Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 25-46

ANTONIO LEONELLI (*)

Morfismi costanti e concetto di corpo in una categoria. (**)

Introduzione.

Il tema del presente lavoro è lo studio, nell'ambito della Teoria delle Categorie, di alcune proprietà di certi morfismi detti « costanti » che permettono, tra l'altro, di dare una generalizzazione del concetto di zero morfismo a categorie prive di zero oggetti (e perfino non ampliabili in altre dotate di zero oggetti) e di giungere ad una definizione di oggetto corpo in una categoria.

B. ECKMANN e P. J. HILTON in [1] e [2] hanno dato la loro definizione di oggetto gruppo, sfruttando il concetto di zero morfismo; ci si è accorti presto, però, che l'ipotesi dell'esistenza di zero morfismi è troppo forte e che la suddetta definizione di gruppo poteva essere generalizzata ponendo morfismi costanti al posto degli zero morfismi. In questo modo è stato possibile anche definire strutture di oggetto anello unitario in una categoria.

Può sembrare a questo punto aperta la strada per definire anche il concetto di corpo in una categoria, ma si incontrano varie difficoltà. Si vuole, da una parte, che la nozione di oggetto corpo, come quelle di gruppo e anello, possa essere data in una categoria del tutto generale, d'altra parte si vuole che, in categorie particolari (ad esempio: insiemi, spazi topologici, fibrati) tale nozione coincida con quelle classiche (corpi ordinari, corpi topologici, fibrati le cui sezioni sono tutte corpi topologici).

Da colloqui avuti col Prof. F. W. LAWVERE, si è potuto comprendere come sia necessario porre ipotesi pesanti sulla categoria per ottenere il secondo scopo, a discapito quindi della generalità.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università de L'Aquila, Via Paganica 18, 67100 L'Aquila, Italia.

(**) Lavoro eseguito in qualità di borsista del C.N.R. presso l'Istituto Matematico de L'Aquila. — Ricevuto: 18-I-1973.

La definizione di oggetto corpo, qui esposta, risponde alla esigenza della generalità; essa si può dare infatti in una categoria qualsiasi e fa ritrovare, nel caso degli insiemi e degli spazi topologici, i vecchi concetti di corpo e corpo topologico. Per tale definizione, inoltre, continuano a valere in una categoria qualsiasi, dotata di oggetti finali, alcuni teoremi fondamentali che caratterizzano le ordinarie strutture di corpo su un insieme (un corpo ha soli ideali banali, ogni omomorfismo unitario di un corpo in un anello unitario è iniettivo).

Tali risultati sono tutti esposti nel presente lavoro e insieme ad essi, per maggiore chiarezza e completezza, sono riesposti risultati già noti, quali le definizioni di oggetto anello e i relativi esempi, che servono essenzialmente per inquadrare la definizione di oggetto corpo nel suo ambiente naturale e per uniformare il simbolismo.

La terminologia usata è quella adottata da B. ECKMANN e P. J. HILTON in [**2**].

1. - Morfismi costanti.

Siano $\mathscr{A}$ una categoria, A un suo oggetto, $\mathscr{S}$ la categoria delle applicazioni tra insiemi, $k\colon \mathscr{A} \to \mathscr{S}$ il funtore costante definito ponendo per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$, $kX = \{*\}$ (insieme puntiforme prefissato) e per ogni morfismo $f\colon X \to Y$, $kf = 1_{\{*\}}$, $h^A\colon \mathscr{A} \to \mathscr{S}$ il funtore controvariante definito ponendo per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$, $h^A X = (X, A)$ (insieme dei morfismi di X in A) e per ogni $f\colon X \to Y$, $h^A f\colon (Y, A) \to (X, A)$ è l'applicazione tale che, se $g \in (Y, A)$, $h^A f(g) = gf$.

Definizione 1.1. Diremo che un morfismo $f\colon X \to A$ di $\mathscr{A}$ è *costante* se esiste una trasformazione naturale $\alpha\colon k \to h^A$ tale che $\alpha_X\,(*) = f$.

Definizione 1.2. Se $\alpha\colon k \to h^A$ è una trasformazione naturale, ogni morfismo costante $\alpha_X(*)\colon X \to A$ sarà detto *a-morfismo* di X in A e indicato con a_{XA}.

Osservazione 1.3. Si riconosce subito che in ogni (X, A) c'è uno e un solo a-morfismo.

Proposizione 1.4. La composizione di un a-morfismo con un morfismo qualsiasi è ancora un a-morfismo.

Dimostrazione. Se $a_{XA}\colon X \to A$ è un a-morfismo e $f\colon Y \to X$ è un morfismo si ha $a_{XA} f = h^A f(a_{XA}) = a_{YA}$.

Proposizione 1.5. La composizione di un morfismo con un morfismo costante è un morfismo costante.

Dimostrazione. Sia $a_{XA}: X \to A$ un morfismo costante e sia $f: A \to B$ un morfismo; si ha $fa_{XA} = f\mathfrak{a}_X(*) = \mathfrak{b}_X(*): X \to B$. Si vede subito che $\mathfrak{b} = \{\mathfrak{b}_X\}$ è una trasformazione naturale di k in h^B.

Proposizione 1.6. Se in $\mathscr{A}$ esiste un oggetto finale F, un morfismo $a_{XA}: X \to A$ è costante se e solo se si fattorizza mediante F.

Dimostrazione. L'oggetto F rappresenta il funtore k e quindi la corrispondenza t: Nat $(k, h^A) \to h^A F$ data da $t(\mathfrak{a}) = \mathfrak{a}_F(*) = a_{FA}$ è biunivoca. Se $x: X \to F$ è l'unico morfismo di X in F si ha $h^A x(a_{FA}) = a_{FA} x = a_{XA}$ e quindi a_{XA} si fattorizza mediante F.

Viceversa, se $f = a_{FA} x$ esiste una trasformazione naturale $\mathfrak{a}$ tale che $\mathfrak{a}_F(*) = a_{FA}$ e quindi f è l'a-morfismo a_{XA} si X in A.

Osservazione 1.7. Se $\mathscr{A}$ ha un oggetto finale F e se $A \in Ob\mathscr{A}$, allora esistono morfismi costanti arrivanti in A se e solo se $h^A F \neq \emptyset$.

Un morfismo di (X, A) è allora un a-morfismo se e solo se tale è il suo fattore in arrivo nella fattorizzazione mediante F.

Proposizione 1.8. Se $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$ sono morfismi e f è un epimorfismo allora se gf è un a-morfismo, g è un a-morfismo.

Dimostrazione. Si ha $gf = \mathfrak{a}_X(*) = \mathfrak{a}_Y(*) f$ e quindi $g = \mathfrak{a}_Y(*) = a_{YZ}$.

Proposizione 1.9. Se F è un oggetto finale e A un oggetto tale che esiste un elemento $\mathfrak{a} \in$ Nat (k, h^A) allora $\mathfrak{a}_F(*) = a_{FY}$ è immagine epimorfa della a-morfismo $\mathfrak{a}_X(*) = a_{XY}$ per ogni X tale che $(F, X) \neq \emptyset$.

Dimostrazione. a_{FY} è un monomorfismo che fattorizza a_{XY} in arrivo. Sia if un'altra fattorizzazione di a_{XY}, con i monomorfismo di Z in Y. Sia $g \in (F, X)$ e $x \in (X, F)$ si ha $a_{FY} xg = ifg$. Ma $xg = 1_F$ e si ha che $h = fg: F \to Z$ è tale che $a_{FY} = ih$.

Proposizione 1.10. Se $f: X \to Z$ e $g: Z \to Y$ sono morfismi di cui g monomorfismo e se F è un oggetto finale tale che in (F, A) esiste un'immagine di gf, allora gf è costante se e solo se f è costante.

Dimostrazione. Se f è costante si ha per la Proposizione 1.5 che gf è costante. Supponiamo ora che gf sia costante e che a_{FY} sia un'immagine di gf contenuta in (F, Y), essendo F un oggetto finale. Si ha $gf = a_{XY}$ e inoltre esiste un morfismo $h: F \to Z$ tale che $a_{FY} = gh$. Allora $gf = a_{FY}x = ghx$, essendo $x \in (X, F)$, e quindi $f = hx$, cioè f è costante.

