Riv. Mat. Univ. Parma (3) 3 (1974), 33-72

MARCO BIROLI (*)

Sur les inèquations paraboliques avec convexe dépendant du temps: solution forte et solution faible. (**)

Ad ANTONIO MAMBRIANI per il suo 75° compleanno

1. - Introduction et résultats précédents.

Soit E un espace de BANACH et K_1, K_2 deux convexes fermés de E.

Indiquons par B_R la bulle dans E de centre O et rayon R; soit Q l'ensemble des $q > 0$, tels que

$$K_1 + B_q \supset K_2 , \qquad K_2 + B_q \supset K_1 .$$

Indiquons $h(K_1, K_2) = \operatorname{Inf} Q$; $h(K_1, K_2)$ est une distance sur l'espace des convexes fermés de E et on dit que $h(K_1, K_2)$ est la distance de HAUSDORFF des convexes fermés K_1 et K_2 [**6**].

Considérons maintenant

$$\operatorname*{Sup}_{x \in K_1} d(x, K_2) = e(K_1, K_2) ;$$

on dit que $e(K_1, K_2)$ est l'ecart de K_1 et K_2 et on a

$$h(K_1, K_2) = \operatorname{Sup} [e(K_1, K_2), e(K_2, K_1)] \ [\mathbf{8}] .$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica dell'Università di Parma, 43100 Parma. Italia. Istituto di Matematica del Politecnico di Milano, Italia.

(**) Les résultats obtenus dans ce travail ont été annoncés au Séminaire Lions-Brézis de l'Université Paris VI le 31 Mai 1974. Lavoro eseguito nell'ambito del gruppo G.N.A.F.A. del C.N.R. - Ricevuto: 27-XII-1974.

Soit $K(t)$ une fonction de $[O, T]$ dans l'espace des convexes fermés de E (convexe mobile fermé de E défini sur $[O, T]$).

Considérons un intervalle $[t_1, t_2] \subset [O, T]$ et une décomposition de cet intervalle en intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ où $t_1 = \tau_0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = t_2$.

Indiquons

$$\operatorname{Var}(t_1, t_2; K(t)) = \operatorname{Sup} \sum_{i=0}^{n-1} h(K(\tau_i), K(\tau_{i+1}))$$

où le Sup est pris sur toutes décomposition τ de $[t_1, t_2]$.

Indiquons

$$v(t) = \operatorname{Var}(O, t; K(t))$$

on dit que $v(t)$ est la variation de $K(t)$; si $v'(t)$ existe dans $\mathscr{L}^1(O, T)$ on dit que $v'(t)$ est la vitesse numerique du convexe fermé mobile $K(t)$.

Indiquons

$$\operatorname{Ret}(t_1, t_2; K(t)) = \operatorname{Sup} \sum_{i=0}^{n-1} e(K(\tau_i), K(\tau_{i+1}))\ ;$$

où le Sup est pris sur toutes décompositions τ de $[t_1, t_2]$.

Indiquons

$$r(t) = \operatorname{Ret}(O, t; K(t))\ ;$$

on dit que $r(t)$ est la retraction de $K(t)$ [**8**].

On a [**6**], [**8**],

$$v(t_2) - v(t_1) = \operatorname{Var}(t_1, t_2; K(t))$$

$$r(t_2) - r(t_1) = \operatorname{Ret}(t_1, t_2; K(t))$$

Rappellons maintenant les résultats obtenus jusqu' ici sur les inéquations avec convexe dépendant du temps.

Soit H un espace de HILBERT identifié avec son dual pour le produit scalaire $(\ ,\ )$ et indiquons par $|\ \ |$ la norme sur H induite par $(\ ,\ )$.

Soit $\varphi(t, v)$ une fonction de $[O, T] \times H \to]-\infty, +\infty]$, qui est s.c.i. propre en v pour $t \in [O, T]$; fixons t, nous indiquons par $\varphi^*(t, v)$ la fonction duale de $\varphi(t, v)$.

Supposons que $\varphi(t, v)$ satisfait à une de deux hypothèses suivantes:

(a_1) il existe $a(t)$ croissante avec $a'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T)$ et $C_1, C_2 \geqslant 0$, tels que

$$\varphi(t, v) \leqslant \varphi(s, v) + (a(t) - a(s)) \cdot$$

$$\cdot (\varphi(s, v) + C_1 |v| + C_2)\ ,$$

(a_2) il existe $a(t)$ croissante avec $a'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T)$ et $C_1, C_2 \geqslant 0$, tels que

$$\varphi^*(t, v) \leqslant \varphi^*(s, v) + \big(a(t) - a(s)\big) \cdot$$
$$\cdot \big(\varphi^*(s, v) + C_1|v| + C_2\big).$$

Considérons le problème

$$(1.1) \qquad \begin{cases} u'(t) + \partial\varphi(t, u(t)) \ni f(t) & \text{p.p. sur } [O, T], \\ u(O) = u_0. \end{cases}$$

H. Attouch, P. Benilan, A. Damlamian et C. Picard ont démontré le résultat suivant:

Th. 1. *Soit* $u_0 \in \overline{D(\varphi(O, \cdot))}^H$ *et* $f(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; H)$; *le problème* (1.1) *a alors une unique solution* $u(t) \in C(O, T; H)$ *avec* $\sqrt{t}\, u'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; H)$.

Si en plus $u_0 \in D(\varphi(O, \cdot))$ *on a* $u'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; H)$ [**1**].

Dans cette direction des résultats, qui sont des cas particuliers du Th. 1, avait été obtenus précédemment par J. J. Moreau dans le cas où $\partial\varphi(t, \cdot) = \partial I_{K(t)}$ ($I_{K(t)}$ fonction indicatrice du convexe fermé mobile $K(t) \subset H$ ([**6**] [**7**] [**8**]), par H. Brézis dans le cas où $\partial\varphi(t, \cdot) = \partial\varphi' + \partial I_{K(t)}$, où $\varphi' : H \to]-\infty, +\infty]$ est une fonction convexe s.c.i. propre, [**4**], et par J. C. Peralba avec des, hypothèses plus restrictives sur la variation en t de $\varphi(t, \cdot)$.

Considérons maintenant un espace de Hilbert V identifié avec un sous-espace dense de H avec injection compacte dans H.

Soit $\| \; \|$ la norme de V, V^* le dual de V, $\langle \, , \rangle$ la dualité entre V et V^*, $\| \; \|^*$ la norme duale sur V^*.

Soit $A(t) \in C^1(O, T; \mathscr{L}(V, V^*))$ ($\mathscr{L}(V, V^*)$ espace des opérateurs linéaires continus de V dans V^*) et

$$\langle A(t)v, v\rangle \geqslant \alpha\|v\|^2, \qquad \alpha > 0,$$

$$\|A(t)v\|^* \leqslant C_1\|v\| + C_2,$$

$$\langle A'(t)v, v\rangle \leqslant C_3\|v\|^2 + C_4,$$

$\forall v \in V$, p.p. sur $[O, T]$, où $A'(t)$ indique la dérivée de $A(t)$ dans $\mathscr{L}(V, V^*)$.

Soit $K(t)$ un convexe fermé mobile de V défini sur $[O, T]$ et à vitesse numerique dans $\mathscr{L}^2(O, T)$.

Considérons le problème

$$(1.2)\quad \begin{cases} \langle u'(t)+A(t)u(t)-f(t),\ v(t)-u(t)\rangle \geqslant 0 & \text{p.p. sur } [O,T]\,, \\ \forall v(t)\in \mathscr{L}^2(O,T;\,V)\,,\ v(t)\in K(t) & \text{p.p. sur } [O,T]\,, \\ u(t)\in K(t) \quad \text{p.p. sur } [O,T] & \\ u(O)=u_0\,. & \end{cases}$$

L'A. a démontré dans [**3**] le résultat suivant:

Th. 2. *Soit* $u_0\in \overline{K(O)}^H$, $f(t)=f_1(t)+f_2(t)$ *où* $f_1(t)\in\mathscr{L}^2(O,T;H)$ *et* $f_2(t)$ *est absolument continue sur* $[O,T]$ *dans* V^*; *le problème* (1.2) *a alors une unique solution* $u(t)\in C(O,T;H)$ *avec* $u'(t)\in\mathscr{L}^2(\delta,T;H)$, $\forall\delta>0$.
Si en plus $u_0\in K(O)$ *on a* $u'(t)\in\mathscr{L}^2(O,T;H)$.

Nous observons que le Th. 1 permit d'avoir des résultats sur le problème (1.2) uniquement sous les hypothèses, que $K(t)$ soit un convexe fermé de H, $t\in[O,T]$, à retraction $r(t)$, avec $r'(t)\in\mathscr{L}^2(O,T)$ et qu'il y ait $a(t)\in\mathscr{L}^2(O,T;H)$, telle que

$$(I+\lambda(A(t)-a(t)))^{-1}K(t)\subset K(t) \qquad \text{p.p. sur } [O,T]\,,\ \forall\lambda>0\,.$$

Nous observons que les résultats du Th. 2 sont donnés pour $A(t)\colon V\to V^*$ linéaire et $K(t)$ à vitesse numerique dans $\mathscr{L}^2(O,T)$, tandis que les résultats du Th. 1 et les résultats dont on dispose dans le cas $K(t)=K$ indépendant du temps et $K(t)$ croissant [**5**], font esperer que les résultats du Th. 2 soient aussi valables pour $A(t)$ monotone, borné, hemicontinu, sousdifférentiel et dépendant régulièrment du temps et pour $K(t)$ à retraction $r(t)$ avec $r'(t)\in\mathscr{L}^2(O,T)$.

Le premier but de ce travail sera donc de arriver à un résultat de ce type, que nous enoncerons precisement dans le n. **2**.

Nous observons aussi que, dans le cas $K(t)=K$ indépendant du temps, on peut donner une formulation faible de (1.2); dans le cas où $K(t)$ dépende du temps il n'y a, à ma connaissance, aucun résultat concernant la formulation faible du problème (1.2).

Le deuxième but de ce travail sera alors de etendre le résultat d'existence et unicité de la formulation faible de (1.2), qu'on connait dans le cas $K(t)=K$ indépendant du temps, au cas où $K(t)$ est un convexe fermé mobile de V avec retraction $r(t)$ régulière.

2. - Enoncés des résultats.

Soit V un espace de BANACH reflexif, separable, strictement convexe, $\| \ \|$ la norme sur V, V^* le dual de V, que nous supposons aussi strictement convexe, $\langle \, , \, \rangle$ la dualité entre V et V^*, $\| \ \|^*$ la norme duale sur V^*.

Soit H un espace de HILBERT identifié avec son dual pour le produit scalaire $(\, , \,)$ et supposons $V \subset H \subset V^*$ avec injection dense et continue.

Soit $K(t)$ un fermé convexe mobile de V de retraction $r(t)$ avec $r'(t) \in \in \mathscr{L}^2(O, T)$.

Indiquons $\varphi(t, v)$ une fonction de $[O, T] \times V$ dans $]-\infty, +\infty]$ convexe s.c.i. propre pour $t \in [O, T]$ avec $\varphi(t, O) \leqslant$ Cst.

Soit $A(t)\colon V \to V^*$ un opérateur monotone, borné, demicontinu p.p. sur $[O, T]$ et tel que

(1) $\langle A(t)v, v - \bar{v}(t)\rangle \geqslant \alpha\|v\|^p - \lambda|v|^2$ p.p. sur $[O, T]$, $\alpha > 0$, $\forall v \in V$, $p \geqslant 2$, $\bar{v}(t) \in \mathscr{L}^p(O, T; V)$;

(2) $\|A(t)v\|^* \leqslant \beta\|v\|^{p-1} + d(t)$ p.p. sur $[O, T]$, $\forall v \in V$, $d(t) \in \mathscr{L}^{p'}(O,T)$ (p' index conjugué à p);

(3) $A(t)v$ est mesurable dans V^* sur $[O, T]$, $\forall v \in V$.

On obtient le résultat suivant:

Th. 3. *Soit* $u_0 \in \overline{K(O)}^H$, $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ *où* $f_1(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; H)$ *et* $f_2(t)$ *est absolument continue dans* V^*, $\bar{v}(t)$ *absolument continue dans* V *et* $d(t) \in \mathscr{L}^\infty(O, T)$.

