Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 159-173

MARIA FERRO (*)

Caratteristiche dei singrammi orientati. (**)

1. – Com'è noto un singramma orientato finito si può definire come l'ente costituito da due insiemi S e V e da due applicazioni φ_1 e φ_2 di S in V.

Diamo le seguenti definizioni.

Def. 1. Si definisce singramma orientato connesso un singramma orientato tale che ogni suo vertice sia collegato ad ogni altro mediante un percorso.

Def. 2. Un singramma orientato si dice strettamente connesso se, comunque presi due vertici V_i e V_j, esiste un percorso con origine in V_i e termine in V_j.

Def. 3. Un singramma orientato si dice semplice quando è privo di cappi e di spigoli in parallelo.

Def. 4. Un singramma orientato si dice fortemente semplice se il relativo singramma non orientato è semplice.

Nel seguito considereremo soltanto singrammi orientati, finiti, strettamente connessi, fortemente semplici.

2. – Sia dato un singramma G e siano n ed m rispettivamente il numero dei suoi vertici e quello degli spigoli.

Ad ogni vertice V_i appartenente a G si può associare una coppia ordinata di interi positivi (f_i, g_i), detti rispettivamente « grado locale di entrata » e « grado locale di uscita » di V_i.

(*) Indirizzo: Corso delle Province, 50, 95127 Catania, Italia.
(**) Ricevuto: 22-V-1972.

L'intero f_i rappresenta il numero degli spigoli che « entrano » in V_i, l'intero g_i il numero degli spigoli che « escono » da V_i.

Si osservi che $f_i + g_i = \varrho(V_i)$, dove $\varrho(V_i)$ è il « grado locale » di V_i. Nel seguito per caratteristica di V_i intenderemo la coppia (f_i, g_i).

Def. 5. Si definisce caratteristica dei vertici una n-pla di coppie ordinate:

$$[(f_1, g_1), (f_2, g_2), \ldots, (f_n, g_n)]$$

dove (f_i, g_i) è la caratteristica di V_i.

Con la seguente annotazione abbreviata:

$$[(a, b)_r, (c, d)_s, \ldots]$$

intenderemo dire che vi sono r vertici di caratteristica (a, b), s vertici di caratteristica (c, d), ecc.

A volte indicheremo i gradi locali di V_i rispettivamente con f_{v_i} e g_{v_i}.

In modo analogo ad ogni spigolo s_j si può associare una quaterna ordinata di numeri interi (h_j, k_j, p_j, q_j), con $h_j > 0$, $k_j > 0$, $p_j \geqslant 0$, $q_j \geqslant 0$. L'intero h_j rappresenta il numero degli spigoli x che « precedono » s_j, cioè tali che $\varphi_2(x) = \varphi_1(s_j)$; k_j il numero degli spigoli x che « seguono » s_j, cioè $\varphi_2(s_j) = \varphi_1(x)$; p_j il numero degli spigoli x che si « allontanano » da s_j, cioè $\varphi_1(x) = \varphi_1(s_j)$; q_j il numero degli spigoli x che si « avvicinano » a s_j, cioè tali che $\varphi_2(x) = \varphi_2(s_j)$.

Si osservi che:

— $h_j + k_j + p_j + q_j = H$, dove H è la « specie » di s_j;

— se s_j va da V_i a V_w si ha:

$$f_{v_i} = h_j; \qquad g_{v_i} = p_j + 1$$

$$f_{v_w} = q_j + 1; \qquad g_{v_w} = k_j\,.$$

Nel seguito per caratteristica di s_j intenderemo la quaterna (h_j, k_j, p_j, q_j).

Def. 6. Si definisce caratteristica degli spigoli una m-pla di quaterne ordinate:

$$[(h_1, k_1, p_1, q_1), \ldots, (h_m, k_m, p_m, q_m)]$$

dove (h_j, k_j, p_j, q_j) è la caratteristica di s_j.

Con la seguente annotazione abbreviata:

$$[(h,k,p,q)_r,\ (l,m,n,v)_s,\ \ldots]$$

intenderemo dire che esistono r spigoli di caratteristica (h,k,p,q), s spigoli di caratteristica (l,m,n,v), ecc.

A volte indicheremo gli elementi della caratteristica di uno spigolo s_j con h_{s_j}, k_{s_j}, p_{s_j}, q_{s_j} e la sua caratteristica con $(h,k,p,q)_{s_j}$.

