Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 47-53

TITUS PETRILA (*)

Une nouvelle méthode pour l'étude de l'influence des parois sur l'ecoulement fluide plan. (**)

1. – Considérons étant donné un écoulement fluide plan, idéal, potentiel *de base.* Cet écoulement a lieu en présence d'une paroi arbitraire, infinite fixe (δ). Soit $w_B(z)$ la vitesse complexe de cet écoulement de base.

Considérons maintenant l'écoulement fluide plan produit par le déplacement général dans la masse de fluide (rototranslation) d'un profil quelconque (C), l'écoulement qui a lieu en présence de la même paroi (δ) et qui va se superposer à l'écoulement de base.

Dans ce qui suit nous désirons donner une nouvelle méthode pour la détermination de la vitesse complexe $w(z)$ de l'écoulement fluide résultant de la superposition citée; cette méthode peut être facilement utilisée pour le calcul numérique.

2. – En ce qui concerne la paroi illimitée (δ) et la courbe (C) nous admettons que leurs équations paramétriques $z = \alpha(\varphi)$ respectivement $z = \beta(\psi)$, définis pour $\varphi, \psi \in E_1$ et rapportés au système d'axes cartésien rectangulaire fixe Oxy, sont des fonctions 2Π périodiques, finies dans l'intervalle $(0, 2\Pi)$ $|\alpha(0) = \infty|$, qui définissent des courbe de Jordan positives orientées avec la courbure continue.

En ce qui concerne la fonction donnée $w_B(z)$, elle appartient à une classe (a) de fonctions avec les propriétés suivantes:

(*) Indirizzo: Facultatea de Matematica, Universitatea Cluj, Str. Mihail Kogalniceanu 1, Cluj, Romania.

(**) Ricevuto: 20-XII-1971.

a1) ce sont des fonctions holomorphes dans le domaine D_1, limitées par la paroi δ, à l'exception d'un nombre fini de points, placés a une distance finie et qui représentent pour nos fonctions des points singuliers; soit $D_1^* = D_1 - \{z_k\}_{k=\overline{1,q}}$

a2) ce sont des fonctions continues et finies dans $\overline{D}_1^* - \{z_k\}_{k=\overline{1,q}}$ qui contient aussi le point à l'infini; soit $w_B(\infty) = \lim\limits_{z \to \infty} w_B(z)$.

a3) se sont des fonctions höldériennes aux points de $C \cup \delta - (\infty)$ satisfaisant aussi, sur $\delta - (\infty)$ la condition: $\exists$ une fonction réelle $v_B(\varphi)$ tel que

$$\overline{w_B(\alpha(\varphi))} = v_B(\varphi) \cdot \frac{\dot{\alpha}(\varphi)}{|\dot{\alpha}(\varphi)|}, \forall \varphi \in (0, 2\Pi).$$

En ce qui concerne la fonction inconnue $w(z)$ elle sera déterminée de façon qu'elle va satisfaire aux conditions suivantes (b).

b1) c'est une fonction holomorphe dans le domaine $D = D_1 - \overline{(IntC)}$ à l'exception des mêmes points $(z_k)_{k=\overline{1,q}}$ placés à distance finie, qui sont des points singuliers de même nature que pour $w_B(z)$.

b2) c'est une fonction continue et finie dans

$$\overline{D}^* = \overline{D_1^*} - \{z_k\}_{k=\overline{1,q}} - \{IntC\}$$

y compris le point à l'infini où

$$\lim_{z \to \infty} w(z) = w(\infty) = w_B(\infty);$$

b3) c'est une fonction höldérienne aux points des courbes $C \cup \delta - (\infty)$ points où la fonction satisfait aussi aux suivantes conditions aux limites:

— $\exists$ une fonction réelle $v_1(\varphi)$ tel que nous avons

$$\overline{w(\alpha(\varphi))} = v_1(\varphi) \cdot \frac{\dot{\alpha}(\varphi)}{|\dot{\alpha}(\varphi)|}, \forall \varphi \in (0, 2\pi),$$

— $\exists$ aussi une fonction réelle $v_2(\psi)$ tel que nous pouvons écrire

$$\overline{w(\beta(\psi))} = v_2(\psi) \cdot \frac{\dot{\beta}(\psi)}{|\dot{\beta}(\psi)|} + l + im + i\omega\,[\beta(\psi) - z_A],$$

où l et m sont des fonctions de temps données qui correspondent aux composants de la vitesse de translation du point $z_A \in IntC$; ω la rotation instantanée est aussi une fonction de temps donnée;

b4) la fonction $w(z)$ satisfait à l'égalité $\int_C w(z)\,\mathrm{d}z = \Gamma$, où Γ est une fonction de temps donnée « à priori ».