Supposons que:

(i) $A(t) = \partial\varphi(t, \cdot)$

(ii) $\varphi(t, v)$ *soit derivable en* t $\forall v \in V$ *et*

$$\varphi_t'(t, v) \leqslant C\varphi(t, v) + d_1(t)$$

p.p. sur $[O, T]$, *avec* $d_1(t) \in \mathscr{L}^1(O, T)$;

(iii) $A(t)v$ *est continue dans* V^* *faible uniformément pour* v *qui varie dans un compact de* V.

Le problème (1.2) *a alors une unique solution*

$$u(t) \in C(O, T; H) \cap \mathscr{L}^p(O, T; V)$$

avec $u'(t) \in \mathscr{L}^2(\delta, T; H)$, $\forall \, \delta > O$.

Si en plus $u_0 \in K(O)$, *on a* $u'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; H)$.

Il est facil de voir que du Th. 3 on peut déduir le Th. 2.

La démonstration du Th. 3 suive la méthode utilisée dans [3], mais il y a des difficultés considérables pour adapter cette méthode; notamment il faut démontrer un'extension de l'estimation de J. J. MOREAU [6], donnée dans le cas hilbertien et pour la vitesse numerique au cas des espaces de BANACH strictement convexes et de la retraction.

Nous observons que le procédé utilisé par J. J. MOREAU dans la démonstration de cette estimation est d'application difficile dans le cas des espaces de BANACH strictement convexes, donc il faut utiliser une méthode nouvelle.

Possons maintenant à la formulation faible de (1.2).

Considérons le problème

$$\begin{aligned}
(1.2')\qquad & \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)u(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle\, dt \geqslant \\
& \geqslant \tfrac{1}{2}|v(t_2) - u(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2}|v(t_1) - u(t_1)|^2 , \\
& 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T , \\
& \forall v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T; V) \text{ avec } v'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; H) , \\
& v(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } [O, T] , \\
& u(t) \in C(O, T; H) \cap \mathscr{L}^p(O, T; V) , \\
& u(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } [O, T] ,\ u(O) = u_0 .
\end{aligned}$$

On obtient les résultats suivants:

Th. 4. *Soit* $u_0 \in \overline{K(O)}^H$, $f(t) \in \mathscr{L}^{p'}(O, T; V^*)$, $r'(t) \in \mathscr{L}^p(O, T)$; *le problème* (1.2′) *a alors une unique solution* $u(t)$.

Th. 5. *Soit* $K(t)$ *comme au Th.* 4 *et soit* $S: (u_0, f(t)) \to u(t)$ $(u(t)$ *solution de* (1.2′)); $|S$ *est continu de* $\overline{K(O)}^H \times \mathscr{L}^{p'}(O, T; V^*)$ *dans* $C(O, T; H)$ *et dans* $\mathscr{L}^p(O, T; V)$ *faible.*

Si en plus

$$\langle A(t)v_1 - A(t)v_2, v_1 - v_2\rangle \geqslant \alpha\|v_1 - v_2\|^p - \psi(|v_1 - v_2|)$$

où $\psi(\eta) \in C(R_+)$ avec $\lim\limits_{n \to 0_+} \psi(\eta) = 0$, l'opérateur S est continu de $\overline{K(O)}^H \times \mathscr{L}^{p'}(O, T; V^*)$ dans $\mathscr{L}^p(O, T; V)$ fort.

La clef de la démonstration des Ths. 4, 5 est la donnée d'un procédé de régularisation semblable à celui qu'on utilise pour démontrer l'unicité dans le cas où $K(t) = K$ ne dépende pas du temps.

Nous observons aussi que la partie concernante l'existence dans le Th. 4 est démontré par penalisation et que le procédé de régularisation, qui nous interesse est établi en utilisant le Th. 3.

Dans le n. **3** nous rappellons certains résultats dejà connus et démontrons certains lemmes, qui nous seront utils dans la suite, dans le n. **4** nous démontrons le Th. 3, dans le n. **5** nous démontrons le Th. 5, en admettant le Th. 4, dans le n. **6** nous démontrons le Th. 4 et dans le n. **7** nous donnons des applications des Ths. 3, 4, 5.

3. - Résultats préliminaires.

Rappellons d'abord un lemme dû à J. J. MOREAU [**9**], sur la retraction de l'intersection de deux convexes fermés mobiles:

Lemme 1. *Soit E un espace de Banach, $K(t)$ un fermé convexe mobile, défini sur $[O, T]$, $B_R(x_0)$ la bulle fermée de centre x_0 et rayon R, $r(t)$ la retraction de $K(t)$.*

Posons $K'(t) = K(t) \cap B_R(x_0)$ et supposons que $K(t) \cap \operatorname{int} B_R(x_0) \neq \emptyset$. Soit $\bar{r}(t)$ la retraction de $K'(t)$, on a $\bar{r}'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T)$.

Nous rappellons aussi un deuxième résultat dû à J. J. MOREAU [**8**], sur les sections d'un convexe fermé mobile:

Lemme 2. *Soit E un espace de Banach reflexif et $K(t)$ un fermé convexe mobile de E défini sur $[O, T]$, de retraction $r(t)$ avec $r'(t) \in \mathscr{L}^p(O, T)$, $p \geqslant 1$.*

Considérons $u_0 \in K(O)$, il y a une section $u(t)$ de $K(t)$ avec $u'(t) \in \mathscr{L}^p(O, T; E)$ et $u(O) = u_0$.

Démonstrons le lemme suivant:

Lemme 3. *Soit $K \subset V$ un fermé convexe avec $O \in K$ et $\{u_n\}$ une suite telle que*

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u_0 .$$

On a

$$\lim_{n\to\infty} \|u_n - P_K u_n\| = \|u - P_K u\|$$

(P_K opérateur de projection sur K dans V).

Nous observons qu'étant la suite $\{u_n\}$ bornée aussi la suite $\{u_n - P_K u_n\}$ est bornée dans V.

Indiquons par $J\colon V \to V^*$ l'application de dualité telle que $\|Jv\|^* = \|v\|$, $\forall v \in V$. On a, J. L. LIONS [5], pg. 371,

$$\langle J(u_n - P_K u_n) - J(u - P_K u),\ u_n - u_0\rangle \geq (\|u_n - P_K u_n\| - \|u - P_K u\|)^2 .$$

De l'hypothèse on a alors

$$\lim_{n\to\infty} \langle J(u_n - P_K u_n) - J(u - P_K u),\ u_n - u_0\rangle = 0 ,$$

dont on a le résultat.

Remarque 1. Par le procédé du Lemme 3 on a facilement que $u - P_K u$ est demicontinu en u et que, si V est localement uniformément convexe, $u - P_K u$ est continu en u; ces résultats sont des cas particuliers de [11].

Lemme 4. *Soit $K(t) \subset V$, $t \in [O, T]$, un convexe fermé mobile de retraction $r(t)$ continue sur $[O, T]$; $\forall u(t)$ mesurable dans V sur $[O, T]$, $\|u(t) - P_{K(t)} u(t)\|$ est mesurable sur $[O, T]$.*

De la Prop. 7 *b)* de [8], il suffit de démontrer le résultat dans le cas $O \in K(t)$ sur $[O, T]$. Démontrons d'abord le résultat dans le cas $u(t) = v$.

Fixons une décomposition τ de $[O, T]$ en intervalles $[\tau_i, \tau_{i+1}]$ avec $\tau_0 = 0 < \tau_1 < \ldots < \tau_{n-1} < \tau_n = T$ et indiquons $f(t) = \|v - P_{K(t)} v\|$. Posons

$$V_\tau^+ = \sum{}' \big(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})\big)$$

où $\sum'$ est etendue à tous i pour les quels on a $f(\tau_i) - f(\tau_{i-1}) \geq 0$ et

$$V_\tau^- = -\sum{}' \big(f(\tau_i) - f(\tau_{i-1})\big)$$

où $\sum'$ est etendue à tous i pour lesquels on a $f(\tau_{i-1}) - f(\tau_i) \geq 0$.

Indiquons

$$V_\tau = V_\tau^+ + V_\tau^- ,$$

$$V = \operatorname*{Sup}_\tau V_\tau .$$

Il est facil de voir que V est la variation de $f(t)$ sur $[O, T]$.

On a, étant $r(t)$ croissante,

$$V_\tau^+ \leq \sum{}' \big(r(\tau_i) - r(\tau_{i-1})\big) \leq \operatorname*{Max}_{t \in [O,T]} r(t) .$$

On a aussi

$$V_\tau^+ - V_\tau^- = \|v - P_{K(T)}v\| - \|v - P_{K(0)}v\| \geq -\|v\| ,$$

dont

$$V_\tau^- \leq \underset{t\in[O,T]}{\mathrm{Max}}\, r(t) + \|v\|$$

et donc

$$V \leq 2 \underset{t\in[O,T]}{\mathrm{Max}}\, r(t) + \|v\| .$$

On a ainsi que la fonction $f(t)$ est à variation bornée, donc mesurable.

Soit maintenant $u(t)$ une fonction mesurable sur $[O, T]$ dans V; il y a une suite $\{u_n(t)\}$ de fonctions en escalier à valeurs finis, telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \text{ dans } V$$

p.p. sur $[O, T]$ et en mesure.

Du Lemme 3 on a alors

$$\lim_{\to\infty} \|u_n(t) - P_{K(t)}u_n(t)\| = \|u(t) - P_{K(t)}u(t)\|$$

p.p. sur $[O, T]$ et en mesure, dont on a que $\|u(t) - P_{K(t)}u(t)\|$ est mesurable sur $[O, T]$.

Lemme 5. *Soit $K(t)$ comme au Lemme 4; alors si $u(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; V)$, on a $J(u(t) - P_{K(t)}u(t)) \in \mathscr{L}^2(O, T; V^*)$.*

De la Prop. 7 *b*) de [8] il suffit de démontrer le résultat pour $O \in K(t)$, $t \in [O, T]$.

Observons qu'on a

$$\text{(3.1)} \quad \tfrac{1}{2}\|w - P_{K(t)}w\|^2 - \tfrac{1}{2}\|v - P_{K(t)}v\|^2 \geq \langle J(v - P_{K(t)}v), (w - P_{K(t)}w) - (v - P_{K(t)}v)\rangle \geq \langle J(v - P_{K(t)}v), w - v\rangle .$$

Posons

$$\varphi(t; v) = \tfrac{1}{2}\|v - P_{K(t)}v\|^2 .$$

De (3.1) on a

$$J(v - P_{K(t)}v) \in \partial\varphi(t; v) .$$

Étant l'opérateur $v \to J(v - P_{K(t)}v)$ partaut défini pour $t \in [O, T]$, on a

$$J(v - P_{K(t)}v) = \partial\varphi(t; v)\,. \tag{3.2}$$

Considérons maintenant la fonctionelle convexe

$$\Phi(v) = \int_0^T \|v(t) - P_{K(t)}\, v(t)\|^2\, \mathrm{d}t\,.$$

Du Lemme 4 on a $D(\Phi) = \mathscr{L}^2(O, T; V)$ et $\Phi(v)$ continue sur $\mathscr{L}^2(O, T; V)$; on a alors $D(\partial\Phi) = \mathscr{L}^2(O, T; V)$.

Soit $\psi(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; V)$, $v(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; V)$ et $\psi \in \partial\Phi(v)$; on a alors $\forall w(t) \in \in \mathscr{L}^2(O, T; V)$

$$\int_0^T \langle\psi(t), w(t) - v(t)\rangle\, \mathrm{d}t \leqslant \tfrac{1}{2}\int_0^T \|w(t) - P_{K(t)}\, w(t)\|^2\, \mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}\int_0^T \|v(t) - P_{K(t)}\, v(t)\|^2\, \mathrm{d}t\,.$$

Posons

$$w(t) = \begin{cases} x \in V & \text{pour } t \in [t_1, t_2] \subset [O, T]\,, \\ v(t) & \text{pour } t \notin [t_1, t_2]\,. \end{cases}$$

On a

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle\psi(t), x - v(t)\rangle\, \mathrm{d}t \leqslant \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \|x - P_{K(t)}x\|^2\, \mathrm{d}t - \tfrac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \|v(t) - P_{K(t)}v(t)\|^2\, \mathrm{d}t\,.$$

On a alors p.p. sur $[O, T]$

$$\langle\psi(t), x - v(t)\rangle \leqslant \tfrac{1}{2}\|x - P_{K(t)}x\|^2 - \tfrac{1}{2}\|v(t) - P_{K(t)}v(t)\|^2\,,$$

dont

$$\psi(t) = J\big(v(t) - P_{K(t)}v(t)\big)$$

p.p. sur $[O, T]$.