Def. 7. Si definisce caratteristica completa dei vertici l'insieme delle coppie ordinate (f_i, g_i) relative a tutti i vertici V_i, dove accanto al numero intero f_i sono scritte le f_i caratteristiche dei vertici che «precedono» V_i, ed accanto a g_i sono scritte le g_i caratteristiche dei vertici che «seguono» V_i:

$$[\ldots,\ (\underset{\substack{\cdots\\(a_{f_i},b_{f_i})}}{f_{i(a_1,b_1)}},\ \underset{\substack{\cdots\\(c_{g_i},d_{g_i})}}{g_{i(c_1,d_1)}}),\ \ldots]\,.$$

Def. 8. Si definisce caratteristica completa degli spigoli l'insieme delle quaterne (h_j, k_j, p_j, q_j) relative a tutti gli spigoli s_j, dove accanto al numero h_j sono scritte le h_j caratteristiche degli x spigoli tali che $\varphi_2(x)=\varphi_1(s_j)$; accanto a k_j sono scritte le k_j caratteristiche degli x spigoli tali che $\varphi_1(x)=\varphi_2(s_j)$; accanto a p_j le p_j caratteristiche degli x spigoli tali che $\varphi_1(x)=\varphi_1(s_j)$; ed infine accanto a q_j le q_j caratteristiche degli x spigoli tali che $\varphi_2(x)=\varphi_2(s_j)$:

$$[\ldots,\ (\underset{\substack{\cdots\\(a_{h_j},b_{h_j},c_{h_j},d_{h_j})}}{h_{j(a_1,b_1,c_1,d_1)}},\ \underset{\substack{\cdots\\(e_{k_j},l_{k_j},m_{k_j},n_{k_j}}}{k_{j(c_1,l_1,m_1,n_1)}},\ \underset{\substack{\cdots\\\cdots}}{p_{j(\ldots)}},\ \underset{\substack{\cdots\\\cdots}}{q_{j(\ldots)}}),\ \ldots]\,.$$

3. – Osserviamo che per ogni vertice V_i di G si ha:

$$\begin{array}{ll} 1\leqslant f_i\leqslant n-2 & \\ & \text{con: } f_i+g_i\leqslant n-1\,. \\ 1\leqslant g_i\leqslant n-2 & \end{array} \tag{1}$$

Se, per ogni i, $f_i+g_i=2$ si ha un «circuito».

Per ogni spigolo s_j di G si ha:

$$\begin{array}{ll} 1\leqslant h_j\leqslant n-2 & \\ 1\leqslant k_j\leqslant n-2 & \text{con: } 1\leqslant h_j+p_j\leqslant n-2 \\ 0\leqslant p_j\leqslant n-3 & \qquad\ \ 1\leqslant k_j+q_j\leqslant n-2\,. \\ 0\leqslant q_j\leqslant n-3 & \end{array} \tag{2}$$

Le (2) si dimostrano facilmente considerando che:

$$h_j = f_{\varphi_1(s_j)}; \quad k_j = g_{\varphi_2(s_j)}; \quad p_j = g_{\varphi_1(s_j)} - 1; \quad q_j = f_{\varphi_2(s_j)} - 1 .$$

Si osservi che, essendo $f_i + g_i = \varrho(V_i)$ e $h_j + k_j + p_j + q_j = H$, si ritrovano le analoghe formule per i singrammi non orientati:

$$\varrho(V_i) \leqslant n - 1; \qquad H \leqslant 2n - 4 .$$

Gli interi f_i e g_i, oltre a soddisfare alle precedenti disuguaglianze, devono soddisfare alle seguenti condizioni:

$$\begin{aligned} &f_1 + f_2 + \dots + f_n = m = n + k \\ &g_1 + g_2 + \dots + g_n = m = n + k \end{aligned} \tag{3}$$

con $k \geqslant 0$.

Le f_i e le g_i possono, dunque, assumere diversi valori; in generale può accadere che:

$$\exists i_1, i_2, \dots, i_t \; (t < n) \,|\, f_{i_1} = 1 + x_1, f_{i_2} = 1 + x_2, \dots, f_{i_t} = 1 + x_t;$$

$$\exists!\, i \,|\, f_i = k - (x_1 + x_2 + \dots + x_t) + 1; \qquad x_j \geqslant 0,\; 1 \leqslant j \leqslant t$$

e tutte le rimanenti $f_i = 1$.

Gli stessi casi si hanno per le g_i.

Osservazione. Data la caratteristica dei vertici di un singramma G, se in essa esistono r vertici V_i, $(1 \leqslant i \leqslant r)$, tali che $f_{v_i} + g_{v_i} = n - 1$, allora i rimanenti $n - r$ vertici V_j, $(r+1 \leqslant j \leqslant n)$, sono tali che: $f_{v_j} + g_{v_j} \geqslant r$. Infatti i V_j vertici sono collegati, almeno, ad i V_i vertici.

