Riv. Mat. Univ. Parma (3) 2 (1973), 1-9

CORRADO SCARAVELLI (*)

Stretto legame fra equazioni alle prederivate ed equazioni differenziali quando le equazioni sono lineari e a coefficenti costanti.

Parte I: Caso del primo ordine. (**)

1. - Introduzione.

1.1. – In questa Nota mi rivolgo solo ad «equazioni del primo ordine» allo scopo di avviare la trattazione generale per «equazioni d'ordine finito qualsiasi» che rimando a un successivo lavoro.

Detto h il passo, pongo subito in parallelismo le due equazioni [nelle incognite rispettive $u(x; h)$ e $v(x)$]:

$$(1)_f \qquad p_0 u^{(1;h)}(x; h) + p_1 u(x; h) = f(x) ,$$

$$(1)'_f \qquad p_0 v'(x) + p_1 v(x) = f(x) ,$$

e in particolare le due equazioni omogenee corrispondenti:

$$(1)_0 \qquad p_0 u^{(1;h)}(x; h) + p_1 u(x; h) = 0 ,$$

$$(1)'_0 \qquad p_0 v'(x) + p_1 v(x) = 0 .$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito col contributo del C.N.R. nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni. — Ricevuto: 18-V-1973.

La $(1)_f$ [e in particolare la $(1)_0$] è un'equazione alle prederivate ([1]), la $(1)'_f$ [e in particolare la $(1)'_0$] è un'equazione differenziale; entrambe le equazioni sono del primo ordine, lineari, con gli *stessi* coefficienti p_0 e p_1, e lo *stesso* termine noto $f(x)$.

Ipotesi: 1°) I coefficienti $p_0 \neq 0$ e p_1 (reali o complessi) siano *costanti* tanto rispetto ad x che rispetto ad h.

2°) La funzione $f(x)$ sia indipendente da h, definita in un certo intervallo (non nullo) $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$, e ivi *integrabile secondo Mengoli e Cauchy* ([2]).

3°) Per il passo h sia: $0 < h < x_1 - x_0$ ([3]).

1.2. – Dico subito che *il caso particolare notevole in cui nella* $(1)_f$ *sia* $p_0 = 1$, $p_1 = 0$ è già stato trattato egregiamente dal prof. A. MAMBRIANI in [**1**] ([4]).

1.3. - Richiamo della risoluzione di $(1)_f$ e in particolare di $(1)_0$.

Per l'equazione $(1)_f$ conosciamo la soluzione generale in forma razionale (ottenuta recentemente in [**3**]), detta *soluzione generale elementare*. Precisamente:

« La soluzione generale elementare di $(1)_f$ è data da

$$u(x; h) = \mathscr{F}(x; h) + \mathscr{U}(x; h)\,, \tag{2$_f$}$$

dove:

1°) La funzione $\mathscr{F}(x; h)$ è la soluzione particolare elementare [della $(1)_f$] così definita:

$$\mathscr{F}(x; h) = \begin{cases} 0\,, & x \in (x_0 \ldots (x_0 + h) -)\,, \\ \sum_{0}^{\nu-1}{}_s A_s f(x - (s+1)h)\,, & x \in (x_0 + h \ldots x_1)\,. \end{cases} \tag{3$_f$}$$

2°) La funzione $\mathscr{U}(x; h)$ è la soluzione generale elementare, di $(1)_0$, così

([1]) Sulla definizione di equazione alle prederivate cfr. [**3**].
([2]) Ossia, come dicono molti Autori, integrabile secondo RIEMANN.
([3]) Nel caso $x_0 - x_1 > h > 0$ si ragiona analogamente (cfr. [**2**]).
([4]) Cfr. in [**1**] nn.: **1.3**, **1.5** (proprietà **2**), e n. **4.2**.