Proposizione 1.11. Siano $X, Y \in Ob\mathscr{A}$ tali che $(F, X) \neq \emptyset \neq (F, Y)$ per un certo oggetto finale F. Un morfismo costante di X in Y si spezza nella composizione di un monomorfismo $g: Z \to Y$ con un epimorfismo $f: X \to Z$ se e solo se Z è un oggetto finale.

Dimostrazione. Sia a_{XY} un morfismo costante di X in Y. Esso si fattorizza mediante l'oggetto F nella composizione $a_{XY} = a_{FY}x$ dove a_{FY} è un monomorfismo perchè esce da F e $x: X \to F$ è un epimorfismo essendo $(F, X) \neq \emptyset$.

Viceversa, se $gf: X \to Y$ è una fattorizzazione di a_{XY} con $g: Z \to Y$ monomorfismo e $f: X \to Z$ epimorfismo, essendo $(F, X) \neq \emptyset$, a_{FY} è una immagine di a_{XY} e quindi esiste un morfismo $h: F \to Z$ tale che $gh = a_{FY}$ cioè $ghx = a_{FY}x = gf$, da cui $hx = f$ ed essendo f un epimorfismo anche h è un epimorfismo. h è inoltre una coretrazione perchè se z è l'unico morfismo di Z in F $zh = 1_F$ e quindi h è un isomorfismo.

Nelle ipotesi della Prop. 1.11 vale il seguente

Corollario 1.12. *Sia $a:_{XA} X \to A$ un morfismo costante; se a_{XA} è un monomorfismo X è finale, se è un epimorfismo A è finale.*

Dimostrazione. Ovvia.

Definizione 1.13. Sia $A \in Ob\mathscr{A}$ tale che $\mathrm{Nat}(k, h^A) \neq \emptyset$. Se $\alpha \in \mathrm{Nat}(k, h^A)$ e $f: X \to A$ è un morfismo, dicesi *nucleo di f rispetto agli a-morfismi* o *a-nucleo* un morfismo $u: K \to X$ per cui si ha: $fu = a_{KA}$ e se $v: H \to X$ è tale che $fv = a_{HA}$, esiste un unico morfismo $w: H \to K$ tale che $uw = v$.

Il nucleo u sarà allora indicato con $ker_a(f)$.

Proposizione 1.14. Un morfismo $f: X \to A$ è un a-morfismo se e solo se esiste un a-nucleo di f che sia un epimorfismo.

Dimostrazione. Sia $u: K \to A$ un a-nucleo di f che sia anche un epimorfismo. Si ha che $fu = a_{KA} = a_{XA}u$ e quindi $f = a_{XA}$.

Viceversa, se $f = a_{XA}$, allora 1_X è un a-nucleo di a_{XA} e 1_X è un epimorfismo.

Proposizione 1.15. Sia F un oggetto finale tale che $(F, X) \neq \emptyset$ per ogni X; se $f: X \to A$ è un monomorfismo, allora un a-nucleo di f se esiste è un morfismo di (F, X).

Dimostrazione. Sia $u: K \to X$ un a-nucleo di f, allora se k è l'unico morfismo di K in F si ha $fu = a_{XA} = a_{FA}k$. Se $g \in (F, K)$ si ha $a_{KA}g = a_{FA} = fug$. Per ogni $v: H \to X$ tale che $fv = a_{HA}$ esiste l'unico morfismo $w: H \to F$ tale che $(ug)w = v$, essendo $f(ugw) = a_{HA} = fv$. Si ha quindi $ker_a(f) = ug \in (F, X)$.

Ci sarà utile in seguito la seguente

Definizione 1.16. Se $\mathfrak{a} \in \mathrm{Nat}\,(k, h^A)$ diremo che un morfismo $f: Z \to A$ è *a-fattorizzante* se esiste un a-morfismo $a_{XA}: X \to A$ che ammette una fattorizzazione, mediante Z, con f fattore in arrivo.

Esempi 1.17. Per ogni $Z \in Ob\mathscr{A}$, il morfismo a_{ZA} è *a-fattorizzante*. Se Z è un oggetto finale F allora a_{FA} fattorizza ogni a-morfismo.

Definizione 1.18. Se $i: H \to A$ è un monomorfismo esso è il rappresentante di un sottooggetto di A.

Diremo che tale sottooggetto è *a-fattorizzante* se lo è un suo monomorfismo rappresentante (ad esempio i).

Ossevazione 1.19. Se un sottooggetto è a-fattorizzante lo è *ogni* suo monomorfismo rappresentante.

Sia ora $h_A: \mathscr{A} \to \mathscr{S}$ il funtore covariante definito ponendo per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$, $h_A X = (A, X)$ e per ogni $f: X \to Y$ $h_A f: (A, X) \to (A, Y)$ è l'applicazione tale che, se $g \in (A, X)$, $h_A f(g) = fg$.

Definizione 1.1*. Diremo che un morfismo $\bar{f}: A \to X$ è *cocostante* se esiste una trasformazione naturale $\bar{\mathfrak{a}}: k \to h_A$ tale che $\bar{\mathfrak{a}}_X(*) = \bar{f}$.

Definizione 1.2*. Se $\bar{\mathfrak{a}}: k \to h_A$: è una trasformazione naturale, il morfismo cocostante $\bar{\mathfrak{a}}_X(*): A \to X$ sarà detto $\bar{a}$-morfismo di A in X e indicato con $\bar{a}_{AX}$.

I morfismi cocostanti di $\mathscr{A}$ sono, quindi, costanti nella categoria duale $\mathscr{A}^*$, perciò per essi valgono le proposizioni duali di quelle sopra esposte per i morfismi costanti.

2. - Generalizzazione del concetto di zero morfismo.

Morfismi costanti e cocostanti permettono di generalizzare la definizione di zero morfismo al modo seguente:

Definizione 2.1. Sia $\mathscr{A}$ una categoria e A, B due suoi oggetti.

Diremo che un morfismo $f: A \to B$ è uno *zero morfismo* se esso è costante e cocostante.

Proposizione 2.2. Se in (A, B) esiste un morfismo costante b_{AB} e un morfismo cocostante $\bar{a}_{AB}$ essi coincidono in un unico morfismo, che è perciò un zero morfismo.

Dimostrazione. Si ha $b_{BB}\bar{a}_{AB} = b_{AB}$ essendo b_{BB} costante e si ha $b_{BB}\bar{a}_{AB} = \bar{a}_{AB}$ essendo $\bar{a}_{AB}$ cocostante.

Proposizione 2.3. Per ogni coppia di oggetti A, B in (A, B) esiste al più uno zero morfismo.

Dimostrazione. Conseguenza immediata della Prop. 2.2.

Osservazione 2.4. La Prop. 2.3 assicura l'unicità dello zero morfismo ma non l'esistenza. Possono infatti esservi coppie di oggetti X, Y tali che in (X, Y) non vi sono zero morfismi e altre coppie di oggetti (sempre della stessa categoria) aventi lo zero morfismo.

Proposizione 2.5. La composizione di uno zero morfismo con un morfismo o viceversa è ancora uno zero morfismo.

Dimostrazione. Segue dalle Prop. 1.4, 1.5 e dalle rispettive duali.

Proposizione 2.6. In una categoria $\mathscr{A}$ per ogni coppia X, Y di suoi oggetti esiste in (X, Y) lo zero morfismo O_{XY} se e solo se esiste lo zero morfismo O_A di qualche oggetto A in se stesso.

Dimostrazione. Condizione necessaria. Ovvia.

Condizione sufficiente. Sia $O_A: A \to A$ lo zero morfismo di A in A, essendo O_A costante si ha $(X, A) \neq \emptyset$ per ogni X ed essendo anche cocostante si ha $(A, Y) \neq \emptyset$ per ogni Y. Se $f \in (X, A)$ e $g \in (A, Y)$, il morfismo gO_Af è lo zero morfismo O_{XY} di X in Y per la Prop. 2.5.

Osservazione 2.7. Se una categoria $\mathscr{A}$ soddisfa le condizioni della Prop. 2.6 si può aggiungere a $Ob\mathscr{A}$ un oggetto O che funge da zero oggetto e tale che ogni zero morfismo si può fattorizzare mediante O (a questo proposito, vedi [**3**], pag. 14).