Soit maintenant la fonction $g(z) = w(z) - w_B(z)$, fonction connue en même temps que $w(z)$. Cette fonction $g(z)$, en vertu des propriétés précisées ci-dessus sera:

— holomorphe dans le domaine de l'écoulement fluide D, y compris les points $\{z_k\}_{k=\overline{1,q}}$;

— continue et finie dans $\overline{D}$, y compris le point à l'infini;

— höldérienne sur $C \cup \delta - (\infty)$.

En même temps nous avons $\lim_{z\to\infty} g(z) = g(\infty) = 0$ et il existe un système de constantes positives et finies $0 < A$, $\tau < +\infty$; tal que $|z^\tau \cdot g(z)|_\delta < A$.

En utilisant maintenant la formule de Cauchy pour la fonction $g(z)$ et le domaine D_R, obtenu par l'intersection de D avec le disque de rayon R centrée dans le point $\xi \in D$, nous obtenons:

$$g(\xi) = \frac{1}{2\Pi i}\int_{K_R} \frac{g(z)}{z-\xi}\,\mathrm{d}z + \frac{1}{2\Pi i}\int_{\delta R} \frac{g(z)}{z-\xi}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2\Pi i}\int_{C} \frac{g(z)}{z-\xi}\,\mathrm{d}z\,,$$

où K_R et δ_R sont les frontères du domaine D_R qui appartiennent aussi à la circonférence du cercle, respectivement à la paroi.

En faisant maintenant $\xi \to z_{01} \in \varrho_R$ et après $\xi \to z_{02} \in C$, si $R \to \infty$, nous serons conduits au système suivant des équations intégrales singulières (¹)

$$\left\{\begin{array}{ll} (1) & g(z_{01}) = \dfrac{1}{\Pi i}\displaystyle\int_{\delta} \frac{g(z)}{z-z_{01}}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{\Pi i}\int_{C} \frac{g(z)}{z-z_{01}}\,\mathrm{d}z\,,\ z_{01} \in \delta\,, \\[2ex] (2) & g(z_{02}) = \dfrac{1}{\Pi i}\displaystyle\int_{\delta} \frac{g(z)}{z-z_{02}}\,\mathrm{d}z - \frac{1}{\Pi i}\int_{C} \frac{g(z)}{z-z_{02}}\,\mathrm{d}z\,,\ z_{02} \in C\,. \end{array}\right.$$

D'autre part, en désignant

$$\gamma_1(\varphi) = v_1(\varphi)\cdot|\dot{z}|_\delta\,,\ \gamma_B(\varphi) = V_B\,(\varphi)\cdot|\dot{z}|_\delta\,,$$

$$\gamma_2\,(\psi) = v_2\,(\psi)\cdot|\dot{z}|_\sigma\,,\ v_2(\psi) = \dot{z}\,[l - im - i\omega\,\overline{(z - z_A)}]_\sigma\,,$$

(¹) L'existence, au sens de la valeur principale de Cauchy, de l'intégrale prise sur l'arc illimité, étant assurée, les condition de Przeowrska-Rolewicz pour la fonction $g(z)$ étant remplies [1].

les conditions aux limites nous permettent d'écrire:

$$g(z) = \frac{\gamma_1(\varphi)\cdot}{\dot{z}}\bigg|_\delta - \frac{\gamma_B(\varphi)\cdot}{\dot{z}}\bigg|_\delta, \quad \forall z \in \delta ;$$

$$g(z) = \frac{\gamma_2(\psi)\cdot}{\dot{z}}\bigg|_C + \frac{\nu_2(\psi)}{\dot{z}}\bigg|_C - w_B(z), \quad \forall z \in C .$$

A l'aide des dernières expressions et ne séparant les parties réelles le système (1), (2) se ramène au système suivant des équations intégrales de type FREDHOLM, aux noyaux continus, système dont les fonctions inconnues sont $\gamma_1(\varphi)$ et $\gamma_2(\psi)$ ou bien les fonctions $v_1(\varphi)$ et $v_2(\psi)$.

