Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 73-79

ENRICO BOMPIANI (*)

Una estensione della nozione di spazio osculatore ad una varietà. (**)

ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduzione - Richiami.

In questa comunicazione riprendo in esame la nozione di spazio osculatore ad una varietà V_m (di classe di differenziabilità elevata quanto occorre) in un suo punto, che indico con O. La prima origine di questa nozione è dovuta a PASQUALE DEL PEZZO (1886) (1) che ha considerato gli spazi osculatori in O, a tutte le curve di una varietà V_m in uno spazio proiettivo, di assegnato ordine ν e ha dato all'ambiente di loro appartenenza il nome di spazio *pluritangente*. A questo tipo di spazi, per distinguerli da quelli tangenti in più punti di una varietà, ho dato poi il nome, ora generalmente usato, di spazio ν-osculatore in O e l'ho indicato con $S(\nu)$.

Le ricerche relative a questi spazi e la loro incidenza sull'interpretazione geometrica delle equazioni lineari omogenee a derivate parziali presero evidenza e vennero agevolate da due lavori di CORRADO SEGRE (1906 e 1910) (2) che

(*) Indirizzo: Via Verona, 22, 00161 Roma, Italia.

(*) Ricevuto: 19-I-1973.

(1) P. DEL PEZZO, *Sugli spazi tangenti ad una superficie o ad una varietà immersa in uno spazio di più dimensioni*, Rend. Acc. di Scienze Fis. e Mat. di Napoli, **8** (1886).

(2) C. SEGRE, *Su una classe di superficie degli iperspazi legate con le equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine*, Atti Acc. Scienze di Torino, **42** (1906-7).

C. SEGRE, *Preliminari di una teoria delle varità luoghi di spazi*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **30** (1910), 1047-1079.

costituirono la pedana di lancio per la geometria proiettivo-differenziale negli iperspazi.

Già nel 1912 mi ero vivamente interessato a questioni sugli spazi osculatori (3); e oltre a vari risultati avevo dato una estensione della nozione di spazio ν-osculatore in un punto O di V_m: precisamente partendo dalla totalità delle curve di V_m uscenti da O e che hanno ivi fra loro contatto d'ordine $r < \nu$, cioè che hanno in comune un *elemento curvilineo* d'ordine r, E^r, di *centro* O, si possono considerare gli spazi ν-osculatori in 0 a queste curve e l'ambiente che li contiene.

A questo ambiente ho dato (4) il nome di *spazio ν-osculatore in O a V_m secondo un elemento E^r di centro O*, esso può indicarsi col simbolo $S(\nu, E^r)$. Per $r = 0$, $E^r = O$, questo spazio è quello già indicato con $S(\nu)$ senza mettere in evidenza il punto O.

2. - Spazio osculatore secondo una calotta.

La nozione precedente ammette varie estensioni (che ritengo verranno utili nell'approfondimento della natura geometrica di sistemi di equazioni lineari omogenee alle derivate parziali, sistemi sui quali esistono già risultati di C. H. SISAM, A. TERRACINI, P. BUZANO, miei e di altri).

L'estensione di cui mi occupo in questo lavoro è la seguente. Si consideri una calotta di V_m $(m \geqslant 3)$ che abbia centro in O, ordine r e dimensione $m' < m$: ciò vuol dire prendere un elemento $\sigma^r_{m'}$ dell'insieme quoziente determinato dalla condizione di contatto d'ordine r (che è una relazione di equivalenza nell'insieme di tutte le $V_{m'}$ per O appartenenti a V_m).

Si consideri poi un qualsiasi $E^r \subset \sigma^r_{m'}$ e per esso tutti gli E^ν, $\nu > r$, di V_m: al variare di $E^r \subset \sigma^r_{m'}$ si ha la totalità $\forall E^\nu \subset \forall E \subset \sigma^r_{m'}$.

Lo spazio ambiente di tutti questi E^ν si dirà lo *spazio ν-osculatore in O, secondo la calotta $\sigma^r_{m'}$*, e si potrà indicare con uno dei simboli $S(\nu, \sigma^r_{m'})$ o $S(\forall E^\nu \supset \forall E^r \subset \sigma^r_{m'})$: il secondo ne ricorda la genesi.

---

(3) E. BOMPIANI, *Sopra alcune estensioni dei teoremi di Meusnier e di Eulero*, Atti Acc. Scienze di Torino, **48** (1912-13), 393-410 (datata 10-II-1912);

E. BOMPIANI, *Recenti progressi nella geometria proiettivo differenziale degli iperspazi*, International Congress of Mathematicians (Cambridge, 1912). Proceedings, **2**, 22-27;

E. BOMPIANI, *Sull'equazione di Laplace*, Rend. Circ. Mat. Palermo, **34** (1912) 383-407.

(4) La prima nota citata in (3).

