Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 163-168

DARIO GRAFFI (*)

# Sull'integrazione approssimata di un'equazione differenziale non-lineare. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75º compleanno.

1. – In questo lavoro studiamo l'equazione differenziale nel vettore $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$, funzione della variabile $t$ che identifichiamo con il tempo:

$$\ddot{\boldsymbol{u}} - q\boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{u}} = \varepsilon \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}) . \tag{1}$$

Il vettore $\boldsymbol{u}$ si suppone appartenente ad un piano $\pi$, $\boldsymbol{k}$ è un versore normale a $\pi$, $q$ e $\varepsilon$ due costanti positive, la seconda da considerarsi molto piccola, infine $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ è un vettore funzione, in generale, non lineare di $\boldsymbol{u}$. La (1) si incontra in alcune questioni di meccanica non-lineare, per esempio nello studio del moto piano di un corpuscolo elettrico soggetto ad un campo magnetico e a un debole campo elettrico piano.

Sotto ipotesi che esporremo fra breve, proveremo che per $t \in (0, L/\varepsilon)$, con $L$ numero positivo prefissato, la soluzione di (1) è approssimata, con un errore dell'ordine di $\varepsilon$, dalla soluzione dell'equazione:

$$- q\boldsymbol{k} \times \dot{\boldsymbol{u}}_1 = \varepsilon \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1) \tag{2}$$

con $\boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{u}(0)$, cioè è lecito trascurare nella (1) la derivata seconda di $\boldsymbol{u}$. Ossia l'equazione (1) del secondo ordine si riduce ad una del primo ordine, ovviamente di più facile studio.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «Salvatore Pincherle», Piazza di Porta S. Donato 5, 40127 Bologna, Italia.
(**) Ricevuto: 11-X-1973.

Le ipotesi per la valisità del teorema enunciato sono le seguenti. Anzitutto $\dot{\boldsymbol{u}}(0)$, derivata di $\boldsymbol{u}$ per $t=0$, si suppone dell'ordine di $\varepsilon$, cioè:

$$\dot{\boldsymbol{u}}(0)=\varepsilon\boldsymbol{w} \tag{3}$$

dove $\boldsymbol{w}$ è un vettore indipendente da $\varepsilon$ (in particolare potrebbe essere $\boldsymbol{w}=0$). Supposto poi, il che non è affatto restrittivo (basta solo un cambiamento di incognita per ridursi a questo caso) $\boldsymbol{u}(0)=\boldsymbol{u}_1(0)=0$, ammetteremo $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ derivabile rispetto a $\boldsymbol{u}$ per ogni $\boldsymbol{u}$ finito, cioè esista la trasformazione lineare (o omografia vettoriale) $\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})/\mathrm{d}\boldsymbol{u}$. Ammesso questa trasformazione continua per ogni $\boldsymbol{u}$, la $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$ sarà Lipschitziana, cioè sarà, per ogni coppia di vettori $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'$:

$$|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}')-\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}')|<N|\boldsymbol{u}'| \tag{4}$$

dove $N$ è un numero positivo. Se $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}'$ sono in modulo minori di un certo numero $\ell$, $N$ dipenderà, fissato s'intende $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u})$, solo da $\ell$.

Infine ammetteremo che, per $t\in[0,\infty)$, esista $\boldsymbol{u}_1(t)$ limitato. Questa ipotesi si potrebbe eliminare con altre meno restrittive, comunque diventa superflua se si desidera l'approssimazione $\boldsymbol{u}_1$ di $\boldsymbol{u}$ valida per un intervallo ampio quanto si vuole, ma indipendente da $\varepsilon$; basta in questo caso che $\boldsymbol{u}_1(t)$ sia limitato in questo intervallo.

**2.** – Cominciamo con esporre alcune proprietà dell'equazione vettoriale, nel vettore del piano $\pi$, $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(t)$:

$$\ddot{\boldsymbol{v}}-q\boldsymbol{k}\times\dot{\boldsymbol{v}}=\boldsymbol{H}(t) \tag{5}$$

dove $\boldsymbol{H}(t)$ è un vettore del piano $\pi$, funzione di $t$.