$$\gamma_1(\varphi^*) + \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(\varphi)\, K_{\alpha\alpha}(\varphi^*, \varphi)\, d\varphi - \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(\psi)\, K_{\alpha\beta}(\varphi^*, \psi)\, d\psi =$$

$$= \gamma_B(\varphi^*) + \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \gamma_B(\varphi)\, K_{\alpha\alpha}(\varphi^*, \varphi)\, d\varphi + \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} [\mathrm{Im}\, \nu_2(\psi) L_{\alpha\beta}(\varphi^*, \psi) +$$

$$+ \mathrm{Re}\, \nu_2(\psi)\cdot K_{\alpha\beta}(\varphi^*, \psi)]\, d\psi - \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \{\mathrm{Im}\, [w_B(\beta(\psi))\cdot\dot{\beta}(\psi)]\cdot L_{\alpha\beta}(\varphi\ , \psi) +$$

$$+ \mathrm{Re}\, [w_B(\beta(\psi))\cdot\dot{\beta}(\psi)]\, K_{\alpha\beta}(\varphi^*, \psi)\}\, d\psi = f_1(\varphi^*) ;$$

$$\gamma_2(\psi^*) - \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \gamma_2(\psi)\cdot K_{\beta\beta}(\psi^*, \psi)\, d\psi + \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \gamma_1(\varphi)\cdot K_{\beta\alpha}(\psi^*, \varphi)\, d\varphi =$$

$$= \mathrm{Re}\, \{w_B(\beta(\psi^*))\cdot\dot{\beta}(\psi^*) - \nu_2(\psi^*)\} + \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \gamma_B(\varphi)\cdot K_{\beta\alpha}(\psi^*, \varphi)\, d\varphi +$$

$$+ \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} [\mathrm{Im}\, \nu_2(\psi)\cdot L_{\beta\beta}(\psi^*, \psi) + \mathrm{Re}\, \nu_2(\psi)\cdot K_{\beta\beta}(\psi^*, \psi)] d\psi -$$

$$- \frac{1}{2\Pi}\int_0^{2\pi} \{\mathrm{Im}\, [w_B(\beta(\psi))\cdot\dot{\beta}(\psi)]\cdot L_{\beta\beta}(\psi^*, \psi) +$$

$$+ \mathrm{Re}\, [w_B(\beta(\psi))\cdot\dot{\beta}(\psi)]\cdot K_{\beta\beta}(\psi^*, \psi) = f_2(\psi^*)$$

où on a désigné

$$\frac{2\cdot\tau(\mu)}{\tau(\mu)-\sigma(\lambda)} = L_{\tau\sigma}(\mu,\lambda) + iK_{\tau\sigma}(\mu,\lambda)\,.$$

L'alternative de FREDHOLM étant applicable, parce que le système associé homogène admet une seule solution indépendante $|\gamma_1 \equiv 0, \gamma_2 \equiv 1|$, notre système aura une solution seulement si

$$\int_0^{2\pi} f_2(\mu)\mathrm{d}\mu = 0\,,$$

ce qui est bien rempli.

Soit maintenant l'ensemble des solutions du système (*), (**), l'ensemble de la forme $\gamma(\lambda) = \mathscr{K}\gamma^0(\lambda) + \tilde{\gamma}(\lambda)$, où $\gamma^0(\lambda)$ est la solution différente à zéro du système homogène satisfaisant à $\int_C \gamma^0(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda \neq 0$, aussi que $\tilde{\gamma}(\lambda)$ est une solution particulière du système non homogène. Alors, on pourra toujours choisir de cet ensemble, cette solution tel que $\int_C \gamma(\lambda)\mathrm{d}\lambda = \int_C \gamma_2(\lambda)\,\mathrm{d}\lambda = \Gamma$, où Γ est une constante réelle donnée « à priori ».

Nous avons donc démontré le théorème fondamental suivant:

Théorème. *Quelque soit la fonction $w_B(z)$ qui appartient à la classe* (a) *et* (δ), (C) *deux courbes satisfaisant aux conditions précisées et quelque soit le système de quatre fonctions réelles continues* (l, m, ω, Γ), *il existe une seule fonction $w(z)$ satisfaisant aux conditions* (b),

où en langage hydrodynamique.