3. - Spazio osculatore a V_3 secondo una σ_2^1.

Per dare un esempio, il più semplice possibile, di quanto si è detto consideriamo una V_3 le coordinate proiettive, omogenee dei cui punti non soddisfino ad alcune equazione a derivate parziali, lineare ed omogenea di ordine $\leqslant 2$: questa condizione di generalità porta che l'ambiente proiettivo della V_3 sia di dimensione $\geqslant 9$, cioè un P_n con $n \geqslant 9$. Sia O un punto generico di V_3, in cui lo $S(2) = P_9$.

Nello spazio T_3 tangente in O a V_3 diamo una σ_2^1, cioè una giacitura piana.

Siano $x^i(\tau^1, \tau^2, \tau^3)$, $i = 1, \ldots, n+1$, le coordinate di un punto della varietà, funzioni di classe di derivabilità $\geqslant 2$.

Indichiamo con

$$x^i_{s_1} = \frac{\partial x^i}{\partial \tau^{s_1}}, \qquad x^i_{s_1 s_2} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \tau^{s_1} \partial \tau^{s_2}}$$

le derivate prime e seconde ($s_1, s_2 = 1, 2, 3$) calcolate in O (che possiamo sempre assumere come $\tau^1 = \tau^2 = \tau^3 = 0$); e chiamiamo, come d'uso, punti derivati primi o secondi quelli di coordinate $x^2_{s_1}$ o $x^i_{s_1 s_2}$ (indicati con x_{s_1} o $x_{s_1 s_2}$).

Una giacitura per O in V_3 può individuarsi con

$$\mathrm{d}\tau^3 = h\,\mathrm{d}\tau^1 + k\,\mathrm{d}\tau^2 \; ; \tag{3.1}$$

un elemento E^2 per O può individuarsi oltre che con O o $x(0, 0, 0)$ con i punti derivati primi e secondi

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = x_s \frac{\mathrm{d}\tau^s}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = x_{s_1 s_2} \frac{\mathrm{d}\tau^{s_1}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\tau^{s_2}}{\mathrm{d}t} + x_s \frac{\mathrm{d}^2\tau^s}{\mathrm{d}t^2},$$

essendo t un parametro qualsiasi di cui siano funzioni le τ^s (e per es. $t = 0$ in O).

Se fissato E^1 (cioè $\mathrm{d}\tau^s/\mathrm{d}t$) si vogliono tutti gli $E^2 \subset E^1$ occorre far variare arbitrariamente le $\mathrm{d}^2\tau^s/\mathrm{d}t^2$. Quindi lo spazio contenente i piani di tutti gli $E^2 \subset E^1$ è quello dei punti

$$x, x_1, x_2, x_3, \qquad x_{s_1 s_2} \frac{\mathrm{d}\tau^{s_1}}{\mathrm{d}t} \frac{\mathrm{d}\tau^{s_2}}{\mathrm{d}t}. \tag{3.2}$$

S'intende che questi punti dipendono dalla parametrizzazione adottata per le x^i su V_3: ma il loro spazio congiungente ne è indipendente.

Così potremo parlare del P_5 dei punti derivati secondi $x_{s_1 s_2}$ e studiare configurazioni in esso; queste dipendono dalla parametrizzazione ma le configurazioni ottenute proiettandole dal T_3 tangente in x ne sono indipendenti.

Lo spazio P_4 dei punti (3.2) è lo spazio 2-osculatore secondo l'E^1 determinato dai rapporti $d\tau^1 : d\tau^2 = d\tau^3$. Per avere il luogo di questi spazi al variare dell'E^1 entro la giacitura data bisogna tener conto del vincolo (3.1). L'ultimo dei punti (3.2) eliminando $d\tau^3$ con la (3.1) si scrive

$$(3.3)\quad \left\{\begin{aligned} &(x_{11} + 2h_{13} + h^2 x_{33})\left(\frac{d\tau^1}{dt}\right)^2 + (x_{22} + 2k\, x_{23} + k^2 x_{33})\left(\frac{d\tau^2}{dt}\right)^2 + \\ &\qquad + 2(x_{12} + kx_{13} + hx_{23} + hkx_{33})\frac{d\tau^1}{dt}\,\frac{d\tau^2}{dt}\,. \end{aligned}\right.$$

Se s'indicano con L, M, N i punti

$$(3.4)\quad \left\{\begin{aligned} L &= x_{11} + 2hx_{13} + h^2 x_{33}\,, \\ N &= (x_{22} + 2kx_{23} + k^2 x_{33})\,, \\ M &= 2(x_{12} + kx_{13} + hx_{23} + hkx_{33})\,, \end{aligned}\right.$$

comunque si faccia variare l'E^1 su σ_2^1 il punto (3.3) appartiene al piano LMN che sta nel P_5 dei sei punti derivati secondi (che congiunto al P_3 tangente dà il P_9 2-osculatore in x a V_3: naturalmente nell'ipotesi che questa non soddisfi ad equazioni lineari omogenee a derivate parziali del 2° ordine).