Le résultat est ainsi démontré.

Lemme 6. *Soit $u(t)$ absolument continue dans V sur $[O, T]$, $K(t) \subset V$ un fermé convexe mobile, défini sur $[O, T]$ à retraction $r(t)$ avec $r'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T)$.*

On a

$$\int_0^T \langle J\big(u(t) - P_{K(t)}u(t)\big), -u'(t)\rangle\, \mathrm{d}t \leqslant \tfrac{1}{2}\|u(O) - P_{K(O)}u(O)\|^2 + \\ + \int_0^T \big(r'(t) + q(t)\big)\|u(t) - P_{K(t)}\, u(t)\|\, \mathrm{d}t$$

où $q(t) \in \mathscr{L}^2\,(O, T)$.

Pour le Lemme 2 on peut supposer sans perdre de généralité $O \in K(t)$ sur $[O, T]$. Nous observons que du Lemme 5 on a, étant $u(t)$ bornée dans V, $J(u(t)-P_{K(t)}u(t)) \in \mathscr{L}^\infty(O, T; V^*)$.

Prolongeons à $]-\infty, T]$ $K(t)$ par $K(O)$ et $u(t)$ par $u(O)$; nous indiquerons encore par $K(t)$ et $u(t)$ ces prolongées.

Soit $h \geqslant 0$; on a

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\|u(t)-P_{K(t)}u(t)\|^2-\tfrac{1}{2}\|u(t-h)-P_{K(t-h)}u(t-h)\|^2 \leqslant \\
&\qquad \leqslant J(u(t)-P_{K(t)}u(t)), u(t)-u(t-h)\rangle + \\
&\qquad + \langle J(u(t)-P_{K(t)}u(t)), P_{K(t-h)}u(t-h)-P_{K(t)}u(t)\rangle \leqslant \\
&\qquad \leqslant \langle J(u(t)-P_{K(t)}u(t)), u(t)-u(t-h)\rangle + \\
&\qquad + \langle J(u(t)-P_{K(t)}u(t)), P_{K(t-h)}u(t-h)-P_{K(t)}P_{K(t-h)}u(t-h)\rangle + \\
&\qquad + \langle J(u(t)-P_{K(t)}u(t)), P_{K(t)}P_{K(t-h)}u(t-h)-P_{K(t)}u(t)\rangle \leqslant \\
&\qquad \leqslant \langle J(u(t)-P_{K(t)}u(t)), u(t)-u(t-h)\rangle + \\
&\qquad + \|u(t)-P_{K(t)}u(t)\|(r(t)-r(t-h)) .
\end{aligned}$$

Divisons pour h et intégrons sur $[O, T]$; on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \langle J(u(t)-P_{K(t)}u(t))|, \frac{u(t-h)-u(t)}{h}\rangle \mathrm{d}t \leqslant \\
&\leqslant \tfrac{1}{2}\|u(O)-P_{K(O)}u(O)\|^2 + \int_0^T \|u(t)-P_{K(t)}u(t)\| \frac{r(t)-r(t-h)}{h}\,\mathrm{d}t ,
\end{aligned}$$

dont, en passant à la limite pour $h \to O$,

$$\begin{aligned}
\int_0^T \langle J(u(t)-P_{K(t)}u(t)), -u'(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant \tfrac{1}{2}\|u(O)-P_{K(O)}u(O)\|^2 + \\
+ \int_0^T \|u(t)-P_{K(t)}u(t)\|\, r'(t)\,\mathrm{d}t .
\end{aligned}$$

On a ainsi démontré le résultat.

Lemme 7. *Soit $K(t)$ un fermé convexe mobile de V, défini sur R_+, de retraction $r(t)$ avec $r'(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+)$, $p > 1$; soit $\mathscr{K}(t)$ le convexe fermé mobile de $\mathscr{L}^p(O, \delta; V)$, $\delta > 0$, défini par $\mathscr{K}(t) = \{v(s) | v(s) \in \mathscr{L}^p(O, \delta; V),\ v(s) \in K(t+s)$ sur $[O, \delta]$ p.p.$\}$. Indiquons par $\tilde{r}(t)$ la retraction de $\mathscr{K}(t)$; on a $\tilde{r}'(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+)$.*

Du Lemme 2 il suffit de démontrer notre résultat dans le cas $O \in K(t)$, $t \in R_+$.

Du Lemme 5 on a que $u(t) \in \mathscr{L}^p(O, \delta; V) \Rightarrow P_{K(t)} u(t) \in \mathscr{L}^p(O, \delta; V)$.

Nous observons que, $t_1 \leqslant t_2$,

$$e\left(\mathscr{K}(t_1), \mathscr{K}(t_2)\right) \leqslant \Big[\int_0^\delta \left(r(t_2+\eta) - r(t_1+\eta)\right)^p d\eta\Big]^{1/p}.$$

On a alors que $\tilde{r}(t)$ est la variation de la fonction induite par $r(t)$ dans $\mathscr{L}^p(O, \delta)$. Alors on a

$$\tilde{r}'(t) \leqslant \Big[\int_0^\delta |r'(t+\eta)|^p d\eta\Big]^{1/p},$$

dont le résultat.

Lemme 8. *Soit $A(t)\colon V \to V^*$ satisfaisant aux hypothèses du Th. 3, on a alors p.p. sur $[O, T]$*

$$\varphi(t, u(t))' = \varphi'_t(t, u(t)) + \langle A(t) u(t), u'(t)\rangle$$

pour tous $u(t)$ absolument continue sur $[O, T]$ dans V.

Soit $t \in]O, T[$; on a pour $O < h < h_0$, h_0 suitable

$$\varphi(t+h, u(t+h)) - \varphi(t, u(t)) =$$

$$= \varphi(t+h, u(t+h)) - \varphi(t+h, u(t)) + \varphi(t+h, u(t)) - \varphi(t, u(t)).$$

On a

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\left(\varphi(t+h, u(t)) - \varphi(t, u(t))\right) = \varphi'_t(t, u(t)) \tag{3.3}$$

et

$$\langle A(t+h) u(t+h), u(t+h) - u(t)\rangle \geqslant$$

$$\geqslant \varphi(t+h, u(t+h)) - \varphi(t+h, u(t)) \geqslant \langle A(t+h) u(t), u(t+h) - u(t)\rangle$$

dont

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \big(\varphi(t+h,\, u(t+h)) - \varphi(t+h,\, u(t))\big) = \langle A(t)u(t),\, u'(t)\rangle\,. \tag{3.4}$$

De (3.3) et (3.4) on a le résultat.

Lemme 9. *Soit $A\colon V \to V^*$ monotone, borné, hemicontinu et $\varphi\colon V \to]-\infty, +\infty]$ une fonction convexe propre* s.c.i. *telle que $\partial\varphi = A$ et $\varphi(O) = 0$. Supposons qu'il y ait $\bar{v} \in V$ tel que*

$$\langle Av,\, v - \bar{v}\rangle \geqslant \alpha\|v\|^p - \lambda|v|^2 \qquad \forall v \in V\,,\ \alpha > 0\,,$$

et

$$\|Av\|^* \leqslant \beta\|v\|^{p-1} + d \qquad \forall v \in V\,.$$

On a alors

$$\varphi(v) \geqslant C_1\|v\|^p - \frac{\lambda}{2}\,|v|^2 + C_2\,.$$

Étant A univoque, A est la derivée de Gateaux de φ, donc

$$\varphi(v) = \int_0^1 \langle A(tv),\, v\rangle\, dt \geqslant \int_0^1 \frac{1}{t}\,\big(\alpha\|tv\|^p - \lambda|tv|^2\big)\, dt - \int_0^1 \|A(tv)\|_*\, \|\bar{v}\|\, dt\,,$$

dont le résultat.

4. - Démonstration du Th. 3.

Du Lemme 2 on peut supposer $O \in K(t)$, $t \in [O, T]$, la démonstration dans le cas général étant la même.

Démontrons d'abord le résultat dans le cas $u_0 \in K(O)$.

Indiquons per $J\colon V \to V^*$ l'application de dualité telle que $\|Jv\|^* = \|v\|$ et par $\{v_1, v_2, \ldots, v_n, \ldots\}$ une base de V, qui est donc aussi une base de H.

Indiquons par V_n l'espace engendré par $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ et soit $\{u_{0_n}\}$ une suite telle que $u_{0_n} \in V_n$ et

$$\lim_{n\to\infty} u_{0_n} = u_0 \qquad \text{dans } V\,. \tag{4.1}$$

Considérons le système

$$(4.2_n)\quad \begin{cases} \langle u'(t) + A(t)u(t) + \frac{1}{\lambda}\left(J\big(u(t) - P_{K(t)}(u)t)\big) - f(t), v_i\right\rangle = 0 \\ \qquad\qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,, \; i = 1, \ldots, n\,, \\ u(t) \in V_n \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,, \\ u(O) = u_{0_n}\,. \end{cases}$$

Pour les théorèmes connus sur les systèmes de équations différentielles ordinaires (4.2_n) a une solution locale sur $[O, t_n]$, que nous indiquons par $u_n(t)$.

De (4.2_n) on a

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_n(t)|^2 \leqslant \langle f(t), u_n(t)\rangle - \langle A(t)u_n(t), u_n(t)\rangle \leqslant$$

$$\leqslant \|f(t)\|^* \|u_n(t)\| - \alpha\|u_n(t)\|^p + \lambda|u_n(t)|^2 + \beta\|u_n(t)\|^{p-1}\|\bar{v}(t)\| + |\mathrm{d}(t)|\,\|\bar{v}(t)\|\,.$$

De (4.3) on a que $|u_n(t)| \leqslant C_1$ sur $[O, t_n]$, où C_1 est une constante qui ne dépende pas de n, λ, t_n.

On peut donc prolonger $u_n(t)$ a une solution de (4.2_n) sur $[O, T]$ et on a encore

$$(4.4)\qquad |u_n(t)| \leqslant C_1 \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,.$$

De (4.3) on a aussi

$$(4.5)\qquad \int_0^T \|u_n(t)\|^2\,\mathrm{d}t \leqslant C_2\,,$$

où C_2 est une constante qui ne dépende pas de n, λ.

De (4.2_n) pour le Lemme 8 on a

$$(4.6)\qquad |u_n'(t)|^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(t, u_n(t)) \leqslant$$

$$\leqslant \langle f(t), u_n'(t)\rangle + \frac{1}{\lambda}\left\langle J\big(u_n(t) - P_{K(t)}u_n(t)\big), -u_n'(t)\right\rangle + \varphi\big(t, u_n(t)\big) + \mathrm{d}_1(t)\,,$$

dont on a

$$(4.7)\qquad \int_0^t |u_n'(s)|^2\,\mathrm{d}s + \varphi\big(t, u_n(t)\big) \leqslant \varphi(O, u_{0_n}) + \frac{1}{2\lambda}\|u_{0_n} - P_{K(0)}u_{0_n}\|^2 +$$

$$+ \int_0^t \left[\langle f(s), u_n'(s)\rangle + \varphi\big(s, u_n(s)\big) + \mathrm{d}_1(s)\right]\mathrm{d}s + \frac{1}{\lambda}\int_0^t |r'(s)|\,\|u_n(s) - P_{K(s)}u_n(s)\|\,\mathrm{d}s\,,$$

dont

$$(4.8)\quad \int_0^t |u_n'(s)|^2 ds + \varphi(t, u_n(t)) \leqslant \varphi(O, u_{0_n}) + \frac{1}{2\lambda}\|u_{0_n} - P_{K(0)}u_{0_n}\|^2 +$$

$$+ \int_0^t \langle f_1(s), u_n'(s)\rangle ds + \langle f_2(t), u_n(t)\rangle - \langle f_2(O), u_{0_n}\rangle - \int_0^t \langle f_2'(s), u_n(s)\rangle ds +$$

$$+ \int_0^t [\varphi(s, u_n(s)) + d_1(s)] ds + \frac{1}{\lambda}\int_0^t r'(s)\|u_n(s) - P_{K(s)}u_n(s)\| ds ,$$

dont, compte tenu de (4.4), on a

$$(4.10)\quad \int_0^T |u_n'(t)|^2 dt \leqslant C_{1,\lambda} ,$$

$$(4.11)\quad \|u_n(t)\| \leqslant C_{2,\lambda} ,$$

où $C_{1,\lambda}$ et $C_{\lambda,2}$ sont des constantes qui ne dépendent pas de n, mais dépendent de λ.