Per quanto riguarda gli interi che compaiono nella caratteristica degli spigoli si ha:

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} h_j = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot g_i \\ &\sum_{j=1}^{m} k_j = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot f_i \end{aligned} \tag{4}$$

;

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{m} p_j = \sum_{i=1}^{n} g_i \cdot (g_i - 1) \\ &\sum_{j=1}^{m} q_i = \sum_{i=1}^{n} f_i \cdot (f_i - 1) \end{aligned} \tag{5}$$

infatti basta osservare che, per ogni vertice V_i, ognuno degli f_i spigoli che « entra » in esso ha rispettivamente g_i e $f_i - 1$ come secondo e quarto elemento della sua caratteristica, mentre ognuno dei g_i spigoli che « esce » ha rispettivamente f_i e $g_i - 1$ come primo e terzo elemento della sua caratteristica.

4. – Teorema 1. *Data la caratteristica completa dei vertici relativa ad un solo vertice V_i di G, si possono determinare le caratteristiche dei vertici collegati a V_i e le caratteristiche degli spigoli che « entrano » ed « escono » da V_i.*

Infatti data la seguente caratteristica completa relativa a V_i:

$$\left(F_{\substack{(f_1,g_1)\\(f_2,g_2)\\ \cdots \\ (f_F,g_F)}},\ G_{\substack{(a_1,b_1)\\(a_2,b_2)\\ \cdots \\ (a_G,b_G)}}\right)$$

le caratteristiche dei vertici collegati a V_i sono:

$$(f_1, g_1),\ (f_2, g_2),\ \ldots,\ (f_F, g_F),\ (a_1, b_1),\ (a_2, b_2),\ \ldots,\ (a_G, b_G);$$

le caratteristiche degli spigoli che « entrano » in V_i sono:

$$(f_1, G, g_1 - 1, F - 1),\ (f_2, G, g_2 - 1, F - 1),\ \ldots,\ (f_F, G, g_F - 1, F - 1)$$

esse hanno uguali il secondo e l'ultimo elemento; le caratteristiche degli spigoli che « escono » da V_i sono:

$$(F, b_1, G - 1, a_1 - 1),\ (F, b_2, G - 1, a_2 - 1),\ \ldots,\ (F, b_G, G - 1, a_G - 1)$$

esse hanno uguali il primo ed il terzo elemento.

Si riesce pure a conoscere il secondo ed il quarto elemento della caratteristica degli spigoli che « entrano » in (f_i, g_i) e di quelli che « entrano » in (a_j, b_j), essi sono rispettivamente:

$$(\cdot, g_i, \cdot, f_i - 1)\,, \qquad (\cdot, b_j, \cdot, a_j - 1)$$

ed infine il primo ed il terzo elemento della caratteristica degli spigoli che « escono » da (f_i, g_i) e di quelli che « escono » da (a_j, b_j), essi sono rispettivamente:

$$(f_i, \cdot, g_i - 1, \cdot)\,, \qquad (a_j, \cdot, b_j - 1, \cdot)\,.$$

Osservazione. Se V_i è tale che $f_i + g_i = n - 1$ la sua caratteristica completa determina la caratteristica di tutti gli altri vertici; in particolare in un singramma completo la caratteristica completa di un vertice qualunque determina le caratteristiche di tutti gli altri.

Teorema 2. *Dato un singramma G, aggiungendo una catena aperta* (1) *di r vertici $V_1, V_2, \ldots, V_r$ si ottiene un nuovo singramma G' di cui G è un sottosingramma, tale che*:

Caso (a): se $\forall i$, $1 \leqslant i \leqslant r$, V_i di caratteristica (f_i, g_i) appartiene a G si ha:

$$\sum_{j=1}^{m'} h'_j = \sum_{j=1}^{m} h_j + \sum_{\nu=1}^{r-1} f_\nu + \sum_{\mu=2}^{r} g_\mu + r - 2;$$

$$\sum_{j=1}^{m'} k'_j = \sum_{j=1}^{m} k_j + \sum_{\nu=1}^{r-1} f_\nu + \sum_{\mu=2}^{r} g_\mu + r - 2;$$

$$\sum_{j=1}^{m'} p'_j = \sum_{j=1}^{m} p_j + 2 \cdot \sum_{\mu=1}^{r-1} g_\mu;$$

$$\sum_{j=1}^{m'} q'_j = \sum_{j=1}^{m} q_j + 2 \cdot \sum_{\nu=2}^{r} f_\nu; \qquad (\text{con } m' = m + r - 1)$$

dove i termini ai primi membri si riferiscono agli elementi che figurano nella caratteristiche degli spigoli di G';

Caso (b): se $\forall i$, $2 \leqslant i \leqslant r-1$, $V_i \notin G$, V_1 di caratteristica (f_1, g_1), V_r di caratteristica (f_r, g_r) appartengono a G, si ha:

$$\sum_{j=1}^{m'} h'_j = \sum_{j=1}^{m} h_j + f_1 + g_r + r - 2;$$

$$\sum_{j=1}^{m'} k'_j = \sum_{j=1}^{m} k_j + f_1 + g_r + r - 2;$$

$$\sum_{j=1}^{m'} p'_j = \sum_{j=1}^{m} p_j + 2g_1;$$

$$\sum_{j=1}^{m'} q'_j = \sum_{j=1}^{m} q_j + 2f_r .$$

(1) La catena aperta si intende orientata da V_1, a V_r.