Se $\mathscr{A}$ è, invece, una categoria con un oggetto iniziale I e un oggetto finale F (non isomorfi) gli zero morfismi sono tutti e soli i morfismi fattorizzabili mediante I e F; in una tale categoria può ancora accadere che non vi sia lo zero morfismo tra due oggetti X e Y e vi sia quello tra altri due oggetti A e B; in ogni caso uno zero morfismo esiste certamente, tale è infatti l'unico morfismo di I in F; si ha inoltre che nelle ipotesi della Prop. 2.6 la categoria ora considerata possiene zero oggetti, poichè essendo $(F, I) \neq \emptyset$ I e F risultano isomorfi.

Notiamo, infine, che se $\mathscr{A}$ possiede zero oggetti la definizione da noi posta di zero morfismo coincide con quella classica, individua cioè la stessa sottoclasse di morfismi.

3. - Esempi di morfismi costanti e cocostanti.

3.1. - Categoria degli insiemi.

In $\mathscr{S}$ un oggetto finale è un insieme con un solo elemento e quindi i morfismi costanti sono tutte le ordinarie applicazioni costanti. I morfismi cocostanti sono tutte e sole le applicazioni uscenti dall'insieme vuoto $\emptyset$; esse sono anche costanti e costituiscono, quindi, gli unici zero morfismi di $\mathscr{S}$.

3.2. - Categoria dei fibrati.

Sia $\mathscr{F}_X$ la categoria dei fibrati su uno spazio topologico X. Un oggetto finale è il fibrato $\boldsymbol{X} = (X, X, 1_X)$. Se $\boldsymbol{E} = (E, X, e)$ e $\boldsymbol{F} = (F, X, f)$ sono due fibrati, tra essi esistono morfismi costanti se e solo se esistono sezioni globali di $\boldsymbol{X}$. Si ha, anzi, che i morfismi costanti tra $\boldsymbol{E}$ e $\boldsymbol{F}$ sono tutti e soli i morfismi fattorizzabili in arrivo mediante una sezione globale di $\boldsymbol{F}$. Poichè i morfismi di $\mathscr{F}_X$ sono gli X-morfismi si ha che i morfismi costanti sono applicazioni continue tra i rispettivi spazi totali E e F, che portano ogni fibra E_x di $\boldsymbol{E}$ in un solo punto della corrispondente fibra F_x di $\boldsymbol{F}$.

3.3. - Categoria dei morfismi uscenti da uno spazio topologico.

Consideriamo ora la categoria avente per oggetti le applicazioni continue $f: X \to Y$ che partono tutte da un fissato spazio X e per morfismi i triangoli commutativi del tipo:

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\ Y \arrow[rr, "\alpha"'] & & Z \end{tikzcd}$$

Supponiamo di aver fissato $X = S^0$ (sfera 0-dimensionale). La categoria in questione può essere assimilata a quella i cui oggetti sono le coppie $(Y, f(S^0))$ e i cui morfismi sono le applicazioni continue $\alpha\colon Y \to Z$ tali che $\alpha f = g$. I punti di $f(S^0)$ in Y saranno detti *poli* di $\overline{Y} = (Y, f(S^0))$. Si possono avere spazi con due poli distinti o con un solo polo. $(S^0, l_{S^0}(S^0))$ è oggetto iniziale mentre ogni spazio puntiforme è finale. Consideriamo due oggetti $\overline{Y}$ e $\overline{Z}$. Tra di essi esistono morfismi costanti se e solo se $\overline{Z}$ ha un solo polo, esistono morfismi cocostanti se e solo se $\overline{Y}$ ha due poli distinti appartenenti a due diverse componenti connesse di Y, esistono infine zero morfismi se e solo se si verificano entrambe le condizioni suddette. È questo un esempio di categoria dotata di zero morfismi solo per particolari coppie di oggetti e quindi non ampliabile in una avente zero oggetti.

3.4. - Categoria degli anelli commutativi unitari.

Sia *Ann* la categoria degli anelli commutativi unitari e degli omomorfismi di anelli conservanti l'unità. In essa Z (anello degli interi) è iniziale mentre l'anello nullo 0, costituito da un solo elemento che funge da zero e da uno, è finale. Se A e B sono due anelli commutativi unitari tra di essi esistono morfismi costanti se e solo se $B = 0$, esistono morfismi cocostanti se e solo se $(A, Z) \neq \emptyset$. Se si verificano entrambe le condizioni allora l'unico morfismo tra A e $B = 0$ è uno zero morfismo.

4. - Anelli e corpi in una categoria.

Sia $\mathscr{A}$ una categoria, A un suo oggetto e $h^A \times h^A\colon \mathscr{A} \to \mathscr{S}$ il funtore controvariante definito per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$ da $(h^A \times h^A)X = (X, A) \times (X, A)$ e da formule ovvie per i morfismi di $\mathscr{A}$.

Definizione 4.1. Se $\nu, \mu\colon h^A \times h^A \to h^A$: sono due trasformazioni naturali, la terna $(A; \nu, \mu)$ è detta essere un *R-oggetto* o un *oggetto anello* (commutativo) se per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$ la terna $(h^A X; \nu_X, \mu_X)$ è una nello ordinario (commutativo).

Definizione 4.2. Un R-oggetto $(A; \nu, \mu)$ è detto *unitario* o un *R_1-oggetto* se esiste una trasformazione naturale $u\colon k \to h^A$ tale che l'u-morfismo u_{XA} è elemento unitario per l'anello $(h^A X; \nu_X, \mu_X)$ per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$.

Definizione 4.3. Un R-oggetto $(A; \nu, \mu)$ è detto *nullo* o *banale* se $(h^A A; \nu_A, \mu_A)$ è l'anello zero.

Definizione 4.4. Se $(A; \nu^A, \mu^A)$ e $(B; \nu^B, \mu^B)$ sono due R-oggetti, un morfismo $f: A \to B$ è detto un *R-morfismo* se, per ogni oggetto X, l'applicazione $h_X f: (X, A) \to (X, B)$ è un omomorfismo di anelli.

Osservazione 4.5. Se $(A; \nu, \mu)$ è un R-oggetto, la coppia $(A; \nu)$ è un oggetto gruppo (G-oggetto) abeliano (vedi [2]); esiste quindi una trasformazione naturale $\mathfrak{a}: k \to h^A$ tale che $\mathfrak{a}_X(*): X \to A$ è lo zero di $h^A X$. Diremo che $\mathfrak{a}$ è lo *zero* di $(A; \nu, \mu)$.

Proposizione 4.6. Se $(A; \nu^A, \mu^A)$ e $(B; \nu^B, \mu^B)$ sono due R-oggetti e $f: A \to B$ è un R-morfismo, detti $\mathfrak{a}$ e $\mathfrak{b}$ gli zeri rispettivi, si ha $f a_{XA} = b_{XB}$ per ogni $X \in Ob \mathscr{A}$.

Dimostrazione. $h_X f: (X, A) \to (X, B)$ è un omomorfismo e quindi $h_X f(a_{XA}) = f a_{XA} = b_{XB}$.

Definizione 4.7. Se $(A; \nu^A, \mu^A)$ e $(B; \nu^B, \mu^B)$ sono due R_1-oggetti diremo che un morfismo $f: A \to B$ è un *R_1-morfismo* se $h_X f$ è un omomorfismo che porta elemento unitario in elemento unitario, per ogni $X \in Ob \mathscr{A}$.

Osservazione 4.8. Gli R-oggetti di $\mathscr{A}$ insieme agli R-morfismi costituiscono una categoria $\mathscr{A}_R$. Gli R_1-oggetti e gli R_1-morfismi formano una sottocategoria $\mathscr{A}_R^1$ in generale non piena di $\mathscr{A}_R$.

Definizione 4.9. Se in (X, A) è definita una struttura di gruppo con elemento neutro un a-morfismo, diremo che un morfismo $f: X \to A$ è *ovunque non nullo* se esso si può fattorizzare mediante un sottooggetto di A che non sia a-fattorizzante.

Definizione 4.10. Un R_1-oggetto non nullo $(A; \nu, \mu)$ è detto un *C-oggetto* o *oggetto corpo* se per ogni oggetto X di $\mathscr{A}$ i morfismi ovunque non nulli di X in A sono elementi unità per l'anello $(h^A X; \nu_X, \mu_X)$.

5. - Anelli e corpi in D-categorie.

I concetti di anello e corpo acquistano particolare significato nel caso che $\mathscr{A}$ sia una D-categoria, sia cioè dotata di prodotti diretti finiti. Una tale categoria possiede anche un oggetto finale F (prodotto di una famiglia vuota di oggetti).