De (4.10), (4.11) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(4.12)\quad \lim_{n\to\infty}{}^* u_n(t) = u_\lambda(t)$$

dans V uniformément sur $[O, T]$ et

$$(4.13)\quad \lim_{n\to\infty}{}^* u_n'(t) = u_\lambda'(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(O, T; H) .$$

De (4.11) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$(4.14)\quad \lim_{n\to\infty}{}^{**} \left(A(t)u_n(t) + \frac{1}{\lambda} J(u_n(t) - P_{K(t)}u_n(t))\right) = \chi_\lambda(t)$$

dand $\mathscr{L}^\infty(O, T; V^*)$; on a aussi

$$\int_0^t \langle A(s)u_n(s) + \frac{1}{\lambda} J(u_n(s) - P_{K(s)}u_n(s)), u_n(s)\rangle ds \leqslant \int_0^t \langle f(s) - u_n'(s), u_n(s)\rangle ds =$$

$$= \int_0^t \langle f(s), u_n(s)\rangle ds + \tfrac{1}{2}|u_{0_n}|^2 - \tfrac{1}{2}|u_n(t)|^2 .$$

De (4.12), (4.13) on a alors

$$\limsup_{n\to\infty} \int_0^t \langle A(s)\, u_n(s) + \frac{1}{\lambda} J\big(u_n(s) - P_{K(s)} u_n(s)\big),\, u_n(s)\rangle\, ds \leqslant \int_0^t \langle f(s),\, u_\lambda(s)\rangle\, ds +$$

$$+ \tfrac{1}{2}|u_0|^2 - \tfrac{1}{2}\,|u_\lambda(t)|^2 = \int_0^t \langle f(s) - u'_\lambda(s),\, u_\lambda(s)\rangle\, ds = \int_0^t \langle \chi_\lambda(s),\, u_\lambda(s)\rangle\, ds\,.$$

On a alors

$$\chi_\lambda(t) = A(t)\, u_\lambda(t) + \frac{1}{\lambda} J\big(u_\lambda(t) - P_{K(t)} u_\lambda(t)\big) \tag{4.15}$$

p.p. sur $[O, T]$ et

$$\lim_{n\to 0} \|u_n(t) - P_{K(t)} u_n(t)\| = \|u_\lambda(t) - P_{K(t)} u_\lambda(t)\| \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(O, T)\,. \tag{4.16}$$

De (4.12), (4.13), (4.14), (4.15) on a que $u_\lambda(t)$ est solution du problème

$$u'(t) + A(t)\, u(t) + \frac{1}{\lambda} J\big(u(t) - P_{K(t)} u(t)\big) = f(t) \text{ p.p. sur } [O, T]\,, \qquad u(O) = u_0\,. \tag{4.17}$$

Observons maintenant que de (4.8), (4.12), (4.13), (4.16) on a

$$\begin{aligned}
&\int_0^t |u'_\lambda(s)|^2\, ds + \varphi(t, u_\lambda(t)) \leqslant \varphi(O, u_0) + \int_0^t \langle f_1(s),\, u'_\lambda(s)\rangle\, ds + \\
&- \langle f_2(O), u_0\rangle + \langle f_2(t), u_\lambda(t)\rangle - \int_0^t \langle f'_2(s),\, u_\lambda(s)\rangle\, ds + \int_0^t \big[\varphi(s, u_\lambda(s)) + \\
&+ d_1(s)\big]\, ds + \frac{1}{\lambda}\int_0^t |r'(s)|\, \|u_\lambda(s) - P_{K(s)} u_\lambda(s)\|\, ds \leqslant \\
&\leqslant \varphi(O, u_0) + \int_0^t \langle f_1(s),\, u'_\lambda(s)\rangle\, ds - \langle f_2(O), u_0\rangle + \\
&+ \langle f_2(t), u_\lambda(t)\rangle - \int_0^t \langle f'_2(s),\, u_\lambda(s)\rangle\, ds + \\
&+ \int_0^t [\varphi(s, u_\lambda(s)) + d_1(s)]\, ds + \int_0^t |r'(s)|\, \big(\|u'_\lambda(s)\|_* + \|A(s)\, u_\lambda(s)\|^* + \|f(s)\|^*\big)\, ds\,.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

De (4.18) on a

$$\int_0^T |u'_\lambda(t)|\,dt \leqslant C_3\,, \tag{4.19}$$

$$\|u_\lambda(t)\| \leqslant C_4 \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,, \tag{4.20}$$

où C_3 et C_4 sont des constantes qui ne dépendent pas de λ.

De (4.17), (4.19), (4.20) on a aussi

$$\int_0^T \frac{1}{\lambda^2}\,\|u_\lambda(t) - P_{K(t)}u_\lambda(t)\|^2\,dt \leqslant C_5\,, \tag{4.21}$$

où C_5 est une constante qui ne dépende pas de λ.

De (4.19), (4.20) on peut supposer, sons perdre de généralité,

$$\lim_{\lambda\to 0}{}^{*}\, u'_\lambda(t) = u'(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(O, T; H)\,, \tag{4.22}$$

$$\lim_{\lambda\to 0}\, u_\lambda(t) = u(t) \qquad \text{dans } V\,, \tag{4.23}$$

uniformément sur $[O, T]$ et

$$\lim_{\lambda\to 0} A(t)\,u_\lambda(t) = \chi(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(O, T;\ V^*)\,. \tag{4.24}$$

De (4.21) on a

$$\lim_{\lambda\to 0}\big(u_\lambda(t) - P_{K(t)}\,u_\lambda(t)\big) = 0 \tag{4.25}$$

dans $\mathscr{L}^2(O, T;\ V)$, dont

$$u(t) \in K(t) \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,. \tag{4.26}$$

De (4.17) on a aussi

$$\int_0^t \langle A(s)\,u_\lambda(s),\, u_\lambda(s) - u(s)\rangle\,ds \leqslant \int_0^t \langle f(s),\, u_\lambda(s) - u(s)\rangle\,ds\, -$$

$$- \int_0^t \langle u'_\lambda(s),\, u_\lambda(s) - u(s)\rangle\,ds + \tfrac{1}{2}\,|u_0|^2 - \tfrac{1}{2}\,|u_\lambda(t)|^2 + \int_0^t \langle u'_\lambda(s),\, u(s)\rangle\,ds\,,$$

dont on a

$$\limsup_{\lambda\to 0} \int_0^t \langle A(s)u_\lambda(s), u_\lambda(s)-u(s)\rangle\, ds = 0 \,. \tag{4.27}$$

De (4.24) (4.27) on a

$$\limsup_{\lambda\to 0} \int_0^t \langle A(s)u_\lambda(s), v(s)-u_\lambda(s)\rangle\, ds \leqslant \int_0^t \langle A(s)u(s), v(s)-u(s)\rangle\, ds$$

$\forall v(s)\in \mathscr{L}^2(O, T; V)$ et $\chi(t) = A(t)u(t)$ p.p. sur $[O, T]$.

De (4.17) on a

$$\langle u'_\lambda(t)+A(t)u'_\lambda(t)-f(t), v(t)-u_\lambda(t)\rangle \geqslant 0 \text{ p.p. sur } [O, T] \tag{4.28}$$

pour toutes $v(t)\in \mathscr{L}^p(O, T; V)$ avec $v(t)\in K(t)$ p.p. sur $[O, T]$.

On a alors pour $0\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle u'(t)+A(t)u(t)-f(t), v(t)-u(t)\rangle\, dt \geqslant 0 \,, \tag{4.29}$$

dont on a

$$\langle u'(t)+A(t)u(t)-f(t), v(t)-u(t)\rangle \geqslant 0$$

p.p. sur $[O, T]$.

Nous avons ainsi démontré la partie du résultat concernante l'éxistence dans le cas $u_0\in K(O)$. Possons maintenant à démontrer l'existence de la solution de notre problème dans le cas général.

Soit $u_0\in \overline{K(O)}^H$ et soit $\{u_{0_n}\}\subset K(O)$, telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_{0_n} = u_0 \qquad \text{dans } H \,. \tag{4.30}$$

Considérons le problème

$$(4.31_n)\quad \begin{cases} \langle u'(t)+A(t)u(t)-f(t), v(t)-u(t)\rangle \geqslant 0 & \text{p.p. sur } [O, T] \\ \forall v(t)\in \mathscr{L}^p(O, T; V)\,,\ v(t)\in K(t) & \text{p.p. sur } [O, T] \\ u(t)\in K(t) \quad \text{p.p. sur } [O, T]\,,\ u(O) = u_{0_n} \,. \end{cases}$$

De la partie précédente de la démonstration le problème (4.31_n) a une solution $u_n(t)$.

De (4.31_n) on a

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_n(t)-u_m(t)|^2 \leqslant -\langle A(t)u_n(t)-A(t)u_m(t), u_n(t)-u_m(t)\rangle \leqslant 0 ,$$

dont on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } C(O, T; H) . \tag{4.32}$$

De (4.31_n), en posant $v(t)=0$, on a

$$\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}|u_n(t)|^2 + \alpha\|u_n(t)\|^p \leqslant \langle f(t), u_n(t)\rangle + \lambda|u_n(t)|^2 + \tag{4.33}$$
$$+\beta\|u_n(t)\|^{p-1}\|\bar{v}(t)\| + |\mathrm{d}(t)|\,\|\bar{v}(t)\| ,$$

dont on a

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p \mathrm{d}t \leqslant C_6 , \tag{4.34}$$

où C_6 est une constante qui ne dépende pas de n.

De (4.34), fixé $\delta>0$, on peut choisir $0\leqslant\bar{t}\leqslant\delta$ tel que

$$\|u_n(\bar{t})\| \leqslant C_7(\delta) , \tag{4.35}$$

où $C_7(\delta)$ est une constante qui ne dépende pas de n, mais dépende de δ.

De (4.35) et de la première partie de la démonstration on a

$$\int_\delta^T |u_n'(t)|^2 \mathrm{d}t \leqslant C_8(\delta) , \tag{4.36}$$

où $C_8(\delta)$ est une constante qui ne dépende pas de n, mais dépende de δ.

De (4.34), (4.36) on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\, u_n'(t) = u'(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(\delta, T; H) , \tag{4.37}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\, u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^p(O, T; V) , \tag{4.38}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*}\, A(t)u_n(t) = \tilde{\chi}(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^{p'}(O, T; V^*) . \tag{4.39}$$

De (4.38) on a

$$u(t) \in K(t) \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,.$$

De (4.31_n) on a pour $0 < t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle A(t)\,u_n(t),\, u_n(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t) - u_n'(t),\, u_n(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \langle f(t),\, u_n(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \tfrac{1}{2}\,|u_n(t_1)|^2 - \tfrac{1}{2}\,|u_n(t_2)|^2 + \int_{t_1}^{t_2} \langle u_n'(t),\, u(t)\rangle\,\mathrm{d}t\,,$$

dont

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle A(t)\,u_n(t),\, u_n(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant 0\,. \tag{4.40}$$

De (4.40) on a

$$\tilde{\chi}(t) = A(t)\,u(t) \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,, \tag{4.41}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle Au_n(t),\, v(t) - u_n(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \langle Au(t),\, v(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t \tag{4.42}$$

$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T;\, V)$.