Corollario 1. *Se la catena aperta è costituita da un solo spigolo si ha:*

$$\sum_{j=1}^{m'} h'_j = \sum_{j=1}^{m'} k'_j = \sum_{j=1}^{m} h_j + f_1 + g_r;$$

$$\sum_{j=1}^{m'} p'_j = \sum_{j=1}^{m} p_j + 2g_1; \qquad \sum_{j=1}^{m'} q'_j = \sum_{j=1}^{m} q_j + 2f_r .$$

Corollario 2. *Se i punti* V_1 *e* V_r *sono di caratteristica* (1, 1) *ed i rimanenti vertici* V_i *non appartengono a* G (caso (b)), *si ha:*

$$\sum_{j=1}^{m'} h'_j = \sum_{j=1}^{m} h_j + r; \qquad \sum_{j=1}^{m'} k'_j = \sum_{j=1}^{m} k_j + r$$

$$\sum_{j=1}^{m'} p'_j = \sum_{j=1}^{m} p_j + 2; \qquad \sum_{j=1}^{m'} q'_j = \sum_{j=1}^{m} q_j + 2 .$$

5. – Gli interi f_i, g_i che figurano nella caratteristica dei vertici oltre a soddisfare alle precedenti disuguaglianze devono soddisfare ad opportune condizioni. Analogamente per quanto riguarda gli interi h_j, k_j, p_j, q_j che compaiono nella caratteristica degli spigoli. Diamo le condizioni più immediate delle quali ci serviremo nel seguito.

In generale nei singrammi da noi considerati si ha:

$$m = n + k$$

dove $k \geqslant 0$.

Per $k = 0$ si ha il caso più semplice dei singrammi definiti.

Tali singrammi sono tutti dei «circuiti». Per ogni vertice necessariamente si ha:

$$f_i = g_i = 1 \qquad (\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant n);$$

la caratteristica dei vertici è dunque: $[(1, 1)_n]$. Essa individua, per ogni n, i singrammi a meno di isomorfismi. La caratteristica degli spigoli è: $[(1, 1, 0, 0)_n]$; anch'essa, per ogni n, determina i singrammi a meno di isomorfismi. Osserviamo che in questo caso dare la caratteristica dei vertici equivale a dare la caratteristica degli spigoli e che si ha inoltre:

$$\sum_{j=1}^{m} h_j = \sum_{j=1}^{m} k_j = n$$

$$\sum_{j=1}^{m} p_j = \sum_{j=1}^{m} q_j = 0 .$$

Per $k = 1$ osserviamo che possono presentarsi due eventualità:

(a) esistono due vertici V_1 e V_2 tali che:

$$f_{V_1} + g_{V_1} = f_{V_2} + g_{V_2} = 3 \qquad \text{con: } f_{V_1} = g_{V_2}\,,\ f_{V_2} = g_{V_1}$$

ed esiste sempre uno spigolo che li congiunge;

(b) esiste un solo vertice V tale che:

$$f_V + g_V = 4 \qquad \text{con: } f_V = g_V = 2$$

infatti dovendo essere:

$$\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} g_i = m = n + 1$$

ne segue che esistono un valore di i ed uno di j tali che $f_i = 2$ e $g_j = 2$, da cui se:

$$i \neq j \Rightarrow f_i = 2\,, \quad g_i = 1; \qquad f_j = 1\,, \quad g_j = 2$$

$$i = j \Rightarrow f_i = 2\,, \quad g_i = 2\,.$$

I rimanenti vertici sono tutti del tipo $(1, 1)$.

La caratteristica dei vertici di tali singrammi può, dunque, essere:

$$[(1, 2),\ (2, 1),\ (1, 1)_{n-2}]; \qquad [(2, 2),\ (1, 1)_{n-1}]\,.$$

Per quanto riguarda gli spigoli si ha:

$$1 \leq h_j \leq 2; \quad 1 \leq k_j \leq 2; \quad 0 \leq p_j \leq 1; \quad 0 \leq q_j \leq 1\,.$$

Inoltre nel caso (a):

— esiste sempre uno spigolo s_j che congiunge V_1 di caratteristica $(1, 2)$ e V_2 di caratteristica $(2, 1)$, tale che:

$$h_j + k_j + p_j + q_j = 4 \qquad \text{con: } h_j + p_j = k_j + q_j = 2$$

e se lo spigolo s_j va da V_1 a V_2 si ha $h_j = k_j = 1$ e quindi esso ha caratteristica $(1, 1, 1, 1)$; se invece s_j va da V_2 a V_1 si ha $h_j = k_j = 2$ e quindi esso ha per caratteristica $(2, 2, 0, 0)$;