definita:

$$(3)_0 \quad \mathscr{U}(x;h) = \tilde{c}\cdot\mathscr{U}_0(x;h) = \tilde{c}\cdot h^{-1}A_\nu \quad \begin{cases} x \in (-\infty \ldots +\infty)\ (^5) \\ \tilde{c} = \tilde{c}(x;h) \text{ arbitraria costante per l'incremento } h\,. \end{cases}$$

3°) Ricordo poi che, tanto in $(3)_f$ che in $(3)_0$, si ha (cfr. [**2**], [**3**])

$$(4) \qquad \nu = \nu_{(x-x_0)/h} = [\text{parte intera del rapporto } (x-x_0)/h]\,,$$

$$(5) \qquad A_s = (-1)^s[-(p_0/h)+p_1]^s(p_0/h)^{-s-1} = p^{-1}h\cdot(1+\alpha h)^s \quad (s=0,1,2,\ldots,\nu),$$

dove $\alpha = -p_1/p_0$ è la radice dell'equazione caratteristica di $(1)_0$. »

1.4. - Richiamo della risoluzione di $(1)'_f$ e in particolare di $(1)'_0$.

Per l'equazione $(1)'_f$ la soluzione generale è ben nota. Cercando di presentare questa soluzione in una forma analoga a quella ottenuta per la soluzione generale elementare della equazione $(1)_f$, abbiamo:

« La soluzione generale di $(1)'_f$ è data da

$$(2)'_f \qquad v(x) = F(x) + V(x)\,,$$

dove:

1°) La $F(x)$ è la soluzione particolare [della $(1)'_f$]:

$$(3)'_f \qquad F(x) = p^{-1}\exp(\alpha x)\int_{x_0}^{x}\exp(-\alpha t)f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x_0 \leqslant x \leqslant x_1)\,.$$

2°) La $V(x)$ è la soluzione generale, della $(1)'_0$, così definita:

$$(3)'_0 \qquad \begin{aligned} V(x) &= c\cdot V_0(x) = \\ &= cp_0^{-1}\exp(\alpha\cdot(x-x_0)) \qquad [x\in(-\infty\ldots+\infty),\ c \text{ arbitraria costante}]\,. \end{aligned}$$

(^{5}) La $(3)_0$ vale manifestamente non solo in $(x_0\ldots x_1)$ ma anche in $(x_0\ldots+\infty)$; inoltre si vede che ad x_0 si può sostituire un qualsiasi numero $\bar{x}_0 > x_0$; onde la $(3)_0$ vale per ogni x dell'intervallo $(-\infty\ldots+\infty)$.

3°) Ricordo poi che, tanto in $(3)'_f$ che in $(3)'_0$, $\alpha = -p_1/p_0$ è la radice dell'equazione caratteristica di $(1)'_0$. »

1.5. – Sotto le ipotesi enunciate alla fine del n. **1.1**, valgono i due teoremi seguenti:

Teorema I. *L'equazione alle prederivate* $(1)_f$ *e l'equazione differenziale* $(1)'_f$ *hanno, rispettivamente,*

la soluzione particolare (elementare) $\mathscr{F}(x; h)$ *[data da* $(3)_f$*] e*

la soluzione particolare $F(x)$ *[data da* $(3)'_f$*]*

così strettamente legate:

$$\lim_{h\to 0+} \mathscr{F}(x; h) = F(x)\,, \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1\,, \tag{6}$$

e questa tendenza è uniforme (rispetto alla variabile x).

Teorema II. *L'equazione omogenea alle prederivate* $(1)_0$ *e l'equazione omogenea differenziale* $(1)'_0$ *hanno, rispettivamente,*

la soluzione particolare (elementare) $\mathscr{U}_0(x; h)$ *[data da* $(3)_0$*] e*

la soluzione particolare $V_0(x)$ *[data da* $(3)'_0$*]*

così strettamente legate:

$$\lim_{h\to 0+} \mathscr{U}_0(x; h) = V_0(x)\,, \qquad -\infty < x < +\infty\,, \tag{7}$$

e questa tendenza è uniforme (rispetto alla variabile x) in ogni intervallo limitato.