Se $\boldsymbol{H}(t)\equiv 0$ si ha, integrando (5):

$$\dot{\boldsymbol{v}}-q\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{c} \tag{6}$$

dove $\boldsymbol{c}$ è un vettore costante di $\pi$.

La soluzione generale di (6) si può mettere nella forma ($\boldsymbol{a}$ indica un vettore qualsiasi di $\pi$):

$$\boldsymbol{v}=\cos qt\,\boldsymbol{a}+\operatorname{sen} qt\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}+\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{c}}{q} \tag{7}$$

Infatti derivando (7), tenendo presente $\boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}) = -\boldsymbol{a}$ e che identica formula vale sostituendo $\boldsymbol{c}$ ad $\boldsymbol{a}$:

$$\dot{\boldsymbol{v}} = -q \operatorname{sen} qt\, \boldsymbol{a} + q \cos qt\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a} = \tag{8}$$

$$= q\boldsymbol{k}\times[\cos qt\, \boldsymbol{a} + \operatorname{sen} qt\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a}] = q\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} - \boldsymbol{k}\times(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{c})$$

conforme a (6).

Passiamo ora a (5) supponendo $\boldsymbol{v}(0) = \dot{\boldsymbol{v}}(0) = 0$. Si ha, integrando da 0 a $t$:

$$\dot{\boldsymbol{v}} - q\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v} = \int_0^t \boldsymbol{H}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{9}$$

Perciò la soluzione di (5), ossia di (9), che si annulla per $t = 0$, è:

$$\boldsymbol{v}(t) = \int_0^t [(\cos q(t-\tau) + \operatorname{sen} q(t-\tau)\,\boldsymbol{k}\times) \int_0^\tau \boldsymbol{H}(\xi)\,\mathrm{d}\xi]\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{10}$$

Infatti, derivando e ripetendo i calcoli che hanno condotto a (8), si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{v}}(t) &= \int_0^t \boldsymbol{H}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + \int_0^t q\,\boldsymbol{k}\times[(\cos q(t-\tau) + \operatorname{sen} q(t-\tau)\,\boldsymbol{k}\times) \int_0^\tau \boldsymbol{H}(\xi)\,\mathrm{d}\xi]\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \int_0^t \boldsymbol{H}(\xi)\,\mathrm{d}\xi + q\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{v}(t) \end{aligned}\right. \tag{11}$$

conforme a (9).

Ora si noti che con una inversione dell'ordine delle integrazioni, si ha:

$$\left\{\begin{aligned} \boldsymbol{v}(t) &= \int_0^t \mathrm{d}\xi\, \boldsymbol{H}(\xi) \int_\xi^t (\cos q(t-\tau) + \operatorname{sen} q(t-\tau)\,\boldsymbol{k}\times)\,\mathrm{d}\tau = \\ &= \frac{1}{q}\int_0^t [\operatorname{sen} q(t-\xi) + (1-\cos q(t-\xi))\,\boldsymbol{k}\times]\,\boldsymbol{H}(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,. \end{aligned}\right. \tag{12}$$

Perciò:

$$|\boldsymbol{v}(t)| \leq \frac{3}{q}\int_0^t |\boldsymbol{H}(\xi)|\,\mathrm{d}\xi\,. \tag{13}$$

Si ha così un valore maggiorante per $|\boldsymbol{v}(t)|$ qualora i suoi valori iniziali siano nulli.

**3.** – Ciò premesso poniamo:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}' \,, \tag{14}$$

$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_1(t)$ è, come si è detto, la soluzione di (2) con $\boldsymbol{u}_1(0) = 0$.