Quelque soit un écoulement fluide, plan ideal, potentiel, de base, satisfaisant aux conditions (a), *en présence d'une paroi illimitée et quelque soit un deplacement continu dans la masse du fluide d'un profil arbitraire, il existe un seul écoulement résultant avec circulation « a priori » donnée et qui satisfait les conditions* (b). *La paroi et le profil satisfont aux conditions précisées*

3. - L'aspect numerique de la méthode.

Le calcul numerique du champ des vitesses $w(z)$ dans le domaine D de l'écoulement fluide demande deux étapes principales. Leur schema avec les problèmes qui apparaîssent, nous allons le donner plus loin.

Dans la première étape, il faut intégrer le système (*), (**) des deux équations intégrales de FREDHOLM de deuxième espèce pour les deux fonctions inconnues γ_1 et γ_2, tel que la solution obtenue remplisse la condition de la circulation

« à priori » donnée. Par l'emploi des formules de quadrature sur les même système de N noeuds P_v (par exemple même la formule du trapèze a un degré d'exactitude assez élevé grâce à la périodicité des noyaux) nous serons conduits à un système algébrique de $2N$ équations avec $2N$ inconnues (²). Homogénéisant ce système et choisissant les N noeuds P_v, tel que par la résolution nous soyons conduits aux valeurs de la seule solution, différente à zéro aux points P_v, c'est-à-dire $\gamma_k(P_v)$ $|k=1, 2,\ v=1, N|$ nous pouvons calculer tout de suite aussi la valeur approchée Γ_0 de l'intégrale $\int_0^{2\pi} \gamma_2(\psi)\, d\psi$. On résout ensuite le système non homogène, sans de précautions supplémentaires, aux mêmes noeuds P_v et on obtient les valeurs de la solution particulière $\tilde{\gamma}_k(P_v)$ $|k=1, 2;\ v=1, N|$; à leur aide on pourra calculer aussi la valeur $\tilde{\Gamma}$, pour l'intégrale $\int_0^{2\pi} \tilde{\gamma}_2(\psi) d\psi$. Choisissant maintenant $\mathscr{K}=(\Gamma-\tilde{\Gamma})/\Gamma_0$, Γ étant « à priori » donné, nous avons finalement les solutions numériques du système (*), (**) aux points P_v.

Dans la deuxième étape on passera à la détermination du champ des vitesses proprement dit. Pour faire cela nous allons nous servir de la formule de Cauchy appliquée a la même fonction $g(z)$ et au même domaine D_R, où ensuite $R \to \infty$; cela est possible, les valeurs $w(z)|_{\mathcal{O}\cup\delta}$ étant connues en même temps que les fonctions γ_1 et γ_2: Utilisant des formules de quadrature pour les intégrales complexes qui emploient les valeurs des fonctions réelles γ_1 et γ_2 aux mêmes noeuds P_v $|v=\overline{1, N}|$, on obtient finalement même le champ des vitesses cherché.

Dans le cas particulier de l'obstacle circulaire, et de la paroi rectiligne en absence d'un écoulement de base, les résultats numériques obtenus sont approchés aux résultats exacts que nous avons obtenus par d'autres méthodes [**2**].

Les résultats de cette note seront développés ailleurs.

(²) Dans les membres de droite apparaissent aussi des intégrales prises au sens de la valeur principale de Cauchy au noyau $L_{\beta\beta}(\psi^*, \psi)$ qui correspondent à des potentiels de double couche associés. Si pour $u \neq v$ nous pouvons écrire tout de suite la valeur $L_{\beta\beta}(P_u, P_v)$, pour $u=v\neq 0$ il est nécessaire de prendre $L_{\beta\beta}(P_v, P_v) = [L_{\beta\beta}(P_{v+1}, P_v) + L_{\beta\beta}(P_{v-1}, P_v)]/2$, tandis que pour $u=v=0$ nous avons aussi $L_{\beta\beta}(P_0, P_0) = [L_{\beta\beta}(P_1, P_0) + L_{\beta\beta}(P_{N-1}, P_0)]/2$.

Bibliographie

[1] V. Przeworska Rolewicz, *Sur l'intégrale de Cauchy pour un arc fermé à l'infini*, Ann. Polon. Math. **8** (1960), 155.

[2] T. Petrila, *Sur la méthode du couple de profils pour l'étude d'un mouvement général d'un obstacle dans un fluide idéal en présence d'une paroi rectiligne*, C. R. Acad. Sci. Paris, **272** (1971), 818.

[3] C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Gauthier-Villars, Ed. Acad. R.P.R., Paris-Bucarest 1959.

* * *