Per le dimostrazioni e un semplice esempio vedansi i §§ **2** e **3**, rispettivamente.

1.6. - Osservazione.

Le uguaglianze (6) e (7) saranno dimostrate prendendo per A_s la sua espressione (razionale) mediante la radice α (v. § **2**). Ma, per la (5), le uguaglianze (6) e (7) sono pure valide dando ad A_s la sua espressione (razionale) mediante i coefficienti p_0 e p_1: questo fatto avrà notevole importanza per le equazioni generali (alle prederivate e differenziali) d'ordine superiore al quarto, *per le quali non diventa necessario conoscere esplicitamente le radici dell'equazione caratteristica.*

2. - Dimostrazione dei Teoremi I e II.

2.1. - Dimostrazione del Teorema I.

2.1.1. – Procedo, dapprima, ad un riavvicinamento delle espressioni dei due membri di (6) (6):

1°) Poichè nel secondo membro $F(x)$, di (6), figura il numero α $(=-p_0^{-1}p_1)$, conviene introdurre questo stesso α anche nel primo membro, cioè in $\mathscr{F}(x; h)$, e ciò s'ottiene semplicemente prendendo per A_s l'ultima delle espressioni indicate in (5).

2°) Poichè nel primo membro di (6) figura un passaggio al limite per $h \to 0+$, conviene trasformare in modo analogo il secondo membro $F(x)$. Data la forma di $\mathscr{F}(x; h)$, basta sostituire nell'espressione di $F(x)$ all'integrale che vi compare il limite (per $h \to 0+$) di una sua somma integrale: precisamente, il limite della somma integrale relativa alla suddivisione dell'intervallo d'integrazione $(x_0 \ldots x)$ negli intervallini consecutivi

$$(x_0 \ldots x_0 + h), \quad (x_0 + h \ldots x_0 + 2h), \quad \ldots, \quad (x_0 + (\nu - 1)h \ldots x_0 + \nu h)$$

[in numero di ν e tutti di lunghezza h (7)] e al calcolo della funzione $\exp(-\alpha t) f(t)$ (sotto il segno d'integrale) nei valori

$$x - \nu h, \quad x - (\nu - 1)h, \quad \ldots, \quad x - h$$

[appartenenti ordinatamente agli intervallini precedenti, cfr. [**1**], n. **4.2**].

3°) Soddisfacendo a 1°) e 2°), la (6) diventa dunque:

$$\lim_{h \to 0+} [(1 + \alpha h)^{-1} \cdot h p_0^{-1} \sum_1^{\nu}{}_s (1 + \alpha h)^s f(x - sh)] =$$
$$= \lim_{h \to 0+} [h p_0^{-1} \sum_1^{\nu}{}_s \exp(\alpha s h) f(x - sh)]$$

---

(6) Essendo $\lim\limits_{h \to 0+} (x_0 + h) = x_0$, basta prendere per la $\mathscr{F}(x; h)$ [data da $(3)_f$] la sua parte non nulla.

(7) Si ricordi che si ha (cfr. [**1**], n. **4.2**):

$$\lim_{h \to 0+} (x_0 + \nu h) = x_0 + \lim_{h \to 0+} (\nu h) = x_0 + (x - x_0) = x\,.$$

ossia, con semplici modifiche,

$$\lim_{h\to 0+} \sum_{1}^{\nu}{}_s h\cdot[(1+\alpha h)^s - \exp(\alpha s h)]f(x - sh) = 0 \,, \tag{6$_{\text{bis}}$}$$

che ora debbo dimostrare essere vera.