È bene notare che la (2) si può scrivere, dopo una moltiplicazione per $\boldsymbol{k}\times$:

$$\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{\varepsilon}{q}\, \boldsymbol{k}\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1) \,. \tag{15}$$

La $\boldsymbol{u}_2$ è una soluzione di (5), con $\boldsymbol{H}(t) = 0$, espressa da (7) e con condizioni iniziali $\boldsymbol{u}_2(0) = 0$, $\dot{\boldsymbol{u}}_2(0) = \dot{\boldsymbol{u}}(0) - \dot{\boldsymbol{u}}_1(0)$. Perciò i vettori $\boldsymbol{c}$ e $\boldsymbol{a}$ che compaiono nella (7) si determinano mediante le equazioni:

$$\frac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{c}}{q} + \boldsymbol{a} = 0 \,; \qquad q\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{u}}(0) - \dot{\boldsymbol{u}}_1(0) \tag{16}$$

cioè

$$\boldsymbol{a} = \frac{\dot{\boldsymbol{u}}(0) - \dot{\boldsymbol{u}}_1(0)}{q} \times\boldsymbol{k} \,, \qquad \boldsymbol{c} = q\,\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{u}}(0) - \dot{\boldsymbol{u}}_1(0) \,. \tag{17}$$

Ora, per la (3) e per la (15), $\dot{\boldsymbol{u}}(0)$ e $\dot{\boldsymbol{u}}_1(0)$ sono dell'ordine di $\varepsilon$, tale sarà perciò per ogni $t$, $\boldsymbol{u}_2(t)$, quindi $|\boldsymbol{u}_2(t)|$ sarà maggiorato da $m\varepsilon$ dove $m$ è un numero positivo.

Sostituiamo ora la (14) nella (1); si ha, ricordando che $\boldsymbol{u}_1$ soddisfa a (2), che $\boldsymbol{u}_2$ soddisfa a (5) con $\boldsymbol{H}(t) = 0$:

$$\ddot{\boldsymbol{u}}' - q\boldsymbol{k}\times\dot{\boldsymbol{u}}' = \varepsilon[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}') - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)] - \ddot{\boldsymbol{u}}_1 \,. \tag{18}$$

Ora poniamo ($\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}'$ si considerano come funzioni di $t$):

$$\boldsymbol{H}(t) = \varepsilon[\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}') - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)] - \ddot{\boldsymbol{u}}_1 \,. \tag{19}$$

Poichè $\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}_1(0) = \boldsymbol{u}_2(0) = 0$ si ha subito, per (14), $\boldsymbol{u}'(0) = 0$. Si ha poi, ricordando il valore di $\dot{\boldsymbol{u}}_2(0)$: $\dot{\boldsymbol{u}}'(0) = \dot{\boldsymbol{u}}(0) - \dot{\boldsymbol{u}}_1(0) - \dot{\boldsymbol{u}}_2(0) = 0$, cioè per $|\boldsymbol{u}'|$ vale la limitazione (13). Cerchiamo ora un valore maggiorante per $\boldsymbol{H}(t)$ come espressa da (19).

A questo scopo osserviamo intanto che, essendo $\boldsymbol{u}'(0) = 0$, esisterà un intervallo $[0, h]$ ($h > 0$) tale che per $t \in [0, h]$ sarà $|\boldsymbol{u}'(t)| \leqslant \eta$, dove $\eta$ è un numero positivo prefissato che conviene prendere abbastanza piccolo. Allora detto $t_1$ il più piccolo fra $h$ e $L/\varepsilon$, per $t \in [0, t_1]$, $\boldsymbol{u}_1$, $\boldsymbol{u}_2$ e $\boldsymbol{u}'$ sono limitate, quindi vale la (4) con un valore di $N$ che, almeno teoricamente, non è difficile determinare. Ora si ha, ricordando poi $|\boldsymbol{u}_2(t)| < m\varepsilon$

$$
(20) \quad \left\{ \begin{aligned} & \varepsilon|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}') - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)| \leqslant \varepsilon|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}') - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2)| + \\ & \qquad + \varepsilon|\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)| \leqslant \varepsilon N|\boldsymbol{u}'| + \varepsilon^2 Nm\,. \end{aligned} \right.
$$