Ricordiamo che (vedi [2], Theorem 4.10) in una D-categoria una coppia $(A;\nu)$, dove $A\in Ob\mathscr{A}$ e $\nu\in \mathrm{Nat}\,(h^A\times h^A, h^A)$, è un G-oggetto abeliano se e solo se, essendo $\pi_1,\pi_2\colon A\times A\to A$ un prodotto diretto di A per A, esiste un morfismo $n\colon A\times A\to A$ tale che:

(a) $n(n\times l_A)=n(l_A\times n)$ (proprietà associativa);

(u) esiste un morfismo costante $a_A\colon A\to A$ tale che $n\{a_A, l_A\}=l_A=n\{l_A, a_A\}$ (esistenza dello zero);

(o) esiste un morfismo $\omega\colon A\to A$ tale che $n\{\omega, l_A\}=a_A=n\{l_A,\omega\}$ (passaggio all'opposto);

(c) posto $\tau=\{\pi_2,\pi_1\}$ si ha $n\tau=n$ (proprietà commutativa).

Un morfismo verificante le proprietà ora enunciate è detto essere una G-struttura per A.

Analoghe caratterizzazioni si hanno per gli R- e C-oggetti, come ora verrà mostrato.

Teorema 5.1. *Una terna* $(A;\nu,\mu)$ *con* $A\in Ob\mathscr{A}$ *e* $\nu,\mu\in\mathrm{Nat}\,(h^A\times h^A, h^A)$ *è un R-oggetto (commutativo) se e solo se esistono due morfismi* $n, m\colon A\times A\to A$ *tali che*:

(i) n *soddisfa gli assiomi di G-struttura*;

(ii) m *soddisfa l'assioma* (a) (*e l'assioma* (c));

(iii) m *e* n *verificano le seguenti proprietà, dette distributive*:

$$\text{(d)}\qquad \begin{cases} m(l_A\times n)=n(m\times m)\big(\{\pi_1,\tau\}\times l_A\big)\,,\\[1ex] m(n\times l_A)=n(m\times m)\big(l_A\times\{\tau,\pi_2\}\big)\,,\end{cases}$$

$(A;\nu,\mu)$ *è inoltre un R_1-oggetto se e solo se esiste un morfismo costante* $u_A\colon A\to A$ *che insieme ad* m *verificano l'assioma* (u).

Dimostrazione. Condizione necessaria.

La proprietà (i) è conseguenza del fatto che $(A;\nu)$ è un G-oggetto abeliano. Sia ora $m=\pi_1\cdot\pi_2=\mu_{A\times A}(\pi_1,\pi_2)\colon A\times A\to A$.

Poniamo, per ogni coppia di morfismi $f, g\colon X\to A$, $f\circ g=m\{f,g\}$. Si ha

$$f\circ g=m\{f,g\}=h^A\{f,g\}(m)=h^A\{f,g\}(\pi_1\cdot\pi_2)=$$

$$=h^A\{f,g\}(\pi_1)\cdot h^A\{f,g\}(\pi_2)=\pi_1(\{f,g\}\cdot\pi_2\{f,g\}=f\cdot g$$

e quindi il morfismo m individuato da μ induce a sua volta le μ_X. Si verifica facilmente che m è l'unico morfismo di $A\times A$ in A che induce le μ_X. m soddisfa l'assioma (a) come si riconosce subito dal fatto che in ogni (X, A) vale la proprietà associativa della moltiplicazione. Se $(A; \nu, \mu)$ è commutativo, allora lo è ogni (X, A) e quindi in particolare $(A\times A, A)$ da cui segue che m soddisfa l'assioma (c). I morfismi n e m insieme verificano gli assiomi (d) per il fatto che in ogni (X, A) valgono le ordinarie proprietà distributive e in particolare esse valgono in $(A\times A\times A, A)$, essendo $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\colon A\times A\times A \to A$ un cubo diretto di A; si ha allora:

$$m(l_A\times n) = m(l_A\times n)\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma\}_3 = m\{\{\gamma_1, n\{\gamma_2, \gamma_3\}\} = \gamma_1\cdot(\gamma_2+\gamma_3) =$$

$$= \gamma_1\cdot\gamma_2 + \gamma_1\cdot\gamma_3 = n\{m\{\gamma_1, \gamma_2\}, m\{\gamma_1, \gamma_2\}\} = n(m\times m)\{\{\pi_1, \tau\}\{\gamma_1, \gamma_2\}, \gamma_3\} =$$

$$= n(m\times m)(\{\pi_1, \tau\}\times l_A)\{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3\} = n(m\times m)(\{\pi_1, \tau\}\times l_A)\ .$$

Analogamente si prova la seconda delle (d). Nel caso che $(A; \nu, \mu)$ sia un R_1-oggetto, il morfismo unitario u_{AA} in (A, A) verifica insieme a m l'assioma (u).

Condizione sufficiente. La proprietà (i) assicura che l'oggetto $(A; \nu)$, dove ν è la trasformazione naturale individuata da n, è un G-oggetto abeliano. Se μ è la trasformazione naturale individuata da m, ogni applicazione $\mu_X\colon (X, A)\times\times(X, A)\to(X, A)$ verifica la proprietà associativa perchè m soddisfa (a) e la commutativa nel caso che m soddisfi (c). Se m e n verificano le proprietà (d) si ha, per ogni terna $f, g, h\in(X, A)$:

$$f\cdot(g+h) = m\{f, n\{g, h\}\} = m(l_A\times n)\{f, g, h\} =$$

$$= n(m\times m)(\{\pi_1, \tau\}\times l_A)\{f, g, h\} = n(m\times m)\{f, g, f, h\} =$$

$$= n\{m\{f, g\}, m\{f, h\}\} = f\cdot g + f\cdot h$$

e analogamente si prova l'altra proprietà distributiva; da quanto precede risulta che ogni coppia di applicazioni ν_X e μ_X costituisce una struttura di anello per (X, A) e quindi $(A; \nu, \mu)$ è un R-oggetto. Se ora supponiamo che esista un u-morfismo $u_A^{(1)}\colon A\to A$ verificante (u) insieme ad m, per ogni morfismo $f\colon X\to A$, si ha $m\{f, u_{XA}\} = m\{f, u_A f\} = m\{l_A, u_A\}f = f = m\{u_{XA}, f\}$ e quindi la trasformazione naturale $\mathfrak{u}\colon k\to h^A$ è tale che $\mathfrak{u}_X(*)$ è il morfismo unitario di (X, A), cioè $(A; \nu, \mu)$ è un R_1-oggetto.

(1) Per semplicità scriveremo d'ora in poi u_A in luogo di u_{AA}.

Osservazione 5.2. In virtù del Teorema 5.1 un R-oggetto $(A; \nu, \mu)$ in una D-categoria può essere indicato con $(A; n, m)$, avendo n e m i significati di cui sopra. Il morfismo n sarà detto *addizione* e il morfismo m sarà detto *moltiplicazione*.

Proposizione 5.3. Se $(A; n_A, m_A)$ e $(B; n_B, m_B)$ sono due R-oggetti, un morfismo $f: A \to B$ è un R-morfismo se e solo se

(i) $fn_A = n_B(f \times f)$;

(ii) $fm_A = m_B(f \times f)$.

Dimostrazione.

$$fn_A = f(\pi_1 + \pi_2) = h_X f(\pi_1 + \pi_2) = h_X f(\pi_1) + h_X f(\pi_2) =$$

$$= n_B\{f\pi_1, f\pi_2\} = n_B(f \times f)\{\pi_1, \pi_2\} = n_B(f \times f)\,.$$

Analogamente si prova (ii).

Viceversa, se f soddisfa (i) si ha, per ogni coppia di morfismi $\alpha, \beta: X \to A$,

$$h_X f(\alpha + \beta) = f(\alpha + \beta) = fn_A\{\alpha, \beta\} = n_B(f \times f)\{\alpha, \beta\} = n_B\{f\alpha, f\beta\} = f\alpha + f\beta =$$

$$= h_X f(\alpha) + h_X f(\beta)\,.$$

Analogamente si prova che $h_X f$ conserva anche la moltiplicazione.