2.1.2. – Per brevità, indico con $\Phi(x; h)$ la somma a primo membro di $(6)_{\text{bis}}$. Poichè la $f(x)$, $x \in (x_0 \dots x_1)$, è necessariamente limitata (in quanto integrabile secondo MENGOLI e CAUCHY), posto $L = \sup|f(x)|$, $x \in (x_0 \dots x_1)$, si ha, nell'intervallo $(x_0 \dots x_1)$,

$$|\Phi(x; h)| \leqslant Lh \sum_{1}^{\nu}{}_s |(1+\alpha h)^s - \exp(\alpha s h)| . \tag{8}$$

Ma è:

$$\begin{aligned} |(1+\alpha h)^s - \exp(\alpha s h)| &\leqslant |\exp(\alpha h) - (1+\alpha h)| \cdot \sum_{0}^{s-1}{}_r |\exp(\alpha r h)(1+\alpha h)^{s-1-r}| \leqslant \\ &\leqslant \left|\sum_{2}^{\infty}{}_r \frac{(\alpha h)^r}{r!}\right| \cdot \sum_{0}^{s-1}{}_r \{\exp(|\alpha| r h)(1+|\alpha| h)^{s-1-r}\} < \\ &< |\alpha|^2 h^2 \sum_{0}^{\infty}{}_r \frac{(|\alpha| h)^r}{r!} \cdot s \exp(|\alpha|(s-1)h)(1+|\alpha| h)^{s-1} , \end{aligned}$$

onde

$$|(1+\alpha h)^s - \exp(\alpha s h)| < s|\alpha|^2 h^2 \exp(|\alpha| s h)(1+|\alpha| h)^{s-1},$$

ed anche

$$|(1+\alpha h)^s - \exp(\alpha s h)| < \nu|\alpha|^2 h^2 \exp(|\alpha| \nu h)(1+|\alpha| h)^{\nu}.$$

Pertanto la (8) diventa

$$|\Phi(x; h)| < Lh|\alpha|^2 (\nu h)^2 \exp(|\alpha| \nu h)(1+|\alpha| h)^{\nu},$$

da cui, ponendo $\nu_1 = [(x_1 - x_0)/h]$ ed essendo $\nu \leqslant \nu_1$,

$$|\Phi(x; h)| < Lh|\alpha|^2 (\nu_1 h)^2 \exp(|\alpha| \nu_1 h)(1+|\alpha| h)^{\nu_1}. \tag{8$'$}$$

Tenendo ora presente che $(\nu_1 h) \xrightarrow[h\to 0+]{} x_1 - x_0$ [cfr. annotazione (7)] e che

$$\lim_{h\to 0+} (1+|\alpha| h)^{\nu_1} = \lim_{h\to 0+} [(1+|\alpha| h)^{1/|\alpha| h}]^{|\alpha|\cdot \nu_1 h} = \exp(|\alpha|(x_1 - x_0)) ,$$

dalla (8)′ si conclude infine

$$|\Phi(x; h)| \xrightarrow[h\to 0+]{} 0 \quad [\text{uniformemente rispetto ad } x \in (x_0 \dots x_1)] .$$

La $(6)_{\text{bis}}$ è dunque vera, ed il Teorema I è così completamente dimostrato.

2.2. - Dimostrazione del Teorema II.

Dalla $(3)_0$, prendendo per A_ν l'ultima delle espressioni indicate in (5), risulta

$$\mathcal{U}_0(x; h) = p_0^{-1}\cdot(1 + \alpha h)^\nu. \tag{9}$$

Ricordando l'espressione di $V_0(x)$ data da $(3)_0'$, e notando che è

$$\lim_{h\to 0+}(1 + \alpha h)^\nu = \lim_{h\to 0+}[(1 + \alpha h)^{1/\alpha h}]^{\alpha\cdot\nu h} = \exp\big(\alpha\cdot(x - x_0)\big) ,$$

dalla (9) si ottiene immediatamente l'eguaglianza (7), e, ovviamente, la tendenza uniforme (rispetto alla variabile x) in ogni intervallo limitato. Il Teorema II è così dimostrato.

3. - Un semplice esempio.