4. - Costruzioni geometriche.

Rendiamoci anzitutto conto della costruzione del piano LMN nel P_5, un punto combinazione lineare di questi, s'indichi con

$$(4.1)\qquad x_{11}X_1 + x_{22}X_2 + x_{33}X_3 + 2x_{12}X_4 + 2x_{13}X_5 + 2x_{23}X_6\;;$$

le $X_1, \ldots, X_6$ saranno coordinate omogenee del punto in P_5. Indichiamo con A_h $(h = 1, \ldots, 6)$ il punto di P_5 la cui sola coordinata X_h è $\neq 0$.

I punti L, M, N hanno coordinate locali appresso indicate:

$$(4.2)\qquad (1, 0, h^2, 0, h, 0)\,,\qquad M(0, 0, hk, 1, k, h)\,,\qquad N(0, 1, k^2, 0, 0, k)\,.$$

Il punto L, al variare di h, descrive la conica γ_1

$$(4.3)\qquad X_1 X_3 = X_5^2 \qquad \text{nel piano } A_1 A_3 A_5\,.$$

Il punto N descrive, al variare di k, la conica γ_2

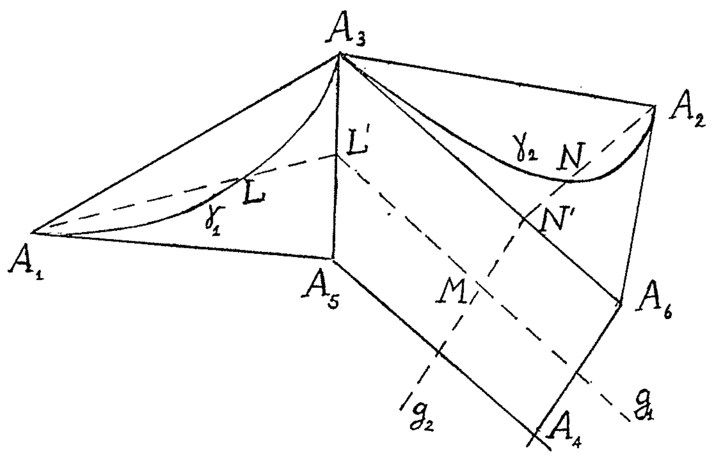
$$X_2 X_3 = X_6^2 \qquad \text{nel piano } A_2 A_3 A_6 \,; \tag{4.4}$$

e finalmente, al variare di h e k, il punto M descrive la quadrica Q

$$X_3 X_4 = X_5 X_6 \qquad \text{nello spazio } A_3 A_4 A_5 A_6 \,. \tag{4.5}$$

La quadrica Q contiene il quadrilatero sghembo $A_3 A_5 A_4 A_6$: il piano tantente in A_4 è il piano $A_4 A_5 A_6$.

Ad un punto L di γ_1 determinato da h corrisponde su Q una generatrice g_1 di equazioni $X_3 = hX_5$, $X_6 = hX_4$: la sua traccia sul piano di γ_1 è il punto intersezione di $A_3 A_5$ con la $A_1 L$; indichiamolo con L' (proiezione di L da A_1 sul lato $A_3 A_5$). Analogamente ad un punto N di γ_2 corrisponde la generatrice g_2: $X_3 = kX_6$, $X_5 = kX_4$ di Q la cui traccia sul piano di γ_2 è il punto $N'(0, 0, k, 0, 0, 1)$ proiezione di N da A_2 sul lato $A_3 A_6$.



Esiste dunque una semplice costruzione del piano L, M, N, relativo alla giacitura σ_2^1 determinata da h, k.

Se ad un punto del piano L, M, N, combinazione lineare $L\xi_1 + M\xi_2 + N\xi_3$ si attribuiscono le coordinate (proiettive omogenee) ξ_1, ξ_2, ξ_3 l'espressione del punto (3.3) importa

$$\xi_1 = \left(\frac{d\tau^1}{dt}\right)^2, \qquad \xi_2 = \frac{d\tau^1}{dt}\,\frac{d\tau^2}{dt}, \qquad \xi_3 = \left(\frac{d\tau^2}{dt}\right)^2$$

Il luogo di quel punto (al variare di $d\tau^1 : d\tau^2$ cioè dell'$E^1 \in \sigma_2^1$) è la conica

$$\xi_1 \xi_3 = (\xi_2)^2 ,$$

cioè tangente nei punti L, N alle rette che li congiungono col punto M.