— esistono sempre quattro spigoli tali che:

$$h_j + k_j + p_j + q_j = 3$$

e se lo spigolo s_j va da V_1 a V_2 essi hanno le seguenti caratteristiche:

$$(1, 2, 0, 0)\,, \quad (2, 1, 0, 0)\,, \quad (1, 1, 1, 0)\,, \quad (1, 1, 0, 1);$$

se invece s_j va da V_2 a V_1 essi hanno le seguenti caratteristiche:

$$(1, 1, 0, 1)_2\,, \quad (1, 1, 1, 0)_2\,.$$

In entrambi i casi i rimanenti $n - 4$ spigoli hanno tutti caratteristica $(1, 1, 0, 0)$.

Nel caso (b) si ha:

— esistono sempre quattro spigoli tali che:

$$h_j + k_j + p_j + q_j = 4;$$

due di essi, quelli che entrano in V, hanno caratteristica $(1, 2, 0, 1)$, gli altri due, quelli che escono da V, hanno caratteristica $(2, 1, 1, 0)$. I rimanenti $n - 3$ spigoli hanno tutti caratteristica $(1, 1, 0, 0)$.

Per $k = 2$ osserviamo che, dovendo essere $\sum_{i=1}^{n} f_i = \sum_{i=1}^{n} g_i = n + 2$, ne segue che o esiste un valore di i tale che $f_i = 3$ e tutti i rimanenti valori di $f = 1$, oppure esistono un valore di i ed un valore di j, con $i \neq j$, tali che $f_i = f_j = 2$ e tutti i rimanenti valori di $f = 1$. Analogamente per le g_i.

Le caratteristiche dei vertici possono, dunque, risultare le seguenti:

$[(3,3),\ (1,1)_{n-1}]$; $[(3,2),\ (1,2),\ (1,1)_{n-2}]$; $[(2,2),\ (1,1)_{n-2}]$;

$[(2,3),\ (2,1),\ (1,1)_{n-2}]$; $[(3,1),\ (1,3),\ (1,1)_{n-2}]$;

$[(3,1),\ (1,2)_2,\ (1,1)_{n-3}]$; $[(1,3),\ (2,1)_2,\ (1,1)_{n-3}]$;

$[(2,2),\ (1,2),\ (2,1),\ (1,1)_{n-3}]$; $[(2,1)_2,\ (1,2)_2,\ (1,1)_{n-4}]$.

Per quanto riguarda gli spigoli si ha:

$$1 \leqslant h_j \leqslant 3; \quad 1 \leqslant k_j \leqslant 3; \quad 0 \leqslant p_j \leqslant 2; \quad 0 \leqslant q_j \leqslant 2$$

e le loro caratteristiche dipenderanno dai casi precedentemente descritti per i vertici.

Analoghe considerazioni si possono fare per i successivi valori di k, osservando che se $m = n + k$ si ha:

$$1 \leqslant f_i \leqslant k+1 \qquad 1 \leqslant g_i \leqslant k+1$$

$$1 \leqslant h_j \leqslant k+1; \quad 1 \leqslant k_j \leqslant k+1; \quad 0 \leqslant p_j \leqslant k; \quad 0 \leqslant q_j \leqslant k .$$

I casi esaminati saranno i più ricorrenti nel seguito.

6. – Esamineremo, adesso, come le caratteristiche definite individuano i singrammi a meno di isomorfismi e vedremo, per ogni n, qual è il più piccolo valore di m per cui i singrammi non sono più determinati.

Troviamo le caratteristiche dei singrammi per i primi valori di $n \geqslant 4$, poichè per $n = 3$ si hanno soltanto circuiti esaminati già nel paragrafo **5.**

$n = 4$

Per $m = n = 4$ la caratteristica dei vertici $[(1,1)_4]$ determina il singramma a meno di isomorfismi.

Per $m = 5$ si presenta necessariamente il caso (a) di $k = 1$, la caratteristica dei vertici da sola non individua il singramma. Infatti la seguente caratteristica dei vertici $[(1,2),\ (2,1),\ (1,1)_2]$ è relativa ai due singrammi della Fig. 1, che non sono isomorfi. Essi sono individuati dalla caratteristica degli spigoli.