Teorema 5.4. *Se $(A; n, m)$ è un R_1-oggetto (commutativo) e a è il suo zero, esso è un C-oggetto (commutativo) se e solo se per ogni sottooggetto non a-fattorizzante $i_H: H \to A$ esiste un morfismo $\sigma_H: H \to A$ tale che:*

$$m\{i_H, \sigma_H\} = u_{HA} = m\{\sigma_H, i_H\} \tag{s}$$

essendo u_{HA} il morfismo unitario di (H, A).

Dimostrazione. Condizione necessaria.

Il monomorfismo i_H è ovunque non nullo e quindi possiede inverso $i_H^{-1} = \sigma_H$.

Condizione sufficiente. Un morfismo $f: X \to A$ ovunque non nullo si fattorizza mediante un sottooggetto $i_H: H \to A$ non a-fattorizzante. Se $f = i_H f_H$

si ha $m\{f, \sigma_H f_H\} = m\{i_H f_H, \sigma_H f_H\} = m\{i_H, \sigma_H\} f_H = u_{HA} f_H = u_{XA}$ e viceversa si ha $m\{\sigma_H f_H, f\} = u_{XA}$ e quindi $\sigma_H f_H$ è l'inverso di f rispetto alla moltiplicazione, cioè f è un elemento unità di (X, A).

6. - Coanelli e cocorpi.

Le nozioni di anello e di corpo in una categoria, possono essere dualizzate, dando origine a concetti del tutto nuovi.

Sia $\mathscr{A}$ una categoria, A un suo oggetto e $h_A \times h_A : \mathscr{A} \to \mathscr{S}$ il funtore covariante definito per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$ da $(h_A \times h_A) X = (A, X) \times (A, X)$ e da formule ovvie per i morfismi.

Definizione 6.1. Se $\bar{\nu}, \bar{\mu} : h_A \times h_A \to h_A$ sono due trasformazioni naturali la terna $(A; \bar{\nu}, \bar{\mu})$ è detta *$\bar{R}$-oggetto* o un *coanello* (commutativo) se per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$ la terna $(h_A X; \bar{\nu}_X, \bar{\mu}_X)$ è un anello ordinario (commutativo).

Definizione 6.2. Un $\bar{R}$-oggetto $(A; \bar{\nu}, \bar{\mu})$ è detto *counitario* o un *$\bar{R}_1$-oggetto* se esiste una trasformazione naturale $\bar{u} : k \to h_A$ tale che l'$\bar{u}$-morfismo $\bar{u}_{XA}$ è elemento unitario per l'anello $(h_A X; \bar{\nu}_A, \bar{\mu}_A)$.

Definizione 6.3. Un $\bar{R}$-oggetto è detto *conullo* o *banale* se $(h_A A; \bar{\nu}_A, \bar{\mu}_A)$ è l'anello zero.

Definizione 6.4. Se $(A; \bar{\nu}^A, \bar{\mu}^A)$ e $(B; \bar{\nu}^B, \bar{\mu}^B)$ sono due $\bar{R}$-oggetti, un morfismo $f : A \to B$ è detto un $\bar{R}$-morfismo se per ogni oggetto X, l'applicazione $h^X f : (A, X) \to (B, X)$ è un omomorfismo di anelli.

Definizione 6.5. Se $(A; \bar{\nu}^A, \bar{\mu}^A)$ e $(B; \bar{\nu}^B, \bar{\mu}^B)$ sono due $\bar{R}_1$-oggetti, diremo che un morfismo $f : A \to B$ è un $\bar{R}_1$-morfismo se $h^X f$ porta elemento unitario in elemento unitario, per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$.

Osservazione 6.6. Gli $\bar{R}$-oggetti di $\mathscr{A}$ insieme agli $\bar{R}$-morfismi costituiscono una categoria $\mathscr{A}^{\bar{R}}$. Gli $\bar{R}_1$-oggetti e gli $\bar{R}_1$-morfismi formano una sottocategoria $\mathscr{A}_1^{\bar{R}}$, in generale non piena, di $\mathscr{A}^{\bar{R}}$.

Definizione 6.7. Se in (A, X) è definita una struttura di gruppo con elemento neutro un $\bar{a}$-morfismo, diremo che un morfismo $f : A \to X$ è *ovunque conullo* se esso si può fattorizzare mediante un oggetto quoziente di A che non sia $\bar{a}$-fattorizzante (2).

(2) Per la def. di oggetto quoziente $\bar{a}$-fattorizzante basta dualizzare le definizioni 1.16 e 1.18.

Definizione 6.8. Un $\bar{R}_1$-oggetto non conullo $(A; \bar{\nu}, \bar{\mu})$ è detto un $\bar{C}$-*oggetto* o *cocorpo* se per ogni oggetto X di $\mathscr{A}$ i morfismi ovunque non conulli di A in X sono elementi unità per l'anello $(h_A X; \bar{\nu}_X, \bar{\mu}_X)$.

Osservazione 6.9. Coanelli e cocorpi di $\mathscr{A}$ sono anelli e corpi in $\mathscr{A}^*$ e quindi per essi valgono le proposizioni duali di quelle dimostrate per anelli e corpi. In particolare, se $\mathscr{A}$ è una I-categoria (dotata di prodotti inversi finiti) si ha che un coanello $(A; \bar{\nu}, \bar{\mu})$ individua due morfismi $\bar{n}, \bar{m}: A \to A \oplus A$, essendo $\iota_1, \iota_2: A \to A \oplus A$ un coprodotto di A per A) tali che $\bar{n}$ soddisfa gli assiomi di struttura di cogruppo abeliano (vedi [**2**]) e $\bar{m}$ soddisfa gli assiomi:

($\bar{a}$) $(l_A \oplus \bar{m})\bar{m} = (\bar{m} \oplus l_A)\bar{m}$;

($\bar{d}$) se $\bar{\tau} = \langle \iota_1, \iota_2 \rangle$ si ha:

$$(l_A \oplus \bar{n})\bar{m} = (\langle \iota_1, \bar{\tau} \rangle \oplus l_A)(\bar{m} \oplus \bar{m})\bar{n} ,$$
$$(\bar{n} \oplus l_A)\bar{m} = (l_A \oplus \langle \bar{\tau}, \iota_2 \rangle)((\bar{m} \oplus \bar{m})\bar{n} .$$

Se il coanello è commutativo si ha inoltre:

($\bar{c}$) $\bar{\tau}\bar{m} = \bar{m}$.

Se il coanello è counitario si ha anche:

($\bar{u}$) esiste un morfismo cocostante $\bar{u}_A: A \to A$ tale che:

$$\langle \bar{u}_A, l_A \rangle \bar{m} = l_A = \langle l_A, \bar{u}_A \rangle \bar{m} .$$

Se infine il coanello è un cocorpo si ha ancora:

($\bar{s}$) se $\bar{a}_A: A \to A$ è lo zero di $h_A A$, per ogni oggetto quoziente $q_K: A \to K$ di A che non sia $\bar{a}$-fattorizzante esiste un morfismo $\bar{\sigma}_K: A \to K$ tale che

$$\langle q_K, \bar{\sigma}_K \rangle \bar{m} = \bar{u}_{AK} = \langle \bar{\sigma}_K, q_K \rangle .$$

7. - Esempi in categorie concrete.

7.1. - Categoria degli insiemi.

Si riconosce facilmente che in $\mathscr{S}$ gli R-oggetti (unitari, commutativi) sono gli ordinari anelli (unitari, commutativi) e così anche i C-oggetti (commutativi) sono gli ordinari corpi (campi). L'unico coanello in $\mathscr{S}$ è il coanello banale avente per sostegno l'insieme vuoto $\emptyset$ e le due cooperazioni $\bar{n}$ e $\bar{m}$ coincidenti con l'identità $l_\emptyset$; non esistono quindi cocorpi. Gli R-morfismi tra R-oggetti sono gli ordinari omomorfismi di anelli.

Nella categoria $\mathscr{S}_0$ degli insiemi con polo e delle applicazioni conservanti il polo, gli R-oggetti sono gli ordinari anelli con lo zero nel polo. Gli unici R_1-oggetti sono invece gli insiemi puntiformi, cioè sono nulli e quindi non esistono C-oggetti. Gli unici coanelli sono gli insiemi puntiformi e quindi sono banali, non esistono perciò cocorpi.

7.2. - Categoria degli spazi topologici.

Sia $\mathscr{T}$ la categoria delle applicazioni continue tra spazi topologici. Si riconosce subito che in $\mathscr{T}$ gli R-oggetti (unitari, commutativi) sono gli anelli topologici (unitari, commutativi) e così i C-oggetti (commutativi) sono i corpi topologici (campi topologici). Gli R-morfismi sono gli omomorfismi continui. L'unico coanello è lo spazio vuoto e non esistono cocorpi.