Si ha poi, derivando (15):

$$
(21) \qquad \ddot{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{\varepsilon}{q}\boldsymbol{k} \times \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}\dot{\boldsymbol{u}}_1 = \frac{\varepsilon^2}{q}\boldsymbol{k} \times \left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)}{\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1}\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)\right)
$$

e poichè $\mathrm{d}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)/\mathrm{d}\boldsymbol{u}_1$ e $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{u}_1)$ è per $t \in [0, t_1]$ limitata, esiste un numero $m'$ tale che:

$$
(22) \qquad |\ddot{\boldsymbol{u}}_1| \leqslant m'\varepsilon^2
$$

Quindi, posto $Nm + m' = M$ si ha:

$$
(23) \qquad |\boldsymbol{H}(t)| \leqslant \varepsilon N|\boldsymbol{u}'| + M\varepsilon^2
$$

e sostituendo nella (13), tenendo conto che $t \leqslant t_1 \leqslant L/\varepsilon$

$$
(24) \qquad |\boldsymbol{u}'| \leqslant \frac{3N}{q}\varepsilon\int_0^t |\boldsymbol{u}'|\,\mathrm{d}t + \frac{3}{q}ML\varepsilon
$$

e per il lemma di GRONWALL:

$$
(25) \qquad |\boldsymbol{u}'| \leqslant \frac{3}{q}ML\varepsilon \exp\frac{3NL}{q}
$$

Questa relazione vale per $t \in [0, t_1]$, ma con opportuna scelta di $\varepsilon$ vale in tutto $[0, L/\varepsilon)$. Si scelga infatti $\varepsilon < \varepsilon_0$ con

$$
(26) \qquad \frac{3}{q}ML\varepsilon_0 \exp\frac{3NL}{q} = \eta\,.
$$

Allora, con ragionamento da me fatto varie volte, si dimostra che $h \geqslant L/\varepsilon$ (1), perciò per $\varepsilon < \varepsilon_0$ la (25) vale, come si è detto, in tutto $[0, L/\varepsilon)$; in altre parole $|\boldsymbol{u}'|$ è dell'ordine di $\varepsilon$ in tutto $[0, L/\varepsilon)$.

Poichè lo stesso vale per $\boldsymbol{u}_2$, si può concludere, come si era affermato in principio, $\boldsymbol{u}(t)$ approssimato in $[0, L/\varepsilon)$ da $\boldsymbol{u}_1$ con un errore dell'ordine di $\varepsilon$, errore di cui non è difficile calcolare un valore maggiorante.

Se si vuole che $\boldsymbol{u}$ differisca da $\boldsymbol{u}_1$ per un intervallo $[0, L]$, $L$ grande quanto si vuole, ma indipendente da $\varepsilon$, è, come si è detto in principio, solo necessaria l'ipotesi $\boldsymbol{u}_1(t)$ limitata per $t \in [0, L]$. In questo caso l'ultimo termine di (24) diventa $(3ML/q)\varepsilon^2$ e la (25) diventa:

$$(25') \qquad |\boldsymbol{u}'| < \frac{3ML}{q}\,\varepsilon^2 \exp\frac{3NL}{q}\,\varepsilon$$

cioè $\boldsymbol{u}$ è approssimato da $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$ con un errore dell'ordine di $\varepsilon^2$.

---

(1) Infatti se fosse $h \leqslant L/\varepsilon$, si avrebbe $|\boldsymbol{u}'(h)| = \eta$, quindi

$$\eta = |\boldsymbol{u}'(h)| \leqslant \frac{3}{q}\,ML\varepsilon \exp\frac{3NL}{q} < \frac{3ML}{q}\,\varepsilon_0 \exp\frac{3NL}{q} = \eta$$

relazione assurda.

* * *