De (4.37), (4.38), (4.39), (4.41), (4.42), on a $\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T;\, V)$ avec $v(t) \in K(t)$ p.p. sur $[O, T]$

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle u'(t) + A(t)\,u(t) - f(t),\, v(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t \geqslant 0\,,$$

dont

$$\langle u'(t) + Au(t) - f(t),\, v(t) - u(t)\rangle \geqslant 0 \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,.$$

La partie du résultat concernante l'existence est ainsi démontrée; passons maintenant à démontrer la partie concernante l'unicité.

Soient $u_1(t)$, $u_2(t)$ deux solutions de notre problème; on a

$$\frac{1}{2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leqslant 0\,,$$

dont $u_1(t) = u_2(t)$.

Le résultat est ainsi complètement démontré.

5. - Démonstration de la partie du Th. 4 concernante l'unicité et du Th. 5.

Démontrons d'abord un lemme qui nous permettra d'avoir un procédé de régularisation semblable à celui utilisée par J. L. LIONS, [**5**], qui dans notre cas n'est plus possible utiliser.

LEMME 10. *Soit $K(t) \subset V$ un fermé convexe mobile défini sur R_+ de retraction $r(t)$ avec $r'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T)$; nous supposons que $K(t)$ soit uniformément borné dans V.*

Soit $u_0 \in K(O)$ et $f(t) \in \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; V)$ avec $f(t) \in K(t)$ p.p. sur R_+.

Considérons le problème

$$
(5.1)\quad \begin{cases} \langle \eta u'(t) + u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle \geqslant 0 & \text{p.p. sur } R_+ \\ \forall v(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; V)\,,\ v(t) \in K(t) & \text{p.p. sur } R_+ \\ u(t) \in K(t) & \text{p.p. sur } R_+ \\ u(O) = u_0\,. \end{cases}
$$

Le problème (5.1) *a une unique solution $u_\eta(t)$ et on a*

$$
(5.2)\qquad \lim_{\eta \to 0} u_\eta(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; H)\,,
$$

$$
(5.3)\qquad \lim_{\eta \to 0}{}^{**}\, u_\eta(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(R_+; V)\,,
$$

$$
(5.4)\qquad \langle u'_\eta(t), u_\eta(t) - f(t) \rangle \leqslant 0\,,
$$

p.p. sur R_+.

Considérons le problème

$$
(5.5)\quad \begin{cases} \langle \eta u'(t) + \varepsilon J u(t) + u(t) - f(t), v(t) - u(t) \rangle \geqslant 0 & \text{p.p. sur } R_+\,, \\ \forall v(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; V)\,,\ v(t) \in K(t) & \text{p.p. sur } R_+ \\ u(t) \in K(t) \quad \text{p.p. sur } R_+\,,\ u(O) = u_0\,. \end{cases}
$$

Pour le Th. 3 (5.5) a, $\forall \varepsilon > 0$, une **solution** $u_{\eta,\varepsilon}(t)$.

Par un procédé semblable à celui utilisé dans le Th. 3 on a

$$\eta^2 \int_0^t |u'_{\eta,\varepsilon}(s)|\, ds \leqslant C_1(t)\,, \tag{5.6}$$

où $C_1(t) \in \mathscr{L}^\infty_{loc}(R_+)$ ne dépende pas de η, ε.

Étant $K(t)$ uniformément borné dans V sur R_+ on a aussi

$$\|u_{\eta,\varepsilon}(t)\| \leqslant C_2 \qquad \text{p.p. sur } R_+\,, \tag{5.7}$$

où C_2 est une constante qui ne dépende pas de η, ε.

De (5.6) et (5.7) on peut supposer sans perdre de généralité

$$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, u'_{\eta,\varepsilon}(t) = u'_\eta(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; H) \tag{5.8}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon J u_{\eta,\varepsilon}(t) = 0 \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(R_+; V^*) \tag{5.9}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{**}\, u_{\eta,\varepsilon}(t) = u_\eta(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(R_+; V) \tag{5.10}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}{}^{*}\, u_{\eta,\varepsilon}(t) = u_\eta(t) \qquad \text{dans } V \tag{5.11}$$

uniformément sur chaque intervalle borné.

De (5.8) (5.9) (5.10) (5.11) on a que $u_\eta(t)$ est solution du problème (5.1); l'unicité du problème (5.1) peut être démontrée par des méthodes standard. Posons dans (5.1) $v(t) = f(t)$, on a

$$\langle u'_\eta(t), u_\eta(t) - f(t)\rangle \leqslant \tfrac{1}{2}|u_\eta(t) - f(t)|^2 \leqslant 0\,. \tag{5.12}$$

On a ainsi démontrée (5.4).

Observons maintenant que de (5.6) (5.8) on a

$$\int_0^t \eta^2 |u'_\eta(s)|^2\, ds \leqslant C_1(t)\,, \tag{5.13}$$

dont on peut supposer, sans perdre de généralité,

$$\lim_{\eta\to 0}{}^{*}\, \eta u'_\eta(t) = \chi(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; H)\,. \tag{5.14}$$

De (5.7) on a aussi

$$\lim_{\eta\to 0} \eta u_\eta(t) = 0 \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(R_+; V)\,. \tag{5.15}$$

De (5.14), (5.15) on a alors

$$\chi(t) = 0 \qquad \text{p.p. sur } R_+ . \tag{5.16}$$

De (5.1) on a

$$|u_\eta(t) - f(t)|^2 \leqslant \eta < u'_\eta(t), f(t) - u_\eta(t)\rangle ,$$

dont

$$\int_0^{\bar t} |u_\eta(t) - f(t)|^2 \, dt \leqslant \int_0^{\bar t} \langle \eta u'_\eta(t), f(t) - u_\eta(t)\rangle \, dt ,$$

dont

$$\int_0^{\bar t} |u_\eta(t) - f(t)|^2 \, dt \leqslant \int_0^{\bar t} \langle \eta u'_\eta(t), f(t)\rangle \, dt + \frac{\eta}{2} |u_0|^2 . \tag{5.17}$$

De (5.14), (5.16), (5.17) on a alors

$$\lim_{\eta \to 0} u_\eta(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; H) .$$

On a ainsi démontrée (5.2).

De (5.7), (5.10) on a

$$\|u_\eta(t)\| \leqslant C_2 \qquad \text{p.p. sur } R_+ . \tag{5.18}$$

De (5.2), (5.18) on a alors

$$\lim_{\eta \to 0}{}^{**} u_\eta(t) = f(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(R_+; V) .$$

Le résultat est ainsi complètement démontré.

Démontrons maintenant un autre lemme:

Lemme 11. *Soit $K(t) \subset V$ un fermé convexe mobile, défini sur R_+, de retraction $r(t)$ avec $r'(t) \in \mathscr{L}^p(O, T)$, $p \geqslant 2$, $A(t)$: $V \to V^*$ monotone borné hemicontinu et tel que, $\forall v \in V$, $A(t)v$ est mesurable sur R_+ dans V^*, $u_0 \in K(O)$, $f(t) \in \mathscr{L}^{p'}_{loc}(R_+; V^*)$.*

Indiquons encore par $A(t)$, $K(t)$, $f(t)$ les prolongées à $[-\delta, +\infty[$, $\delta > 0$, de $A(t)$ par J_p (où J_p: $V \to V^*$ indique l'application de dualité telle que $\|J_p v\| = \|v\|^{p-1}$, $\forall v \in V$), de $K(t)$ par $K(O)$, de $f(t)$ par $J_p u_0$.

Indiquons par $u(t)$ une solution, que nous supposons exister, du problème

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)u(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle\, dt \geq \tfrac{1}{2}|v(t_2) - u(t_2)|^2$$
$$- \tfrac{1}{2}|v(t_1) - u(t_1)|^2, \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2,$$
$$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; V), \ v'(t) \in \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; H),$$
$$v(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } R_+,$$
$$u(t) \in C(R_+; H) \cap \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; V),$$
$$u(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } R_+, \ u(O) = u_0.$$

Indiquons encore par $u(t)$ la prolongée par u_0 à $[-\delta, +\infty]$.

Indiquons $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(-\delta, O; H)$, $\mathscr{V} = \mathscr{L}^p(-\delta, O; V)$, $\mathscr{A}(t)$ l'opérateur de $\mathscr{V}$ en $\mathscr{V}^*$, dual de $\mathscr{V}$, induit par $A(t)$, $\mathscr{K}(t)$ le convexe mobile de $\mathscr{V}$

$$\mathscr{K}(t) = \{v(s)\,|\,v(s) \in \mathscr{L}^p(-\delta, O; V)\, v(s) \in K(t+s) - \delta \leq s \leq 0\},$$

$\tilde{f}(t)$ $(\tilde{u}(t))$ *la fonction de R^+ en $\mathscr{V}^*$ $(\mathscr{V})$ induite par $f(t)$ $(u(t))$,*

$$\tilde{u}_0 = \{v(s)\,|\,v(s) = u_0 \text{ sur } [-\delta, O]\}.$$

La fonction $\tilde{u}(t)$ est alors solution du problème

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \tilde{v}'(t) + \mathscr{A}(t)\tilde{u}(t) - \tilde{f}(t), \tilde{v}(t) - \tilde{u}(t)\rangle\, dt \geq \tfrac{1}{2}|\tilde{v}(t_2) - \tilde{u}(t_2)|^2$$
$$- \tfrac{1}{2}|\tilde{v}(t_1) - \tilde{u}(t_1)|^2, \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2$$
$$\forall \tilde{v}(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; \mathscr{V}), \ \tilde{v}'(t) \in \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; \mathscr{H}),$$
$$\tilde{v}(t) \in \mathscr{K}(t) \text{ p.p. sur } R_+,$$
$$\tilde{u}(t) \in C(R_+; \mathscr{H}) \cap \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; \mathscr{V}),$$
$$\tilde{u}(t) \in \mathscr{K}(t) \text{ p.p. sur } R_+, \ \tilde{u}(O) = \tilde{u}_0.$$

Considérons une fonction $\tilde{v}(t) = v(t; s) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; \mathscr{V})$ avec $\tilde{v}'(t) = (\partial v/\partial t)\cdot$ $\cdot(t; s) \in \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; \mathscr{H})$ et $v(t; s) \in K(t+s)$ p.p. pour $t \in R_+$, $-\delta \leq s \leq 0$.

On a

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle \frac{\partial v}{\partial t}(t; s) + A(t+s)u(t+s) - f(t+s),$$

$$v(t; s) - u(t+s) \rangle \, dt \geqslant \tfrac{1}{2} |v(t_2; s) - u(t_2+s)|^2 - \tfrac{1}{2} |v(t_1; s) - u(t_1+s)|^2$$

pour $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$.

En intégrant sur $[-\delta, O]$, on a alors le résultat.

Passons à démontrer l'unicité de la solution du problème (1.2′) et la formule de dépendence continue du Th. 5, en supposant l'existence d'au moins une solution du problème (1.2′) $\forall u_0 \in \overline{K(O)}^H$ et $f(t) \in \mathscr{L}^p(O, T; V^*)$ et $O \in K(t)$.

Indiquons par $u_1(t)$ et $u_2(t)$ deux solutions de (1.2′) correspondantes aux données $(u_{01}, f_1(t))$, $(u_{02}, f_2(t))$.

Prolongeons $K(t)$ par V, $A(t)$ par J_p, $f_i(t)$ par O à R_+ et indiquons encore par $K(t)$, $A(t)$, $f_i(t)$ ces prolongées, $i = 1, 2$.