In $\mathscr{T}_0$ (spazi topologici con polo e corrispondenti morfismi) gli R-oggetti sono gli anelli topologici con lo zero nel polo, mentre gli unici R_1-oggetti sono banali e banali sono anche gli unici coanelli; non esistono corpi nè cocorpi.

7.3. - Categoria dei gruppi.

Nella categoria $\mathscr{G}$ degli omomorfismi di gruppi, i G-oggetti sono tutti e solo i gruppi abeliani (vedi [2]). Se $n\colon G\times G\to G$ è una G-struttura e se $+$ è l'operazione del gruppo abeliano G, si ha $n=+$ e quindi $(G;n)$ è un G-oggetto abeliano. Se $m\colon G\times G\to G$ è un omomorfismo verificante l'assioma (a) e, insieme con n, l'assioma (d), se $g, h\in G$ e se 0 è lo zero di G, si ha $m(g,h)=$ $=m(h+0, 0+h)$ ed essendo m un omomorfismo di $G\times G$ in G si ha

$$m(g+0, 0+h)=m((g,0)+(0,h))=m(g,0)+m(0,h)=0$$

cioè m è l'omomorfismo identicamente nullo di $G\times G$ in G. Si ha quindi che un oggetto anello in $\mathscr{G}$ è un qualsiasi gruppo abeliano insieme alla sua addizione e all'omomorfismo nullo come moltiplicazione. Viceversa, se A è un anello tale che la sua moltiplicazione è identicamente nulla, A considerato come gruppo abeliano è un R-oggetto di $\mathscr{G}$. Si ha quindi che la categoria $\mathscr{G}_R$ è isomorfa alla categoria $\mathscr{G}_G$ dei G-oggetti di $\mathscr{G}$ e che entrambe sono isomorfe alla categoria Ab dei gruppi abeliani, (gli R-morfismi sono tutti i morfismi di Ab). Gli R_1-oggetti di $\mathscr{G}$ sono tutti e soli i gruppi nulli, non esistono perciò C-oggetti. Gli unici coanelli sono banali e perciò non esistono cocorpi.

7.4. - Categoria dei fibrati su uno spazio X.

In $\mathscr{F}_X$ (categoria dei fibrati con spazio base uno spazio topologico X fissato e degli X-morfismi) gli R-oggetti sono i fibrati anulari. Sia, infatti, $\boldsymbol{E}=(E, X, p)$ un fibrato con sezioni globali. Un prodotto diretto $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}$ è il fibrato avente come spazio totale il prodotto fibrato su X $E\underset{X}{\times}E$ dello spazio E per se stesso e come proiezione su X l'applicazione q tale che se $(a, b)\in E\underset{X}{\times}E$ $q(a, b)=p(a)=p(b)$. Se n, m: $\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{E}\to\boldsymbol{E}$ sono due X-morfismi tali che $(\boldsymbol{E}; n, m)$ è un R-oggetto, le limitazioni n_x, m_x di n e m alla fibra $(E\underset{X}{\times}E)_x=$ $=E_x\times E_x$ sono applicazioni continue che vanno dal quadrato topologico di E_x in E_x. La coppia $(\boldsymbol{E}; n)$ è un G-oggetto abeliano e quindi è come noto un fibrato gruppale abeliano, cioè ogni fibra E_x è un gruppo topologico abeliano con addizione n_x. Il morfismo m, verificando gli assioni (a) e (d) è tale che ogni operazione m_x è associativa e distributiva rispetto a n_x, cioè ogni terna $(E_x; n_x, m_x)$ è un anello topologico e quindi $(\boldsymbol{E}; n, m)$ è un fibrato anulare. Se m verifica anche l'assioma (u), esiste in $\boldsymbol{E}$ una sezione globale degli elementi unitari, costituita dall'X-morfismo costante: $u_{XE}: X\to\boldsymbol{E}$. Se, infatti, $a\in E$ e $p(a)=x$, si ha: $a=l_E(a)=m\{u_E, l_E\}(a)=m(u_{XE}p(a), a)=m(u_{XE}(x), a)$ e analogamente si ha $m(a, u_{XE}(x))=a$, cioè $u_{XE}(x)$ è l'elemento unitario di $(E_x; n_x, m_x)$ per ogni $x\in X$. Un R_1-oggetto in $\mathscr{F}_X$ è quindi un fibrato anulare con sezione degli elementi unitari. Se $(\boldsymbol{E}; n, m)$ è un C-oggetto allora esso è un fibrato anulare tale che c'è almeno una fibra avente struttura di corpo topologico e le eventuali fibre non aventi tale struttura sono ridotte ad un punto, essendo relative a quei punti di X in cui la sezione degli zeri coincide con quella degli elementi unitari.

7.5. - Categoria dei morfismi omotopici.

Sia $\mathscr{C}_h$ la categoria delle classi di omotopia di applicazioni continue tra spazi topologici, dette anche «morfismi omotopici». È noto che lo spazio $\Omega^p X$ dei p cappi su uno spazio topologico X insieme al morfismo omotopico N: $\Omega^p X\times\Omega^p X\to\Omega^p X$ dell'applicazione continua n, definita per ogni coppia $\gamma_1, \gamma_2\in\Omega^p X$ da:

$$n(\gamma_1, \gamma_2)(t_1, \dots, t_p)=\begin{cases}\gamma_1(t_1, \dots, t_{p-1}, 2t_p) & \text{per } 0\leqslant t_p\leqslant \frac{1}{2}\,,\\[2ex] \gamma_2(t_1, \dots, t_{p-1}, 2t_p-1) & \text{per } \frac{1}{2}\leqslant t_p\leqslant 1\,,\end{cases}$$

è un G-oggetto in $\mathscr{C}_h$. Per quanto seguirà chiameremo il morfismo N col termine «somma» e scriveremo $n(\gamma_1, \gamma_2)=\gamma_1+\gamma_2$.

Sia ora X uno spazio T_1 e sia x_0 un suo punto dotato di un intorno contraibile. Diremo che un p cappio σ di X di origine x_0 è *irriducibile* se non esiste alcun numero reale $s \in]0, 1[$ tale che $\sigma(I^{p-1}x\{s\}) = x_0$. Se σ è irriducibile tale è anche il p cappio opposto $-\sigma$ definito da

$$(-\sigma)(t_1, \dots, t_p) = \sigma(t_1, \dots, t_{p-1}, 1 - t_p) .$$

È facile verificare che ogni cappio $\gamma \in \Omega^p X$ se non è omotopo al cappio costante ω, è omotopo alla somma di un numero finito (> 0) di cappi irriducibili, tenendo presente che lo spazio X è T_1 e che il punto x_0 ha un intorno contraibile. Consideriamo ora le coppie di cappi irriducibili e opposti tra loro e operiamo una scelta chiamando positivo l'uno e negativo l'altro, in modo che due cappi omotopi siano entrambi negativi o positivi. Tra tutti i cappi irriducibili positivi tra loro omotopi se ne sceglie uno e si denota con $\Psi^p X$ l'insieme dei cappi così scelti. Si ha che $\Psi^p X = \emptyset$ se e solo se lo spazio X è contraibile. Se $\sigma \in \Psi^p X$ scriviamo $\sigma = 1\sigma$ e $-\sigma = (-1)\sigma$. Se γ è omotopo alla somma di k cappi uguali a σ scriviamo $\gamma = k\sigma$ e $-\gamma = (-k)\sigma$. Poniamo infine $\omega = 0\sigma$. Se la somma in $\Omega^p X$ è commutativa possiamo scrivere per ogni p-cappio γ:

$$\gamma \sim \sum_{\sigma \in \psi^p x} k_\sigma \sigma \qquad (\sim \text{ indica la relaz. di omotopia}) \tag{1}$$