Siano date le due particolari equazioni

$$u^{(1;h)}(x; h) - u(x; h) = x , \tag{10}$$

$$v'(x) - v(x) \quad = x , \tag{10$'$}$$

[di equazioni omogenee corrispondenti

$$u^{(1;h)}(x; h) - u(x; h) = 0 , \tag{10_0}$$

$$v'(x) - v(x) \quad = 0] , \tag{$10_0'$}$$

che sono, ordinatamente, dei tipi $(1)_f$, $(1)_f'$, $[(1)_0$, $(1)_0']$, con $p_0 = 1$, $p_1 = -1$, $f(x) = x$. Qui, poichè la funzione $f(x) \equiv x$ è ovunque definita, si possono fissare a piacere i valori x_0 e x_1: solo per semplificare le scritture seguenti assumo $x_0 = 0$; come nel caso generale dovrà aversi poi $x_1 - x_0 = x_1 > h$.

1°) La soluzione elementare $\mathscr{F}(x;h)$, di (10), che s'ottiene applicando la $(3)_f$, per $x \in (h \dots x_1)$ è data da [8]

$$\mathscr{F}(x;h) = h \sum_{0}^{\nu-1}{}_s (1+h)^s (x-(s+1)h) =$$

$$= h(x-h)\sum_{0}^{\nu-1}{}_s (1+h)^s - h^2 \sum_{1}^{\nu-1}{}_s s(1+h)^s,$$

ossia, con semplici calcoli,

$$\mathscr{F}(x;h) = (x-\nu h+1)(1+h)^\nu - x - 1\,.$$

Tenendo ora presente che $\lim\limits_{h\to 0+}(\nu h) = x$, $\lim\limits_{h\to 0+}(1+h)^\nu = \lim\limits_{h\to 0+}\left((1+h)^{1/h}\right)^{\nu h} = e^x$, si ottiene

$$\lim_{h\to 0+}\mathscr{F}(x;h) = e^x - x - 1\,.$$

D'altra parte la soluzione particolare $F(x)$ di $(10)'$ è data da [cfr. $(3)'_f$]:

$$F(x) = e^x\int_0^x e^{-t}t\,\mathrm{d}t = e^x\cdot(1-xe^{-x}-e^{-x}) = e^x - x - 1\,.$$

La (6), in questo caso, è quindi verificata.

2°) La soluzione particolare (elementare) $\mathscr{U}_0(x;h)$, di $(10)_0$, che s'ottiene applicando la $(3)_0$, è data da

$$\mathscr{U}_0(x;h) = (1+h)^\nu, \qquad x\in(-\infty \dots +\infty)\,.$$

Ne segue, procedendo come sopra,

$$\lim_{h\to 0+}\mathscr{U}_0(x;h) = e^x\,,$$

dove il secondo membro è esattamente la soluzione particolare $V_0(x)$ di $(10)'_0$. Pertanto anche la (7) è qui verificata.

(8) Cfr. annotazione (6).

Riferimenti.

[1] A. Mambriani, *L'operazione inversa fondamentale del « Calcolo alle differenze finite » è un'operazione elementare* (I), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 185-211.

[2] C. Scaravelli, *Risoluzione, razionale nelle funzioni date, delle equazioni alle differenze (con un passo $h \neq 0$), d'ordine finito, lineari e a coefficienti periodici di periodo h* (I, II), Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 15-41; (2) **12** (1971),

[3] C. Scaravelli, *Opportunità di presentare le equazioni alle differenze finite anche nella forma di equazioni alle prederivate. Il caso lineare e a coefficienti costanti*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. (8) **52** (1972), 861-867.

Summary.

We emphasize the close connection between solutions of linear prederivative equations and solutions of linear differential equations with the same constant coefficients and the same known term. Precisely, we show that elementary solutions of the prederivative equation, when step $h \to 0+$ (or $h \to 0-$), converge uniformly to solutions of the differential equation. In this part one we display the first order case.

* * *