Nous observons que $u_i(t)$, $i = 1, 2$, est dans $\overline{K(t)}^H$ pour $t \in [O, T]$, donc $u_i(t)$, $i = 1, 2$, peut être prolongée à une solution, que nous indiquerons encore par $u_i(t)$, du problème

$$(1.2'') \quad \int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)u(t) - f_i(t), v(t) - u(t) \rangle \, dt \geqslant \tfrac{1}{2} |v(t_2) - u(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2} |v(t_1) - u(t_1)|^2$$

$$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; V), \; v'(t) \in \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; H),$$

$$v(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } R_+,$$

$$u(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; V) \cap C(R_+; H),$$

$$u(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } R_+, \; u(O) = u_{0_i}.$$

En posant $v(t) = 0$ dans (1.2″) on a [**2**],

$$(5.19) \qquad \int_t^{t+\delta} \|u_i(s)\|^p \, ds \leqslant M \qquad \text{sur } R_+, \; i = 1, 2.$$

En utilisant les mêmes méthodes et notations du Lemme 9, nous pouvons affirmer que $\tilde{u}_i(t)$ est solution du problème

$$(5.20) \quad \int_{t_1}^{t_2} \langle \tilde{v}'(t) + \mathscr{A}(t)\tilde{u}(t) - \tilde{f}_i(t), \tilde{v}(t) - \tilde{u}(t) \rangle \, dt \geqslant \tfrac{1}{2} |\tilde{v}(t_2) - \tilde{u}(t_2)|^2_{\mathscr{X}} -$$

$$- \tfrac{1}{2} |\tilde{v}(t_2)_1 - \tilde{u}(t_2)|^2_{\mathscr{X}}, \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2,$$

$$\forall \tilde{v}(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; \mathscr{V}), \quad \tilde{v}'(t) \in \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; \mathscr{H})$$

$$\tilde{v}(t) \in \mathscr{K}(t) \text{ p.p. sur } R_+$$

$$\tilde{u}(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; \mathscr{V}) \cap C(R_+; \mathscr{H}),$$

$$\tilde{u}(t) \in \mathscr{K}(t) \text{ p.p. sur } R_+, \quad \tilde{u}(O) = \tilde{u}_{0i}.$$

De (5.19) on a

$$\|\tilde{u}_i(t)\|^2_{\mathscr{V}} \leqslant M \qquad \text{p.p. sur } R_+, \; i = 1, 2,$$

et du Lemme 7 nous pouvons affirmer que la derivée de la retraction de $\mathscr{K}(t)$ est dans $\mathscr{L}^p_{loc}(R_+)$.

Nous pouvons alors affirmer que $\tilde{u}_i(t)$ est aussi solution du problème

$$\text{(5.21)} \qquad \int_{t_1}^{t_2} \langle \tilde{v}'(t) + \mathscr{A}(t)\tilde{u}(t) - \tilde{f}_i(t), v(t) -$$

$$- \tilde{u}(t)\rangle \, dt \geqslant \tfrac{1}{2}|\tilde{v}(t_2) - \tilde{u}(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2}|\tilde{v}(t_1) - \tilde{u}(t_1)|^2, \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$$

$$\forall \tilde{v}(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; \mathscr{V}) \text{ avec } \tilde{v}'(t) \in \mathscr{L}^2_{loc}(R_+; \mathscr{H})$$

$$\tilde{v}(t) \in \mathscr{K}'(t) \text{ p.p. sur } R_+$$

$$\tilde{u}(t) \in \mathscr{L}^p_{loc}(R_+; \mathscr{V}) \cap C(R_+; \mathscr{H}),$$

$$\tilde{u}(t) \in \mathscr{H}'(t) \text{ p.p. sur } R_+, \quad \tilde{u}(O) = \tilde{u}_{0i},$$

$i = 1, 2$, où $\mathscr{K}'(t) = \mathscr{K}(t) \cap B_R$ avec $R = M^{1/p}$.

Du Lemme 1 on peut affirmer que $\mathscr{K}'(t)$ a une retraction avec dérivée dans $\mathscr{L}^p_{loc}(R^+)$.

Indiquons maintenant par $\tilde{w}_\eta(t)$ la régularisée par le Lemme 10 de $\tilde{w}(t) = \frac{1}{2}(\tilde{u}_1(t) + u_2(t))$ avec $\tilde{w}_\eta(O) = w(O)$.

En posant $\tilde{v}(t) = \tilde{w}_\eta(t)$ dans (5.21) on a, $i = 1, 2$,

$$\int_0^t \langle w'_\eta(s) + \mathscr{A}(s)\tilde{u}_i(s) - f_i(s), \tilde{w}_\eta(s) - \tilde{u}_i(s)\rangle \, ds \geqslant \tfrac{1}{2}|\tilde{w}_\eta(t) - \tilde{u}_i(t)|^2 -$$

$$- \tfrac{1}{2}|u_{01} - u_{02}|^2, \qquad t \geqslant 0,$$

dont

$$\int_0^t [\langle \tilde{w}'_\eta(s), \tilde{w}_\eta(s) - \tilde{w}(s)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \mathscr{A}\tilde{u}_1(s), \tilde{w}_\eta(s) - \tilde{u}_1(s)\rangle + \tfrac{1}{2}\langle \mathscr{A}\tilde{u}_2(s), \tilde{w}_\eta(s) - u_2(s)\rangle +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\langle \tilde{f}_1(s), \tilde{w}_\eta(s) - u_1(s)\rangle + \langle \tilde{f}_2(s), \tilde{w}_\eta(s) - u_2(s)\rangle]$$
$$ds \geqslant \tfrac{1}{4}\{|\tilde{w}_\eta(t) - \tilde{u}_1(t)|^2 + |\tilde{w}_\eta(t) - u_2(t)|^2 - 2|u_{01} - u_{02}|^2\},$$

dont en passant à la limite pour $\eta \to 0$, on a

$$\tfrac{1}{2}\int_{-\delta}^{0} |u_1(t+s) - u_2(t+s)|^2 ds \leqslant \tag{5.22}$$
$$\leqslant \frac{\delta}{2}|u_{01} - u_{02}|^2 + \int_0^t \Big(\int_{-\delta}^{0} \langle f_1(\eta + s) - f_2(\eta + s), u_1(\eta + s) - u_2(\eta + s)\rangle d\eta\Big) ds .$$

En divisant pour δ et en passant à la limite pour $\delta \to 0$, on a alors

$$\tfrac{1}{2}|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leqslant \tfrac{1}{2}|u_{01} - u_{02}|^2 + \int_0^t \langle f_1(s) - f_2(s), u_1(s) - u_2(s)\rangle ds . \tag{5.23}$$

De (5.23) on a le résultat pour $u_{01}, u_{02} \in K(O)$. Démontrons maintenant que (5.23) reste valable dans le cas général.

Soient donc $u_{01}, u_{02} \in \overline{K(O)}^H$; en posant $v(t) = O$ dans (1.2′) on a

$$\int_0^T \|u_i(t)\|^p dt \leqslant \text{Cst.} .$$

Donc, $\forall \delta > 0$, il y a $\bar{t} \in [O, \delta]$, tel que $u_i(\bar{t}) \in K(\bar{t})$, $i = 1, 2$.

De (5.23) on a alors

$$\tfrac{1}{2}|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leqslant \tfrac{1}{2}|u_1(\bar{t}) - u_2(\bar{t})|^2 + \int_{\bar{t}}^t \langle f(s) f_1(s) - f_2(s), u_1(s) - u_2(s)\rangle ds \tag{5.24}$$

pour $t \geqslant \bar{t}$.

De (5.24) en passant à la limite pour $\bar{t} \to 0$, on a

$$\tfrac{1}{2} u_1(t) - u_2(t)|^2 \leqslant \tfrac{1}{2}|u_{01} - u_{02}|^2 + \int_0^t \langle f_1(s) - f_2(s), u_1(s) - u_2(s)\rangle ds , \tag{5.25}$$

dont le résultat.

Maintenant si on a

$$\langle A(t)v_1 - A(t)v_2,\ v_1 - v_2\rangle \geqslant \alpha\|v_1 - v_2\|^p - \psi(|v_1 - v_2|)$$

en repetant la démonstration de (5.25) on a

$$(5.25') \quad \tfrac{1}{2}|u_1(t) - u_2(t)|^2 \leqslant \tfrac{1}{2}|u_{01} - u_{02}|^2 + \int_0^t [\langle f_1(s) - f_2(s),\ u_1(s) - u_2(s)\rangle - \\ - \alpha\|u_1(s) - u_2(s)\|^p + \psi(|u_1(s) - u(s)|)]\, ds\,.$$

De (5.25) (5.25′) on a facilement la partie concernante l'unicité du Th. 4 et le Th. 5.

Nous observons que, pour le Lemme 2, on peut toujours supposer, sans perdre de géneralité, $O \in K(t)$ pour $t \in [O, T]$, la démonstration dans le cas général étant la même.

6. - Démonstration de la partie concernante l'existence du Th. 4.

Nous supposons $O \in K(t)$, $t \in [O, T]$, étant la démonstration dans le cas général étant la même pour le Lemme 2.

La démonstration de la partie concernante l'existence du Th. 4 est faite par penalisation.

Supposons d'abord $u_0 \in K(O)$.

Considérons le problème pénalisé

$$(6.1) \quad \begin{cases} u'(t) + A(t)\,u(t) + \dfrac{1}{\lambda} J\big(u(t) - P_{K(t)}\,u(t)\big) = f(t) \\ u(O) = u_0\,. \end{cases}$$

Le problème (6.1) a une unique solution $u_\lambda(t)$, [**5**].

De (6.1) on a

$$(6.2) \quad \frac{1}{2}\frac{d}{dt}|u_\lambda(t)|^2 + \alpha\|u_\lambda(t)\|^p \leqslant \langle f(t), u_\lambda(t)\rangle + \beta\|\bar v(t)\|\ \|u_\lambda(t)\|^{p-1} \\ + |d(t)|\,\|\bar v(t)\| + \lambda|u_\lambda(t)|^2\,.$$

De (6.2) on a

$$(6.3) \quad |u_\lambda(t)| \leqslant C_1 \qquad \text{p.p. sur } [O, T]$$

$$(6.4) \quad \int_0^T \|u_\lambda(t)\|^p dt \leqslant C_1$$

où C_1 est une constante qui ne dépende pas de λ.

De (6.4) on peut supposer sans perdre de généralité

$$\lim_{\lambda\to 0}{}^{*} u_\lambda(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^p(O, T; V)\,. \tag{6.5}$$

Prolongeons maintenant $K(t)$ par V, $A(t)$ par J_p et $f(t)$ par O à R_+ et indiquons encore par $K(t)$, $A(t)$, $f(t)$ ces prolongées.

Nous observons que la solution de (6.1) sur R_+ est une prolongée de $u_\lambda(t)$ à R^+, que nous indiquerons encore par $u_\lambda(t)$.

De (6.1) on a facilement, pour $0 < \delta < T$,

$$\Big(\int_t^{t+\delta} \|u_\lambda(s)\|^p\,ds\Big)^{1/p} \leqslant C_2 \tag{6.6}$$

p.p. sur R_+, où C_2 est une constante qui ne dépende pas de λ.

Indiquons $\mathscr{H} = \mathscr{L}^2(-\delta, O; H)$, $\mathscr{V} = \mathscr{L}^p(-\delta, O; V)$ $J: \mathscr{V} \to \mathscr{V}^*$, $\mathscr{V}^*$ dual de $\mathscr{V}$, l'opérateur induit par J, $M = \max(\|u_0\|, C_2)$.

En adoptant les mêmes notations qu'au paragraphe précédent et posé $\mathscr{K}(t) = B_{2M}$, on a

$$\begin{cases} \tilde{u}'_\lambda(t) + \mathscr{A}(t)\,\tilde{u}_\lambda(t) + \dfrac{1}{\lambda}\mathscr{J}\big(\tilde{u}_\lambda(t) - P_{\mathscr{K}'(t)}\,\tilde{u}_\lambda(t)\big) = \tilde{f}(t)\,, \\ \tilde{u}_\lambda(O) = \tilde{u}_0\,. \end{cases} \tag{6.7}$$

De (6.5) on a aussi

$$\|\tilde{u}_\lambda(t)\|_{\mathscr{V}} \leqslant M \qquad \text{p.p. sur } R_+\,, \tag{6.8}$$

dont on peut supposer sans perdre de généralité,

$$\lim{}^{**} \tilde{u}_\lambda(t) = \tilde{u}(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(R_+; \mathscr{V})\,. \tag{6.9}$$

De (6.7), (6.8) on a facilement

$$\int_t^{t+1} \frac{1}{\lambda}\big\langle \mathscr{J}\big(\tilde{u}_\lambda(s) - P_{\mathscr{K}'(s)}\tilde{u}_\lambda(s)\big), \tilde{u}_\lambda(s)\big\rangle\,ds \leqslant C_3\,, \tag{6.10}$$

où C_3 est une constante qui ne dépende pas de λ.