dove k_σ è un intero opportuno per ogni σ ed è diverso da zero solo per quei σ che compaiono effettivamente in γ. Va inteso che la sommatoria è calcolata solo per quel numero finito di cappi σ tali che $k_\sigma \neq 0$ e che è uguale a ω nel caso che ogni coefficiente sia nullo. Si ha che ogni p-cappio ammette una e una sola rappresentazione del tipo (1) e che due cappi hanno la stessa rappresentazione se e solo se sono omotopi. Definiamo ora il morfismo $M\colon \Omega^p X \times \times \Omega^p X \to \Omega^p X$ come la classe di omotopia della applicazione continua m definita per ogni coppia di cappi $\gamma_1 \sim \sum_\sigma k_\sigma^1 \sigma$, $\gamma_2 \sim \sum_\sigma k_\sigma^2 \sigma$, da $m(\gamma_1, \gamma_2) = \gamma_1 \cdot \gamma_2 = = \sum_\sigma (k_\sigma^1 k_\sigma^1)\sigma$. Si verifica immediatamente che la terna $(\Omega^p X; N, M)$ è un R-oggetto commutativo in $\mathcal{C}_h$. Se $\Psi^p X$ è un insieme finito, allora se ε è la somma dei cappi di $\Psi^p X$, il morfismo omotopico $U\colon \Omega^p X \to \Omega^p X$ dell'applicazione u tale che $u(\gamma) = \varepsilon$ per ogni $\gamma \in \Omega^p X$ è un morfismo costante per il quale, detto 1 il morfismo omotopico di $l_{\Omega^p x}$, si ha $M\{1, U\} = 1 = M\{U, 1\}$ in quanto risulta

$$m\{l_{\Omega^p x}, u\} \sim l_{\Omega^p x} \sim m\{u, l_{\Omega^p x}\} .$$

Se $\Psi^p X$ è finito, dunque, $(\Omega^p X; N, M)$ è un R-oggetto unitario e, nel caso particolare che $\Psi^p X$ è vuoto, è l'R_1-oggetto nullo. Se si cambia l'insieme $\Psi^p X$ il morfismo M non cambia e quindi l'anello ora costruito è indipendente dalla scelta dei cappi da mettere in $\Psi^p X$.

Riepilogando, se X è uno spazio T_1 e x_0 è un suo punto dotato di un intorno contraibile, supposto che $(\Omega^p X; N)$ sia abeliano si può definire un morfismo M tale che $(\Omega^p X; N, M)$ è un R-oggetto commutativo. Un esempio concreto è dato dallo spazio dei cappi $\Omega^1 S^1$ sulla 1-sfera S^1; in tal caso basta prendere $\Psi^1 S^1$ costituito da un solo cappio tale che la sua restrizione all'interno dell'intervallo I sia iniettiva; si ottiene un R-oggetto unitario (non nullo), essendo $\Psi^1 S^1$ finito (e non vuoto).

8. - Sottoanelli e ideali in una categoria.

Sia $\mathscr{A}$ una categoria e $(A; \nu, \mu)$ un suo R-oggetto. Se $f: H \to A$ è un morfismo e $X \in Ob\mathscr{A}$, indicheremo con $f(X, A)$ l'insieme dei morfismi di X in A che ammettono una fattorizzazione mediante H con f fattore in arrivo.

Definizione 8.1. Un sottooggetto [1] $i: S \to A$ di A sarà detto un *sotto-R-oggetto* o un *sottoanello* di $(A; \nu, \mu)$ se l'insieme $i(X, A)$ è un sottoanello di (X, A) per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$.

Proposizione 8.2. Se $i: S \to A$ è un sotto-R-oggetto di $(A; \nu, \mu)$ esistono due trasformazioni naturali $\nu^S, \mu^S: h^S \times h^S \to h^S$ tali che $(S; \nu^S, \mu^S)$ è un R-oggetto.

Dimostrazione. Tra (X, S) e i (X, A), per ogni X, c'è corrispondenza biunivoca, essendo i in monomorfismo. Se $f \in i(X, A)$ sia if_S la sua fattorizzazione mediante i. La corrispondenza $\varphi_X: i(X, A) \to (X, S)$ tale che $\varphi_X(f) = f_S$ induce una struttura di anello su (X, S) che rende φ_X un isomorfismo. Se ν_X^S, μ_X^S sono tali strutture per ogni X, e se $f: X \to Y$ è un morfismo, sappiamo che $h^A f: (Y, A) \to (X, A)$ è un omomorfismo e quindi la sua restrizione $\underline{h^A f}: i(Y, A) \to i(X, A)$ è ancora un omomorfismo. Si ha che $h^S f = \varphi_X \underline{h^A f} \varphi_Y$, poichè per ogni $g_S: Y \to S$ si ha

$$\varphi_X \underline{h^A f}\, \varphi_Y(g_S) = \varphi_X \underline{h^A f}(ig_S) = \varphi_X(ig_S f) = g_S f = h^S f(g_S)\,,$$

è un omomorfismo di anelli per cui $\nu^S = \{\nu_X^S\}_{X \in Ob\mathscr{A}}$ e $\mu_S = \{\mu_X^S\}_{X \in Ob\mathscr{A}}$ sono le trasformazioni naturali cercate.

---

[1] D'ra in poi indicheremo un sottooggetto semplicemente con un monomorfismo suo rappresentante ma va inteso che il discorso è a meno di isomorfismi di sottooggetti.

Proposizione 8.3. Se $i: S \to A$ è un sotto-R-oggetto di $(A; \nu, \mu)$, i è un R-morfismo.

Dimostrazione. Per ogni X, $h_X i: (X, S) \to (X, A)$ associa a $f_S: X \to A$ il morfismo $if_S = f: X \to A$ e per quanto sopra visto tale applicazione è un omomorfismo.

Osservazione 8.4. Dalle Propp. 8.2 e 8.3 segue che un sotto-R-oggetto di un R-oggetto di $\mathscr{A}$ è un suo sottooggetto in $\mathscr{A}_R$.

Proposizione 8.5. Se $a \in \mathrm{Nat}(k, h^A)$ è lo zero di $(A; \nu, \mu)$, ogni suo sotto-R-oggetto è a-fattorizzante.

Dimostrazione. Supposto che sia e_S lo zero di (S, S) si ha $ie_S = a_{SA}$, essendo i un R-morfismo.

Proposizione 8.6. Se $\mathscr{A}$ è una D-categoria e $i: S \to A$ è un monomorfismo e S è tale che esiste un oggetto finale F per cui sia $(F, S) \neq \emptyset$, allora $i: S \to A$ è un sotto-R-oggetto di un R-oggetto $(A; n_A, m_A)$ se e solo se esistono due morfismi n_S e m_S che rendono commutativi i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} S \times S \arrow[r, "n_S"] \arrow[d, "i \times i"'] & S \arrow[d, "i"] \\ A \times A \arrow[r, "n_A"'] & A \end{tikzcd} \qquad \text{e} \qquad \begin{tikzcd} S \times S \arrow[r, "m_S"] \arrow[d, "i \times i"'] & S \arrow[d, "i"] \\ A \times A \arrow[r, "m_A"'] & A \end{tikzcd}$$

essendo $p_1, p_2: S \times S \to S$ un quadrato diretto di S e un morfismo $\bar{\omega}$ tale che $i\bar{\omega} = \omega i$, essendo $\omega: A \to A$ il passaggio all'opposto.

Dimostrazione. Condizione necessaria. $i(S \times S, A)$ è un sottoanello di $(S \times S, A)$ e quindi esiste un morfismo $n_S: S \times S \to S$ tale che $ip_1 + ip_2 = in_S$. Si ha $ip_1 + ip_2 = n_A(i \times i)\{p_1, p_2\} = n_A(i \times i) = in_S$. Analogamente si dimostra la esistenza di m_S. L'esistenza di $\bar{\omega}$ è facilmente provata.

Condizione sufficiente. Per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$ risulta $i(X, A) \neq \emptyset$ esistendo almeno un morfismo costante di X in S. Siano $f, g \in i(X, A)$, si ha $n_A\{f, g\} = n_A\{if_S, ih_S\} = n_A(i \times i)\{f_S, g_S\} \in i(X, A)$. Analogamente si dimostra che $i(X, A)$ è chiuso rispetto alla moltiplicazione. L'esistenza degli opposti è facilmente provata.

Osservazione 8.7. I morfismi n_S e m_S della Prop. 8.6 sono unici, essendo i un monomorfismo, e sono rispettivamente l'addizione e la moltiplicazione dell'R-oggetto associato al sottooggetto i.

Da quanto precede discende subito che il concetto di sotto-R-oggetto coincide, nel caso della categoria degli insiemi, coll'ordinario concetto di sottoanello.