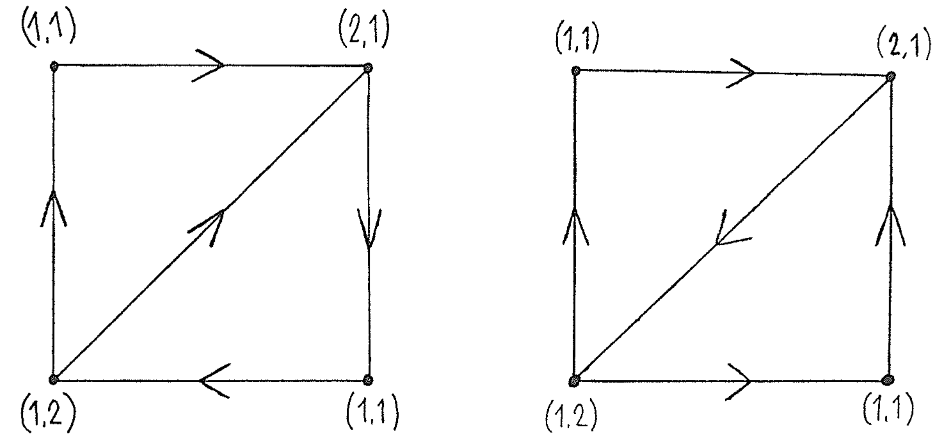

Fig. 1.

Tutti i singrammi con $n = 4$ vertici ed $m = 5$ spigoli sono individuati, a meno di isomorfismi, dalla caratteristica degli spigoli. Per $m = 6$ si ha il caso di singramma completo per i singrammi da noi considerati.

Tutti i singrammi con $n = 4$ vertici ed $m = 6$ spigoli sono tra di loro isomorfi e sono individuati dalla caratteristica dei vertici: $[(1, 2)_2,\ (2, 1)_2]$.

$n = 5$

Per $m = n = 5$ la caratteristica dei vertici $[(1, 1)_5]$ determina i singrammi a meno di isomorfismi.

Per $m = 6$ la caratteristica dei vertici e quella degli spigoli non determinano i singrammi; i due singrammi della Fig. 2, infatti, hanno caratteristica dei vertici $[(1, 1)_3,\ (2, 1),\ (1, 2)]$ e caratteristica degli spigoli $[(1, 1, 1, 1),$ $(2, 1, 0, 0),\ (1, 2, 0, 0),\ (1, 1, 0, 0),\ (1, 1, 1, 0),\ (1, 1, 0, 1)]$, tuttavia essi non sono isomorfi.

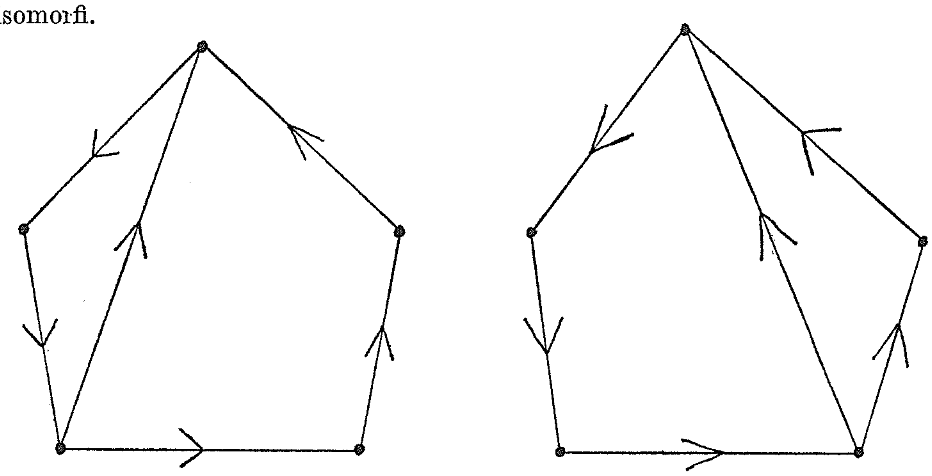

Fig. 2.

Essi sono determinati dalla caratteristica completa dei vertici, che individua, a meno di isomorfismi, tutti i singrammi aventi $n=5$ vertici ed $m=6$ spigoli.

Per $m=7$ i singrammi sono individuati, generalmente, a meno di isomorfismi, dalla caratteristica completa degli spigoli; tuttavia se esiste un vertice V_i tale che $f_i+g_i=4$, è sufficiente, per tali singrammi, la sola caratteristica degli spigoli.

La caratteristica completa degli spigoli determina, a meno di isomorfismi, anche i singrammi aventi $m=8$, $m=9$, $m=10$ spigoli.

$n=6$

Per $m=n=6$ la caratteristica dei vertici $[(1,1)_6]$ determina il singramma.

Per $m=7$ la caratteristica dei vertici e quella degli spigoli non sono sufficienti a determinare i singrammi, che, tuttavia sono individuati dalla caratteristica completa dei vertici oppure dalla caratteristica completa degli spigoli.