De (6.10) on a facilement

$$\tilde{u}(t) \in \mathscr{K}'(t) \qquad \text{p.p. sur } R_+\,.$$

Indiquons par $\tilde{u}_\eta(t)$ la régularisée de $\tilde{u}(t)$ faite par la méthode du Lemme 10 avec $\tilde{u}_\eta(O) = \tilde{u}_0$; on a

$$\int_0^t \langle \mathscr{A}(s)\tilde{u}_\lambda(s), \tilde{u}_\lambda(s) - \tilde{u}_\eta(s)\rangle\, ds + \tfrac{1}{2}|\tilde{u}_\lambda(t) - \tilde{u}_\eta(t)|^2 \leqslant \int_0^t \langle \tilde{f}(s), \tilde{u}_\lambda(s) - \\ - \tilde{u}_\eta(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle \tilde{u}'_\eta(s), \tilde{u}_\eta(s) - \tilde{u}_\lambda(s)\rangle\, ds\,,$$

dont

$$\int_0^t \langle \mathscr{A}(s)\tilde{u}_\lambda(s), \tilde{u}_\lambda(s) - \tilde{u}(s)\rangle\, ds + \tfrac{1}{2}|\tilde{u}_\lambda(t) - \tilde{u}(t)|^2 \leqslant \tfrac{1}{2}|\tilde{u}(t) - \tilde{u}_\eta(t)|^2 + \\ + \int_0^t \langle \mathscr{A}(s)\tilde{u}_\lambda(s), \tilde{u}_\eta(s) - \tilde{u}(s)\rangle\, ds + \int_0^t \langle \tilde{u}'_\eta(s), \tilde{u}_\eta(s) - \tilde{u}_\eta(s)\rangle\, ds\,.$$

De (6.9) on peut supposer sans perdre de généralité

(6.12) $$\lim_{\lambda\to 0}{}^{*}\, \mathscr{A}(t)\tilde{u}_\lambda(t) = \tilde{\chi}(t)$$

dans $\mathscr{L}^{p'}_{loc}(R_+; \mathscr{V}^*)$.

De (6.12) on peut supposer sans perdre de généralité

$$\limsup_{\lambda\to 0}\Big[\int_0^t \langle \mathscr{A}(s)\tilde{u}_\lambda(s), \tilde{u}_\lambda(s) - \tilde{u}(s)\rangle\, ds + \tfrac{1}{2}|\tilde{u}_\lambda(t) - \tilde{u}(t)|^2\Big] \leqslant \tfrac{1}{2}|\tilde{u}(t) - \tilde{u}_\eta(t)|^2 + \\ + \int_0^t \langle \tilde{\chi}(s), \tilde{u}_\eta(s) - \tilde{u}(s)\rangle\, ds\,,$$

dont

$$\limsup_{\lambda\to 0}\Big[\int_0^t \langle \mathscr{A}(s)\tilde{u}_\lambda(s), \tilde{u}_\lambda(s) - \tilde{u}(s)\rangle\, ds + \tfrac{1}{2}|\tilde{u}_\lambda(t) - \tilde{u}(t)|^2\Big] \leqslant 0\,,$$

dont

$$\lim_{\lambda\to 0}\int_0^t \langle \mathscr{A}(s)\tilde{u}_\lambda(s), \tilde{u}_\lambda(s) - \tilde{u}(s)\rangle\, ds = 0\,,$$

(6.13) $$\lim_{\lambda\to 0}\tilde{u}_\lambda(t) = \tilde{u}(t) \qquad \text{dans } \mathscr{H}\,.$$

On a alors

(6.14) $$\mathscr{A}\tilde{u}(t) = \tilde{\chi}(t) \qquad \text{p.p. sur } R_+\,.$$

Nous observons que de (6.13) on a

(6.15) $$\lim_{\lambda\to 0} u_\lambda(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(O, T; H)\,.$$

De (6.4) on peut supposer sans perdre de généralité

$$\lim_{\lambda\to 0} A(t)\,u_\lambda(t) = \chi'(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^{p'}(O, T;\ V^*)\,. \tag{6.16}$$

On peut alors conclure

$$\limsup_{\lambda\to 0} \int_{t_1}^{t_2} \langle A(t)\,u_\lambda(t),\, v(t)-u_\lambda(t)\rangle\, \mathrm{d}t \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \langle A(t)\,u(t),\, v(t)-u(t)\rangle\, \mathrm{d}t\,, \tag{6.17}$$

$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, $v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T;\ V)$.

De (6.15), (6.16), (6.17) on a

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)\,u(t) - f(t),\, v(t)-u(t)\rangle\, \mathrm{d}t \geqslant \tag{6.18}$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2}\,|v(t_2)-u(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2}\,|v(t_1)-u(t_1)|^2$$

pour $t_1, t_2 \in [O, T] - \Delta$, Δ ensemble negligeable avec $O \notin \Delta$

$$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T;\ V) \qquad \text{avec } v'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T;\ H)\,,$$

$$v(t) \in K(t) \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,.$$

Démonstrons maintenant que $u(t) \in C(O, T;\ H)$.

Considérons le problème

$$\begin{cases} \langle \eta\big(u_\eta'(t) + CJ_p u_\eta(t)\big) + u_\eta(t) - u(t),\, v(t) - u_\eta(t)\rangle \geqslant 0 & \text{p.p. sur } [O, T]\,,\\ \forall v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T;\ V) \qquad \text{avec } v(t) \in K(t) & \text{p.p. sur } [O, T]\,,\\ u(t) \in K(t) \qquad \text{p.p. sur } [O, T]\,,\ u(O) = u_0\,. \end{cases} \tag{6.19}$$

Pour le Th. 3 le problème (6.19) a une solution $u_\eta(t)$ avec

$$\eta^2 \int_0^T |u_\eta'(t)|^2\, \mathrm{d}t \leqslant C_4\,, \tag{6.20}$$

$$\langle u_\eta'(t) + CJ_p u_\eta(t),\, u_\eta(t) - u(t)\rangle \leqslant 0\,, \tag{6.21}$$

p.p. sur $[O, T]$, où C_4 est une constante qui ne dépende pas de η.

Posons dans notre inéquation $v(t) = u_\eta(t)$, on a

$$\int_0^T [\langle u'_\eta(s) + CJ_p u_\eta(s), u_\eta(s) - u(s)\rangle +$$
$$+ \langle A(s) u_\eta(s) - CJ_p u_\eta(s), u_\eta(s) - u(s)\rangle +$$
$$+ \langle f(s), u_\eta(s) - u(s)\rangle] \, ds \geqslant 0 , \qquad t \in [O, T] - \varDelta ,$$

dont

$$\int_0^T [\langle u'_\eta(s) + CJ_p u_\eta(s), u_\eta(s) - u(s)\rangle +$$
$$+ \langle A(s) u_\eta(s) - CJ_p u_\eta(s), u_\eta(s) - u(s)\rangle +$$
$$+ \langle f(s), u_\eta(s) - u(s)\rangle] \, ds \geqslant 0 .$$

De (6.20) on a alors

$$\int_0^T \langle A(s) u_\eta(s) - CJ_p u_\eta(s) - f(s), u_\eta(s) - u(s)\rangle \, ds \geqslant 0 ,$$

dont

$$\int_0^T [\beta \|u_\eta(s)\|^p + |\mathrm{d}(t)| \, \|u_\eta(s)\| + \beta \|u_\eta(s)\|^{p-1} \|u(s)\| +$$
$$+ |\mathrm{d}(t)| \, \|u(s)\| - C\|u_\eta(s)\|^p + C\|u_\eta(s)\|^{p-1} \|u(s)\|] \, ds \geqslant 0 ,$$

dont

$$C_5 + (C_6 - C) \int_0^T \|u_\eta(s)\|^p ds \geqslant 0 , \tag{6.22}$$

où C_6 est une constante qui ne dépende pas de C et C_5 est une constante qui dépende de C, mais reste bornée si C varie dans un ensemble borné.

De (6.22), en supposant $C > C_6$, ce qui est toujours possible à avoir, on a

$$\int_0^T \|u_\eta(t)\|^p dt \leqslant C_7 \tag{6.25}$$

où C_7 est une constante qui ne dépende pas de η.

De (6.19) on a

$$(6.24)\qquad \int_0^T |u_\eta(s)-u(s)|^2\,ds \leqslant \int_0^T \eta\langle u'_\eta(s)+CJ_p u_\eta(s),\, u(s)-u_\eta(s)\rangle\,ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\eta}{2}|u_0|^2 + \int_0^T \langle \eta u'_\eta(s),\, u(s)\rangle\,ds + \int_0^T \langle \eta C J_p\, u_\eta(s),\, u(s)\rangle\,ds\,.$$

De (6.20), (6.23) on a

$$\lim_{\eta\to 0}{}^* \eta\, u'_\eta(t) = 0 \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(O,T;H)\,,$$

$$\lim_{\eta\to 0} \eta J_p u_\eta(t) = 0 \qquad \text{dans } \mathscr{L}^{p'}(O,T;V^*)\,.$$

De (6.24) on a alors

$$\lim_{\eta\to 0} u_\eta(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^2(O,T;H)\,,$$

$$\lim_{\eta\to 0}{}^* u_\eta(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^p(O,T;V)\,.$$

Posons alors dans (6.18) $v(t)=u_\eta(t)$ on a

$$\int_0^t \langle A(s)u(s)-CJ_p u_\eta(s)-f(s),\, u_\eta(s)-u(s)\rangle\,ds \geqslant \tfrac{1}{2}|u_\eta(t)-u(t)|^2\,,$$

dont

$$(6.25)\qquad \int_0^t \langle A(s)u(s)-CJ_p u(s)-f(s),\, u_\eta(s)-u(s)\rangle\,ds \geqslant \tfrac{1}{2}|u_\eta(t)-u(t)|^2\,.$$

De (6.25) on a

$$(6.26)\qquad \lim_{\eta\to 0} u_\eta(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^\infty(O,T;H)\,,$$

donc $u(t)\in C(O,T;H)$.

Étant $u(t)\in C(O,T;H)$, on peut affirmer que la inéquation (6.18) est valable pour $t_1, t_2 \in [O,T]$. Le résultat est ainsi démontré pour $u_0\in K(O)$.

Passons au cas $u_0 \in \overline{K(O)}^H$.
Soit $\{u_{0_n}\}$ une suite dans $K(O)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} u_{0_n} = u_0 \qquad \text{dans } H . \tag{6.26}$$

Considérons le problème

$$\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)u(t) - f(t), v(t) - u(t)\rangle \, dt \geq \tfrac{1}{2}|v(t_2) - u(t_2)|^2 - \tag{6.27$_n$}$$

$$- \tfrac{1}{2}|v(t_1) - u(t_1)|^2 , \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq T ,$$

$$\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T; V) \text{ avec } v'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T; H)$$

$$v(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } [0, T]$$

$$u(t) \in C(O, T; H) \cap \mathscr{L}^p(O, T; V) ,$$

$$u(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } [O, T] , \; u(O) = u_{0_n} .$$

Pour la partie précédente (6.27$_n$) a une solution $u_n(t)$, du n. **5** on a

$$|u_n(t) - u_m(t)| \leq |u_{0_n} - u_{0_m}| \qquad t \in [O, T] . \tag{6.28}$$

De (6.27$_n$) on a

$$\int_0^T \|u_n(t)\|^p \, dt \leq \text{Cst} . \tag{6.29}$$

De (6.28), (6.29) on a

$$\lim_{n\to\infty} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } C(O, T; H) \tag{6.30}$$

$$\lim_{n\to\infty}{}^{*} u_n(t) = u(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^p(O, T; V) \tag{6.31}$$

$$\lim_{n\to\infty} A(t)u_n(t) = \bar{\chi}(t) \qquad \text{dans } \mathscr{L}^{p'}(O, T; V^*) . \tag{6.32}$$

Considérons $\delta > 0$, de (6.29) on peut determiner $\bar{t} \in [O, \delta]$, tel que

$$\|u_n(\bar{t})\| \leq \text{Cst} . \tag{6.33}$$

Par le même procédé utilisé pour démontrer (6.14) et (6.17) on peut démontrer

$$\tilde{\chi}(t) = A(t)\,u(t) \tag{6.34}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \int_{t_1}^{t_2} \langle A(t)\,u_n(t),\, v(t) - u_n(t)\rangle\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{t_1}^{t_2} \langle A(t)\,u(t),\, v(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t\,, \tag{6.35}$$

$0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T$, $v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T;\, V)$.