Definizione 8.8. Sia $\mathscr{A}$ una categoria e $(A; \nu, \mu)$ un suo R-oggetto. Un sottooggetto $i: I \to A$ di A è detto un *ideale* dell'R-oggetto $(A; \nu, \mu)$ se, per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$, l'insieme $i(X, A)$ è un ideale di (X, A).

Osservazione 8.9. Dalla Def. 8.8 segue subito che un ideale è anche un sotto-R-oggetto.

Proposizione 8.10. Se $(A; \nu^A, \mu^A)$ e $(B; \nu^B, \mu^B)$ sono due R-oggetti e $f: A \to B$ è un R-morfismo, ogni nucleo di f relativo allo zero di $(B; \nu^B, \mu^B)$ è un ideale di $(A; \nu^A, \mu^A)$.

Dimostrazione. Sia $\mathfrak{b} \in \mathrm{Nat}\,(k, h^B)$ lo zero di $(B; \nu^B, \mu^B)$ e sia $u: K \to A$ un b-nucleo di f. Per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$ se $v = uv_K \in u(X, A)$ si ha $h_X f(v) = fuv_K = b_{KB}v_K = b_{KB}$ che è lo zero di (X, B), si ha cioè $u(X, A) \subset \mathrm{Ker}\,(h_X f)$. Sia ora $v: X \to A$ un morfismo tale che $fv = b_{XB}$, esiste allora $w: X \to K$ tale che $uw = v$, e quindi $\mathrm{Ker}\,(h_X f) \subset u(X, A)$. Essendo $h_X f$ un omomorfismo, $u(X, A) = \mathrm{Ker}\,(h_X f)$ è un ideale di (X, A).

Proposizione 8.11. Se $\mathscr{A}$ è una D-categoria, un sotto-R-oggetto $i: I \to A$ dell'R-oggetto $(A; n_A, m_A)$ è un ideale se e solo se esistono due morfismi m' e m'' che rendono commutativi i seguenti diagrammi:

$$\begin{tikzcd} A \times I \arrow[r, "m'"] \arrow[d, "1_A \times i"'] & I \arrow[d, "i"] \\ A \times A \arrow[r, "m_A"'] & A \end{tikzcd} \qquad \text{e} \qquad \begin{tikzcd} I \times A \arrow[r, "m''"] \arrow[d, "i \times 1_A"'] & I \arrow[d, "i"] \\ A \times A \arrow[r, "m_A"'] & I \end{tikzcd}$$

con i soliti significati per i simboli $A \times A$, $A \times I$ e $I \times A$.

Dimostrazione. Condizione necessaria. Consideriamo le proiezioni $p_A: A \times I \to A$ e $p_I: A \times I \to I$. Esiste un morfismo m' tale che $p_A \cdot ip_I = im'$, essendo $i(A \times I, A)$ un ideale di $(A \times I, A)$. Si ha $p_A \cdot ip_I = m_A\{p_A, ip_I\} = m_A(l_A \times i)\{p_A, p_I\} = m_A(l_A \times i) = im'$. Analogamente si prova l'esistenza di m''.

Condizione sufficiente. Siano $f \in (X, A)$ e $g = ig_I \in i(X, A)$. Si ha

$$m_A\{f, ig_I\} = m_A(l_A \times i)\{f, g_I\} = im'\{f, g_I\} \in i(X, A) .$$

Analogamente si prova che $m_A\{ig_I, f\} \in i(X, A)$.

Esempi 8.12. Per ogni R-oggetto $(A; \nu, \mu)$ di una categoria $\mathscr{A}$ esiste almeno un ideale, tale è infatti il sottooggetto di A rappresentato da un qualsiasi automorfismo di A (ad esempio l'identità l_A). Se in $\mathscr{A}$ esiste un oggetto finale F, lo zero a_{FA} di $(h^A F; \nu_F, \mu_F)$ è un ideale, poichè per ogni $X \in Ob\mathscr{A}$, $a_{FA}(X, A)$ è ridotto allo zero di $(h^A X; \nu_X, \mu_X)$. I due ideali ora considerati sono anche detti *banali*; il primo è detto anche *improprio*, il secondo è detto *nullo*.

È immediato verificare che in $\mathscr{S}$ il concetto di ideale da noi dato coincide con quello ordinario.

Concludiamo il nostro studio stabilendo alcune generalizzazioni di noti teoremi della teoria degli anelli ordinari.

L'unica ipotesi da fare sulla categoria $\mathscr{A}$ in cui opereremo è che esista un oggetto finale F.

Teorema 8.13. *Se $(A; \nu^A, \mu^A)$ e $(B; \nu^B, \mu^B)$ sono R-oggetti e $\mathfrak{b}$ è lo zero del secondo, un R-morfismo $f: A \to B$ possiede un b-nucleo appartenente a (F, A) se e solo se f è un monomorfismo.*

Dimostrazione. Condizione necessaria. Sia $a_{FA}: F \to A$ un b-nucleo di f. Si riconosce subito che $a_A = a_{FA}a: A \to A$ è il morfismo nullo di (A, A). Siano $u, v \in (X, A)$ tali che $fu = fv$. Si ha $f(u - v) = fu - fv = b_{XB} = fa_{XA}$ e quindi l'unico morfismo $x: X \to F$ è tale che $a_{FA}x = u - v = a_{XA}$. Essendo a_{XA} lo zero di (X, A) si ha $u = v$ e quindi f è un monomorfismo.

Condizione sufficiente. Essendo f un R-morfismo si ha $fa_{FA} = b_{FB}$. Se ora $v: H \to A$ è tale che $fv = b_{HA}$, e h è l'unico morfismo di H in F, si ha $b_{HA} = fv = fa_{FA}h$ da cui, essendo f un monomorfismo, $v = a_{FA}h$ e quindi a_{FA} è un b-nucleo di f.

Teorema 8.14. *Ogni C-oggetto di $\mathscr{A}$ possiede solo ideali banali.*

Dimostrazione. Sia $i: I \to A$ un ideale non nullo del C-oggetto $(A; \nu, \mu)$ e sia $\mathfrak{a}$ lo zero di tale C-oggetto; l'insieme $i(F, A)$ non è ridotto al solo morfismo a_{FA} essendo i non nullo. Sia $f \in i(F, A)$ un morfismo diverso da a_{FA}, esso è ovunque non nullo e possiede quindi un inverso f^{-1}. Si ha $f \cdot f^{-1} = u_{FA} \in i(F, A)$, essendo u_{FA} l'elemento unitario di (F, A). Per ogni X, la u-morfismo $u_{XA}: X \to A$ appartiene a $i(X, A)$ e quindi è $i(X, A) = (X, A)$ e cioè ogni morfismo di (X, A) si fattorizza mediante i. In particolare esiste un morfismo $\varphi: A \to I$ tale che $i\varphi = l_A$, di conseguenza i è una retrazione e, quindi, un isomorfismo tra I e A; allora il sottooggetto di A individuato da i coincide con quello rappresentato da l_A e perciò se i non è nullo è necessariamente uguale a l_A.

Teorema 8.15. *Siano* $(A; \nu^A, \mu^A)$ *un* C*-oggetto e* $(B; \nu^B, \mu^B)$ *un* R_1*-oggetto non nullo; se* $\mathfrak{b}$ *è lo zero di quest'ultimo, ogni* R_1*-morfismo* $f: A \to B$, *dotato di* b*-nucleo è un monomorfismo.*

Dimostrazione. Sia $i: K \to A$ un b-nucleo di f e sia a_{FA} lo zero di $(F.A)$; per la Prop. 8.10, i è un ideale. Se $i \neq a_{FA}$, i è, per il Teorema 8.14, un isomorfismo tra K e A, da cui segue che $f = b_{AB}$ (vedi Prop. 1.8). Ciò è assurdo perchè se u_A e v_B sono i morfismi unitari di (A, A) e (B, B) si ha $fu_{KA} = v_{KB} \neq b_{KB}$. Deve, quindi, essere $i = a_{FA}$ cioè f è un monomorfismo, per il Teorema 8.13.

Bibliografia

[1] B. ECKMANN and P. J. HILTON, *Operators and cooperators in homotopy theory*, Math. Ann. **141** (1960), 1-21.

[2] B. ECKMANN and P. J. HILTON, *Group-like structures in general categories, I. Multiplications and comultiplications*, Math. Ann. **145** (1962), 227-255.

[3] B. MITCHELL, *Theory of Categories*, Academic Press, London 1965.

* * *