I precedenti sono gli unici due casi che, per $n=6$, sono individuati dalle caratteristiche definite. Infatti per $m=8$ i due singrammi della Fig. 3 hanno tutte le caratteristiche uguali senza essere, tuttavia, isomorfi.

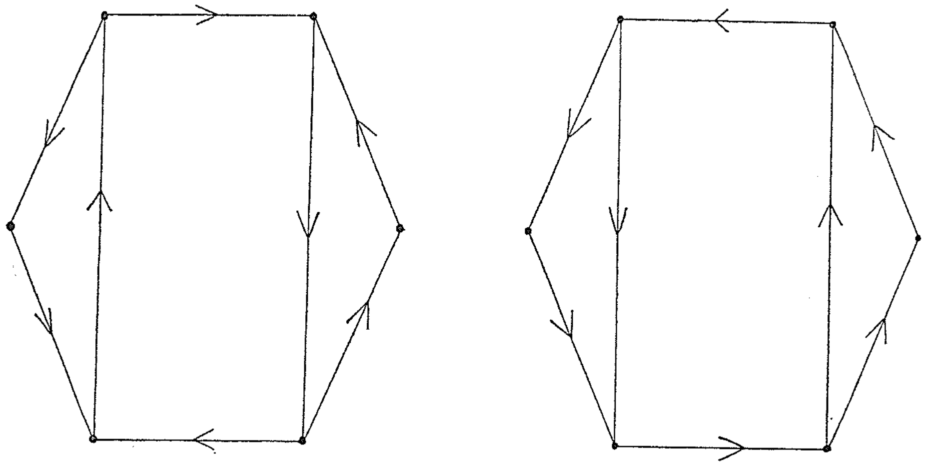

Fig. 3.

$n=7$

Per $m=n=7$ i singrammi sono individuati dalla caratteristica dei vertici $[(1,1)_7]$.

Per $m=8$ i singrammi sono determinati, a meno di isomorfismi, dalla caratteristica completa degli spigoli, tutte le altre caratteristiche non sono infatti sufficienti.

Per $m = 9$ i singrammi non sono più individuati. Ad esempio, i due singrammi della Fig. 4 hanno tutte le caratteristiche uguali, ma non sono isomorfi.

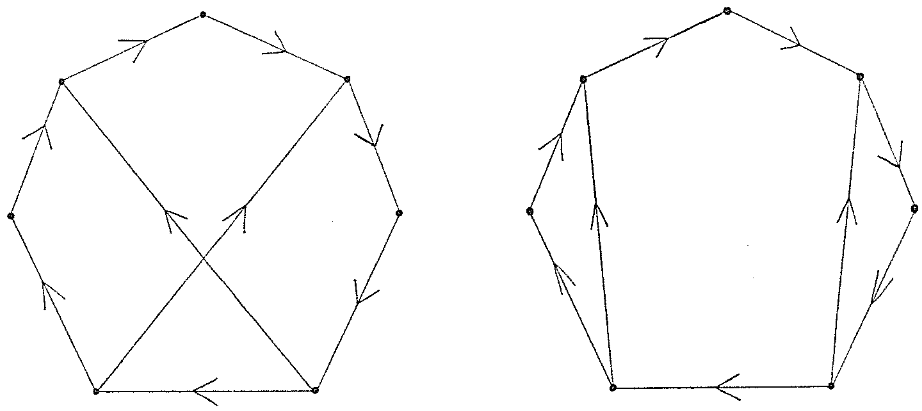

Fig. 4.

$n = 8$

Si hanno casi analoghi al precedente. Infatti per $m = n = 8$ i singrammi sono determinati dalla caratteristica dei vertici $[(1, 1)_8]$. Per $m = 9$ i singrammi sono determinati, a meno di isomorfismi, dalla caratteristica completa degli spigoli, mentre per $m = 10$ non sono più determinati, come è provato dai due singrammi della Fig. 5 che hanno tutte le caratteristiche uguali, ma non sono isomorfi.

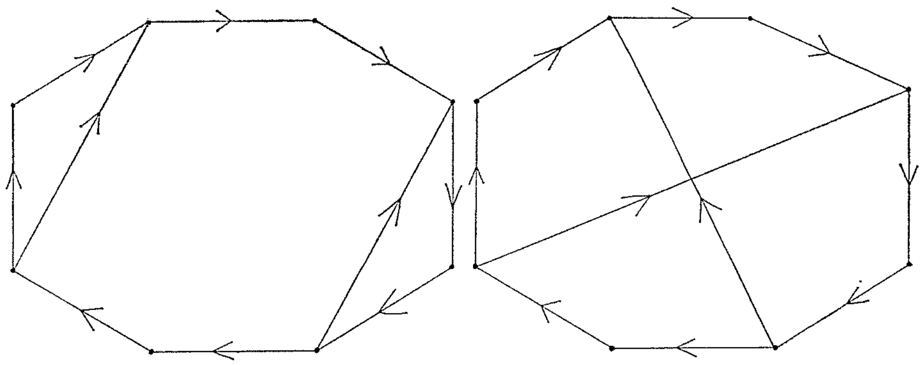

Fig. 5.

