T_n(y_0) = S_n(y_0) \cap E_2$, $n = 0, 1, \dots$ e $T(y_0) = S(y_0) \cap E_2$, si ottiene immediatamente

$$\big[F(A \cap (E_1 \times T(y_0)))\big] \cap E_2 = \\ = \bigcup_0^\infty \big[F\big(A \cap (E_1 \times T_n(y_0))\big)\big] \cap E_2 \subset \bigcup_0^\infty T_{n+1}(y_0) = T(y_0)\,.$$

Ne segue allora il seguente

Corollario 5.2. *Siano soddisfatte le ipotesi del Corollario* 5.1; *inoltre, non esista alcun sottoinsieme proprio non vuoto* $U \subset E_2$ *per il quale*

$$[F(A \cap (E_1 \times U))] \cap E_2 \subset U .$$

In tal caso, una soluzione di $(*)$, *continua in un punto* $y_0 \in E_2$, *è continua su tutto* E_2.

Osservazioni. I) La condizione che compare in questo Corollario può essere soddisfatta solo se $E_2 \subset E_3$; negli altri casi è infatti semplice trovare un insieme proprio e non vuoto $U \subset E_2$ per il quale $[F(A \cap (E_1 \times U))] \cap E_2 \subset U$.

II) Si consideri il caso in cui $A = E \times E$; l'ipotesi del Corollario equivale allora alla richiesta che non esista alcun sottoinsieme proprio non vuoto $U \subset E$ per il quale $F(E \times U) \subset U$. Inoltre, se, $\forall x \in E$, $F(x, x) = x$, basta che non esista alcun insieme proprio non vuoto $U \subset E$, per il quale $F(E \times U) = U$.

Qualora, oltre alle ipotesi del Corollario 5.1, siano soddisfatte le analoghe ipotesi che impegnano le rimanenti variabili (si veda la nota ([10]) a piè di pagina), basta che non esista alcun *aperto* proprio e non vuoto U per il quale $F((E \times U) \cup (U \times E)) \subset U$.

Esempio. Sia $E = \langle a, b \rangle$ e $F: E \times E \to E$ una funzione di classe C^1, con $f'_x, f'_y \neq 0$ e per la quale $F(x, x) = x$. In tal caso è facile verificare che non esiste alcun aperto proprio non vuoto U per il quale $F((E \times U) \cup (U \times E)) = U$. Perciò, tenendo conto dell'Osservazione II), se H è una funzione continua, ogni soluzione di $(*)$ continua in un punto è continua su tutto E.

Le considerazioni fin qui svolte mostrano come, dalla continuità di f in punti di E_2 (o di E_1) si possa dedurre la continuità di f in punti di E_3: precisamente, la continuità di f in un punto $y_0 \in E_2$ implica la continuità di f in punti $z \in E_3$ del tipo $z = F(x, y_0)$; in generale non se ne può però dedurre la continuità di f anche in x. Il teorema che segue fornisce condizioni nelle quali è valida anche questa ultima conclusione.

Teorema 5.2. *Siano:* f *una soluzione di* $(*)$, $(x_0, y_0) \in A$ *e* $w_0 = H[f(x_0), f(y_0); x_0, y_0]$. *Si supponga che esistano un intorno* U *di* x_0 *in* E, *un intorno* W *di* w_0 *e una funzione* $\varphi: W \times U \to N$ *continua in* (w_0, x_0), *tali che:*

1) F^{y_0} *sia definita in* U *e sia continua in* x_0,
2) $\forall x \in U$ *e* $\forall w \in W$, $H[u, f(y_0); x, y_0] = w \Rightarrow u = \varphi(w, x)$.

In tali ipotesi, se f *è continua in* $F(x_0, y_0)$, *è continua anche in* x_0.

Osservazione. Se, $\forall x \in A^{y_0}$, valgono le ipotesi dei Teoremi 5.1 e 5.2, allora dalla continuità di f in y_0 se ne deduce la sua continuità in $\{y_0\} \cup A^{y_0} \cup F^{y_0}(A^{y_0})$.