De (6.30) (6.31) (6.32) (6.34) (6.35) on a que $u(t)$ est solution du problème

$$\begin{aligned} &\int_{t_1}^{t_2} \langle v'(t) + A(t)\,u(t) - f(t),\, v(t) - u(t)\rangle\,\mathrm{d}t \geqslant \\ &\geqslant \tfrac{1}{2}\,|v(t_2) - u(t_2)|^2 - \tfrac{1}{2}\,|v(t_1) - u(t_1)|^2\,, \qquad 0 \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T \\ &\forall v(t) \in \mathscr{L}^p(O, T;\, V)\,,\ v'(t) \in \mathscr{L}^2(O, T;\, H), \\ &v(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } [O, T]\,, \\ &u(t) \in C(O, T;\, H) \cap \mathscr{L}^p(O, T;\, V)\,, \\ &u(t) \in K(t) \text{ p.p. sur } [O, T]\,,\ u(O) = u_0\,. \end{aligned} \tag{6.36}$$

Le résultat est ainsi completement démontré.

7. - Exemples.

Soit $\Omega \subset R_n$ un ouvert borné de frontière Γ régulière, Ω étant d'une seule coté de Γ.

(*a*)

Posons $V = W_0^{1,p}(\Omega)$, $H = \mathscr{L}^2(\Omega)$, $A\colon V \to V^*$ défini par la relation

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,\mathrm{d}x$$

$p \geqslant 2$, $v(x), u(x) \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Soient

$$\alpha_1(t, x),\ \beta_1(t, x) \in \mathscr{L}^p(O, T;\ W^{1,p}(\Omega))$$

avec

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(t, x)\,, \qquad \frac{\partial \beta_1}{\partial t}(t, x) \in \mathscr{L}^p(O, T;\ W^{1,p}(\Omega))$$

et $\alpha_2(t, x)$, $\beta_2(t, x) \in C(O, T;\ W^{1,p}(\Omega))$ et telles que p.p. sur Ω $\alpha_2(t, x)$ et $\beta_2(t, x)$ sont croissantes en t.

Posons $\alpha(t, x) = \alpha_1(t, x) + \alpha_2(t, x)$, $\beta(t, x) = \beta_1(t, x) - \beta_2(t, x)$ et supposons $\alpha(t, x) \geqslant 0$, $\beta(t, x) \geqslant 0$ sur Γ p.p., $t \in [O, T]$ et $\alpha(t, x) > \beta(t, x)$ sur Ω p.p., $t \in$ $\in [O, T]$.

Posons

$$K(t) = \{v(x)\,|\,v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega),\ \beta(t, x) \leqslant v(x) \leqslant \alpha(t, x) \ \text{p.p. sur } \Omega\}\,.$$

Il est facil de voir que les hypothèses des Ths. 3, 4, 5 sont vérifiées et nous observons que les problèmes (1.2) (1.2′) sont formellement equivalentes au problème

$$(7.1)\quad \left\{\begin{array}{ll} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right) = & \\ = f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [O, T] X \Omega \text{ où } \beta(t, x) < u(t, x) < \alpha(t, x)\,, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right) \leqslant & \\ \leqslant f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [O, T] X \Omega \text{ où } u(t, x) = \alpha(t, x)\,, & \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right) \geqslant & \\ \geqslant f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [O, T] X \Omega \text{ où } u(t, x) = \beta(t, x)\,, & \\ u(t, x) = 0 & \text{p.p. sur } [O, T] X \Gamma\,, \\ u(O, x) = u_0(x) & \text{p.p. sur } \Omega\,. \end{array}\right.$$

(*b*)

Soient V, H, A comme dans (*a*) et soit $\psi_1(t, x) \in C(O, T; \mathscr{L}^p(\Omega))$ avec $(\partial\psi_1/\partial t)(t, x) \in \mathscr{L}^p(O, T; \mathscr{L}^p(\Omega))$ et $\psi_2(t, x) \in C(O, T; \mathscr{L}^p(\Omega))$ monotone croissante en t p.p. sur Ω.

Posons $\psi(t, x) = \psi_1(t, x) + \psi_2(t, x)$, en supposant $\psi(t, x) > 0$, et

$$K(t) = \{v(x) \,|\, v(x) \in W_0^{1,p}(\Omega), \ |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant \psi(t, x) \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Il est facil de vérofier que les hypothèses des Ths. 3, 4, 5 sont valables et nous observons que les problèmes (1.2), (1.2′) sont formellement equivalentes au problème

$$(7.2)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t, x)\right) - f(t, x)\right] \\ [|\operatorname{grad} u(t, x)| - \psi(t, x)] = 0\,, \qquad \text{p.p. sur } [O, T]X\Omega\,, \\ |\operatorname{grad} u(t, x)| \leqslant \psi(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [O, T]X\Omega\,, \\ u(t, x) = 0 \qquad \text{p.p. sur } [O, T]X\Gamma\,, \\ u(O, x) = u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega\,. \end{cases}$$

(*c*)

Soit $V = W^{1,p}(\Omega)$, $H = \mathscr{L}^2(\Omega)$, $A: V \to V^*$ défini par la rélation

$$\langle Au, v\rangle = \int_\Omega \sum_{i=1}^{n} \left|\frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\right|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\, \frac{\partial v}{\partial x_i}(x)\,dx$$

$$p \geqslant 2\,, \quad u(x), v(x) \in W^{1,p}(\Omega)\,.$$

Soient $\alpha_1(t, x), \beta_1(t, x) \in \mathscr{L}^p(O, T; W^{1,p}(\Omega))$ avec

$$\frac{\partial \alpha_1}{\partial t}(t, x)\,, \ \frac{\partial \beta_1}{\partial t}(t, x) \in \mathscr{L}^p(O, T; W^{1,p}(\Omega))\,,$$

$$\alpha_2(t, x)\,, \quad \beta_2(t, x) \in C(O, T; W^{1,p}(\Omega))$$

et telles que p.p. sur Γ sont croissantes en t.

Posons $\alpha(t, x) = \alpha_1(t, x) + \alpha_2(t, x)$, $\beta(t, x) = \beta_1(t, x) - \beta_2(t, x)$ et supposons $\alpha(t, x) \geqslant \beta(t, x)$ p.p. sur Γ.

Posons

$$K(t) = \{v(x) \,|\, v(x) \in W^{1,p}(\Omega),\ \beta(t, x) \leqslant v(x) \leqslant \alpha(t, x) \text{ p.p. sur } \Gamma\}.$$

Il est facil de vérifier que les hypothèses des Ths. 3, 4, 5 sont valables et que les problèmes (1.2), (1.2′) sont formellement equivalentes au problème

$$(7.3)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t}(t, x) - \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \right) = \\ = f(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [O, T] \times \Omega\,, \\ \left[\sum\limits_{i=1}^{n} \left| \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \right|^{p-2} \dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t, x) \cos(\nu, x_i) \right] \cdot \\ \cdot \big(u(t, x) - \alpha(t, x)\big)\big(u(t, x) - \beta(t, x)\big) = 0 \qquad \text{p.p. sur } [O, T] \times \Gamma\,, \\ \beta(t, x) \leqslant u(t, x) \leqslant \alpha(t, x) \qquad \text{p.p. sur } [O, T] \times \Gamma\,, \\ u(O, x) = u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega\,, \end{cases}$$

où ν indique la normale à Γ extérieure à Ω.

(*d*)

Considérons pour $t \in [O, T]$ une famille d'ouverts bornés de R^n $\Omega_t \neq \emptyset$ de frontière régulière Γ_t et d'une seule coté de Γ_t; soit $\Omega_t \subset \Omega$ où Ω est un ouvert borné de R^n de frontière régulière Γ et d'une seule coté de Γ.

Supposons que la fonction $t \to \bar{\Omega}_t$ soit à retraction $r(t)$ avec $r'(t) \in \mathscr{L}^p(O\ T)$ et que le capacités des hypersurfaces Γ_t soient bornées.

Indiquons $\bar{\Omega} = \bigcup\limits_{t \in [O, T]} \{t\} \times \Omega_t$.

Soient V, H, A, $\psi(t, x)$ comme dans (*b*).

Posons

$$K(t) = \{v(x) \,|\, v(x) \in W^{1,p}(\Omega),\ |\operatorname{grad} v(x)| \leqslant \psi(t, x) \text{ p.p. sur } \Omega,\ v(x) = 0 \text{ sur } \Omega - \bar{\Omega}_t\}$$

Il est facil de voir que les hypothèses des Ths. 3, 4, 5 sont vérifiées et nous observons que les problèmes (1.2), (1.2′) sont formellement equivalentes au problème

$$(7.4)\quad \begin{cases} \left[\dfrac{\partial u}{\partial t}(t,x)-\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\right|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(t,x)\right)-f(t,x)\right]\cdot \\ \cdot\left[|\operatorname{grad} u(t,x)|-\psi(t,x)\right]=0 \qquad \text{p.p. sur } \bar{\Omega}\,, \\ u(t,x)=0 \qquad \text{p.p. sur } \partial\hat{\Omega}-[(\bar{\Omega}_0\cup\bar{\Omega}_T)\cap\partial\hat{\Omega}]\,, \\ u(O,x)=u_0(x) \qquad \text{p.p. sur } \Omega_0\,. \end{cases}$$

Remarque. Nous signalons ici que un résultat du type du Th. 4 pour des inéquations de NAVIER-STOKES est obtenu dans un travail de l'A., Boll. U.M.I.(4), 11, (1975) p. 309-321.

Pour ce qui concerne les inéquations paraboliques avec contraintes sur $u'(t)$ on peut déduir un résultat d'existence et unicité du Th. 1 dans le cas où le convexe fermé $K(t)$ est considéré dans H (dans ce cas voir aussi le résultat de l'A. *Sur les inéquations de évolution avec convexe dépendant du temps*, Ric. di Mat., vol. XXIII, 1974, p. 1-48); pour le cas du convexe fermé mobile dans V un résultat d'existence et unicité est obtenu par l'A., Boll. U.M.I. (4), 9, p. 268-280.

Pour ce qui concerne la solution forte des inéquations du type de NAVIER-STOKES et des ondes relatives à un convexe fermé mobile de H on a seulement des résultats partiels de l'A., mais le problème dans le cas d'un fermé convexe mobile de V reste ouvert.

Bibliographie.

[1] H. ATTOUCH, P. BENILAN, A. DAMLAMIAN et C. PICARD, à paraitre.

[2] M. BIROLI, *Sur les solution bornées ou presque périodiques des équations multivoques d'évolution sur un espace de Hilbert*, Ricerche Mat. (21), **1** (1972), 17-47.

[3] M. BIROLI, *Sur un'inéquation parabolique avec convexe dépendant du temps*, Ricerche Mat., **23** (1974), 203-222.

[4] H. BRÉZIS, *Un problème d'évolution avec contraintes unilaterales dépendent du temps*, Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, A **274**,**4** (1972), 310-313.

[5] J. L. LIONS, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Gauthier Villars 1969.

[6] J. J. MOREAU, *Rafle par un convexe variable - I, Séminaire d'Analyse Convexe,* Montpellier, Exposé, **15** (1971), 43.

[7] J. J. MOREAU, *Rafle par un convexe variable - II, Séminaire d'Analyse Convexe,* Montpellier, Exposé, **3** (1972), 36.

[8] J. J. MOREAU, *Retraction d'une multiapplication, Séminaire d'Analyse Convexe,* Montpellier, Exposé, **13** (1972), 89.

[9] J. J. MOREAU, *Intersection de deux convexes mobiles, Séminaire d'Analyse Convexe,* Montpellier, Exposé, **1** (1973), 26.

[10] J. C. PERALBA, *Un problème d'évolution relatif à des opérateurs sousdifférentielles dépendants du temps, Séminaire d'Analyse Convexe,* Montpellier, Exposé, **6** (1972), 16.

[11] D. WEXLER, *Prox-mappings associated with a pair of Legendre conjugate fonctions,* R.I.R.O. (1973), 39-65.

* * *