$n = 9$

Per $m = n = 9$ la caratteristica dei vertici $[(1, 1)_9]$ determina i singrammi a meno di isomorfismi; mentre per $m = 10$ essi non sono più determinati come è provato dai due singrammi della Fig. 6.

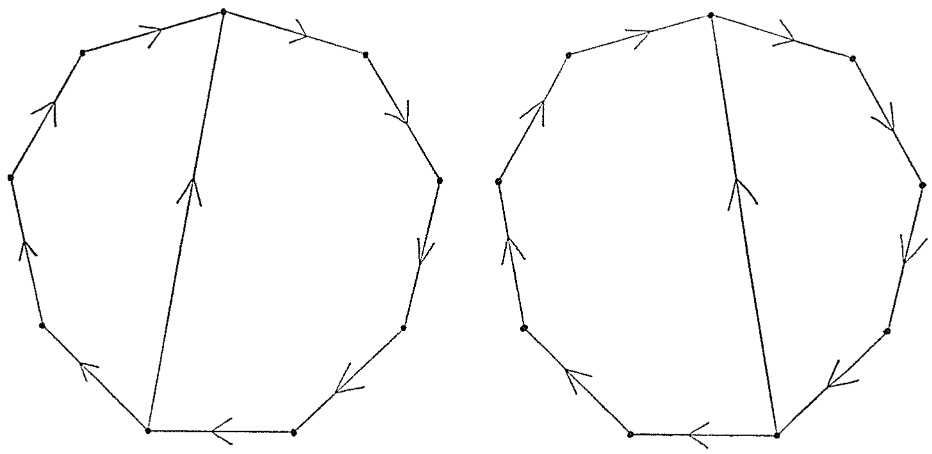

Fig. 6.

Osservazione. Osserviamo che se al posto dello spigolo che va da V_i a V_j tracciamo una catena aperta con $r+1$ spigoli, avente origine in V_i e termine in V_j, e la stessa cosa facciamo per lo spigolo che va da V'_i a V'_j, otteniamo due nuovi singrammi con $n = 9 + r$ vertici ed $m = (9 + r) + 1$ spigoli, che hanno tutte le caratteristiche uguali ma non sono isomorfi.

Possiamo, quindi, dire che per $n > 9$ si hanno singrammi che, quando $m = n$, sono determinati dalla caratteristica dei vertici, mentre quando $m = n + 1$ non sono più individuati.

7. – In sintesi i risultati ottenuti sono:

<table>
<tr><th></th><th>$m = n$</th><th>$m = n + 1$</th><th>$m = n + 2$</th><th>$m = n + 3$</th><th>$m = n + 4$</th><th>$m = n + 5$</th></tr>
<tr><td>$n = 3$</td><td rowspan="8">caratteristica dei vertici</td><td></td><td></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$n = 4$</td><td>caratteristica degli spigoli</td><td>caratteristica dei vertici</td></tr>
<tr><td>$n = 5$</td><td>caratteristica completa dei vertici</td><td>caratteristica completa degli spigoli</td><td>caratteristica completa degli spigoli</td><td>caratteristica completa degli spigoli</td><td>caratteristica completa degli spigoli</td></tr>
<tr><td>$n = 6$</td><td>caratteristica completa degli spigoli</td><td>non sono più individuati</td><td rowspan="5" colspan="3"></td></tr>
<tr><td>$n = 7$</td><td>caratteristica completa degli spigoli</td><td>non sono più individuati</td></tr>
<tr><td>$n = 8$</td><td>caratteristica completa degli spigoli</td><td>non sono più individuati</td></tr>
<tr><td>$n = 9$</td><td>non sono più individuati</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>$n > 9$</td><td>non sono più individuati</td></tr>
</table>

È stato elaborato un programma, scritto in linguaggio FORTRAN IV ed eseguito da un calcolatore IBM 360/44 del Centro di Calcolo Elettronico della Facoltà di Scienze dell'Università di Napoli, che consente di scrivere la caratteristica dei vertici e quella degli spigoli dei singrammi considerati, per $n = 1, 2, \ldots, 9$.

References.

[1] A. M. GHIRLANDA, *Osservazioni sulle caratteristiche dei grafi o singrammi*, Ann. Univ. Ferrara, **11** (62-65).

[2] C. BERGE, *Théorie des Graphes et Ses Applications*, Dunod, Paris, 1958.

[3] O. ORE, *Theory of graphs*, Amer. Math. Soc. Coll. Publ., **37** (1962).

* * *