Dimostrazione. $\forall x \in U$ si ha $f[F(x, y_0)] = H[f(x), f(y_0); x, y_0]$ e, in particolare, $f[F(x_0, y_0)] = w_0$. Per ipotesi, F^{y_0} è continua in x_0 e f è continua in $F(x_0, y_0)$; perciò esiste un intorno U_1 di x_0, $U_1 \subset U$, tale che, $\forall x \in U_1$, $f[F(x, y_0)] \in W$. Per tali x si ha allora, per la 2), $f(x) = \varphi(f[F(x, y_0)], x)$ e dalla continuità di φ segue l'asserto.

Da questo teorema, ricordando la definizione della proprietà P_1 e il Corollario 5.1, segue il seguente

Corollario 5.3. *Sia $A = E \times E$. Si supponga che:*

1) $\forall t \in E$, F^t *sia una funzione continua e* F_t *sia una funzione aperta e localmente biunivoca,*

2) H *sia continua rispetto al complesso della seconda e quarta variabile e goda della proprietà* P_1.

Allora, se una soluzione di (∗) *è continua in un punto, essa è continua su tutto* E.

Possiamo ora dimostrare il Teorema 3.5 che garantisce, nel caso generale, la continuità delle soluzioni di (∗) su tutto E a partire dalla loro continuità in un sol punto.

Dimostrazione del Teorema 3.5. Basta dimostrare che f è continua in tutti i punti di $E_1 \cup E_2$ perchè, dal Teorema 5.1, segue automaticamente la continuità di f nei punti di E_3; inoltre, data la simmetria nelle ipotesi, è sufficiente mostrare che f è continua in E_2. Si indichi con B_i $(i = 1, 2, 3)$ l'insieme dei punti di E_i in cui f è continua. Essendo soddisfatte tutte le ipotesi dei Teoremi 5.1 e 5.2 e dei loro simmetrici (si veda la nota ([10]) a piè di pagina), si può sempre affermare che, dovunque sia il punto nel quale si suppone f continua, B_2 è un aperto non vuoto. Poichè E_2 è connesso, detta B_2^* la frontiera di B_2, basta dimostrare che $B_2^* = \emptyset$.

Si ragiona per assurdo. Si supponga $y_0 \in B_2^*$ e sia $x_0 \in A^{y_0}$. Poichè A è aperto, esistono aperti U e V tali che $(x_0, y_0) \in U \times V \subset A$; inoltre, poichè $y_0 \in B_2^*$, in ogni intorno di y_0 cade almeno un punto $\bar{y}$ di B_2. Per tale $\bar{y}$, che possiamo sempre supporre contenuto in V, si ha $F^{\bar{y}}(U) \subset B_3$ in virtù del Teorema 5.1 mentre, per il simmetrico del Teorema 5.2, $F^{y_0}(U) \cap B_3 = \emptyset$.

Ma $F^{y_0}(U)$ è un aperto e $F^{y_0}(x_0) = F(x_0, y_0)$ vi appartiene; per la continuità di F_{x_0} esiste allora un intorno V_1 di y_0 tale che, $\forall y \in V_1$, $F(x_0, y) \notin B_3$. Questo è in contrasto con l'affermazione sopra fatta circa l'esistenza di almeno un $\bar{y} \in V_1$ per il quale $F^{\bar{y}}(U) \subset B_3$. Ne segue l'asserto.

Bibliografia.

[1] J. ACZEL, *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press, New York - London 1966.

[2] M. E. KUCZMA - M. KUCZMA, *An elementary proof and an extension of a theorem of Steinhaus*, Glasnik Mat. (26) **6** (1971), 11-18.

[3] M. KUCZMA e J. SMITAL, *On measures connected with the Cauchy equation* (in corso di stampa).

[4] L. PAGANONI, *Una estensione di un teorema di Steinhaus*, Istituto Lombardo (Rend. Sc.) A **108** (1974), 262-273.

[5] L. PAGANONI, *Unicità delle soluzioni di una certa classe di equazioni funzionali*, Rend. Ist. Mat., Univ. Trieste **6** (1974).

[6] H. STEINHAUS, *Sur les distances des points dans les ensembles de mesure positive*, Fund. Math. **1** (1920), 93-104.

Summary.

It is known that every measurable or bounded solution $f: R \to R$ *of the Cauchy equation* $f(x+y) = f(x) + f(y)$ *is continuous. In this paper is shown that the same propertie is true, in a general case, for the solutions of the functional equation* $f[F(x,y)] = H[f(x), f(y); x, y]$.

* * *