Nel caso $h = k = 0$, cioè per la σ_2^1 definita da $d\tau^3 = 0$ i punti L, N, M sono i punti A_1, A_2, A_4: la conica in questo piano i cui punti corrispondono ai valori di $d\tau^1 : d\tau^2$ è tangente in A_1 alla retta A_1A_4, in A_2 alla retta A_2A_4 e passa per il punto unità in questo piano.

A questo caso ci si può sempre ridurre per una data σ_2^1 con opportuna scelta della parametrizzazione.

Riassumendo:

Lo spazio 2-osculatore ad una V_3 in un punto secondo una σ_2^1 di V_3 avente centro nel punto, cioè lo $S(2, \sigma_2^1)$ o $S(VE^2 \subset VE^1 \subset \sigma_2^1)$ è il P_6 congiungente lo spazio tangente T_3 (nel punto di V_3) con un piano (nello spazio P_5 dei punti derivati secondi) che si sa geometricamente costruire. In questo piano esiste una ben determinata conica i cui punti sono in corrispondenza proiettiva con gli elementi $E^1 \subset \sigma_2^1$: o meglio questi sono in corrispondenza proiettiva con gli spazi P_4 di un cono quadrico avente per vertice T_3.

5. - Altre configurazioni intrinsecamente legate all'intorno del secondo ordine di un punto di una varietà V_3.

Come si è detto in relazione ad ogni σ_2^1 di V_3 di centro $x \in V_3$ è definito un piano LMN, o meglio il $P_6 \equiv S(2, \sigma_2^1)$ che lo proietta da T_3.

Uno di questi piani è descritto da qualsiasi punto le cui coordinate siano combinazioni lineari omogenee di quelle dei punti L, N, M (4.2), cioè di coordinate

$$\left\{\begin{array}{lll} X_1 = \lambda , & X_2 = \mu , & X_3 = \lambda h^2 + \mu k^2 + \nu hk , \\ X_4 = \nu , & X_5 = \nu h + \nu k , & X_6 = \mu k + \nu h , \end{array}\right. \tag{5.1}$$

al variare di h, k, λ, μ, ν. Da queste si ha

$$h = \frac{X_2 X_5 - X_4 X_6}{X_1 X_2 - X_4^2} , \qquad k = \frac{X_1 X_6 - X_4 X_5}{X_1 X_2 - X_4^2} \tag{5.2}$$

e di conseguenza

$$(5.3)\quad \begin{cases} X_3(X_1X_2 - X_4^2)^2 = X_1(X_2X_5 - X_4X_6)^2 + X_2(X_1X_6 - X_4X_5)^2 + \\ \qquad + X_4(X_2X_5 - X_4X_6)(X_1X_6 - X_4X_5)\,. \end{cases}$$

Questa equazione, nello spazio dei punti derivati secondi, rappresenta una V_4^5 luogo degli ∞^2 piani LMN determinati da tutte le σ_2^1 di V_3 di centro x. La sua proiezione dallo spazio T_3 è un cono Γ_8^5 (in P_9) luogo di tutti i $P_6 = S(2, \sigma_2^1)$ al variare delle σ_2^1 di centro x in V_3.

Un'altra configurazione nasce dal considerare un E^1 fissato per x (di V_3) e le ∞^1 $\sigma_2^1 \subset E^1$ e cercare il luogo dei piani come LMN che le rappresentano.

Con una parametrizzazione conveniente si può sempre considerare l'E^1 fissato come rappresentato da $d\tau^2 = d\tau^3 = 0$. Il che porta che tutte le σ_2^1 per questo E^1 sono del tipo (v. (3.1))

$$d\tau^3 = k\, d\tau^2\,,$$

con k arbitrario; cioè esse sono caratterizzate da $h = 0$. Guardando alla prima (5.2) e alla (5.3) si ha che quei piani appartengono, nel P_5 dei punti derivati secondi, all'intersezione V_3^{10} della quadrica

$$X_2X_5 = X_4X_6\,,$$

(che è un cono avente per vertice la retta A_1A_3) con la V_4^5 rappresentata dalla (5.3).

La proiezione di questa V_3^{10} da T_3 cioè il cono di vertice T_3, Γ_7^{10}, che contiene V_3^{10}, è una configurazione intrinsecamente definita da una calotta σ_3^2 della V_3 data e da un E^1 di V_3 con lo stesso centro di σ_3^2.

Sunto

Definizione di un nuovo ente associato ad un punto di una varietà differenziabile e configurazioni algebriche ad esso relative intrinsecamente definite.

* * *