Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972), 275-277

BRUNO D'AMORE (*)

Alcuni risultati sui grafi bipartiti orientati, sui grafi complementari e sulla completezza dei grafi connessi. (**)

1. - Alcune definizioni.

Sia $G(X, \Omega)$ un grafo semplice orientato, dunque $\Omega \subseteq X^2$ (1). Indichiamo con $G^*(\Omega, \theta)$ il «grafo dei cicli di lunghezza due» di G, cioè il grafo orientato avente come elementi quelli di Ω ed ammettendo un elemento di θ se e solo se gli elementi di Ω che associa costituiscono, nell'ordine, un ciclo di G (2).

Ricordiamo cosa si intende per grafo BU (bipartito uniorientato). Si tratta di un grafo bipartito (3) in cui la classe X' è tutta costituita da vertici iniziali e quella X'' di terminali (o viceversa).

Per tutte le altre definizioni che non richiamiamo esplicitamente, rimandiamo ad [1] e a [2]. Indicheremo con BSU un grafo BU semplice; e con BSCU un grafo BSU completo.

2. - Alcuni risultati sui grafi BS.

Proposizione 1. Sia $G(X, \Omega)$ un grafo BSU finito. Allora G^* è composto di vertici isolati. Inoltre, se n' ed n'' sono i numeri cardinali delle classi

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, 40127 Bologna, Italia.
(**) Ricevuto: 16-XI-1972. Lavoro eseguito per il G.N.S.A.G.A. (C.N.R.).
(1) Ved. [1], p. 3. S'intenda per «semplice» un grafo senza archi doppi e senza lacci. La nomenclatura è quella di [1].
(2) Per una definizione di ciclo, si veda [2], n. 2.
(3) v. [2], n. 4.

X' ed X'', mentre n è il cardinale di Ω, si ha: $n \leqslant n' \cdot n''$ e vale l'uguaglianza se e solo se $\boldsymbol{G}$ è BSCU.

Dimostrazione. Se $\boldsymbol{G}$ è BSU, per la sua definizione, $\boldsymbol{G}^*$ non ha archi, dato che non esistono cicli in $\boldsymbol{G}$. Se $\boldsymbol{G}$ non è BSCU, allora la disuguaglianza è immediata. Se è BSCU, allora l'uguaglianza è immediata. Viceversa, supponiamo valga l'uguaglianza. Supponiamo che $\boldsymbol{G}$ non sia BSCU. Si avrebbe allora un arco doppio, il che è escluso dall'ipotesi che $\boldsymbol{G}$ è S.

Proposizione 2. Sia $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ BS *non* U. Se $\boldsymbol{G}$ contiene un ciclo (non circuito) di lunghezza d, allora $\boldsymbol{G}^*$ contiene un ciclo (non circuito) di lunghezza $d-1$; e viceversa.

La dimostrazione è immediata.

Se però il ciclo è orientato, assume allora il nome di circuito e vale un asserto diverso (ved. Proposizione 4).

Proposizione 3. Sia $\boldsymbol{G}$ BS *non* U. Allora pure $\boldsymbol{G}^*$, se è connesso, è BS non U.

Ragionando per assurdo, neghiamo la tesi. Supponiamo cioè che Ω non sia scomponibile in due classi Ω' e Ω'' che costituiscono una partizione di Ω stesso, tali che non esistono elementi di θ colleganti coppie della stessa classe. Per definizione, ciò implicherebbe che in G deve esistere un arco doppio, mentre $\boldsymbol{G}$ è stato preso S. Inoltre $\boldsymbol{G}^*$ è non U, se è connesso. Infatti, dalla connessione di $\boldsymbol{G}^*$, segue che non è possibile scomporre $\boldsymbol{G}^*$ stesso in sottografi corrispondenti ciascuno ad un ciclo in $\boldsymbol{G}$: ciò implica che $\boldsymbol{G}^*$ non è U, altrimenti l'operazione detta sarebbe possibile, come è facile dimostrare.

Proposizione 4. Se $\boldsymbol{G}$ è BS non U e contiene un circuito, pure $\boldsymbol{G}^*$ contiene un circuito della stessa lunghezza.

Segue immediatamente dalle Proposizioni 2 e 3 e dalla definizione di $\boldsymbol{G}^*$.

Corollario. *Se* $\boldsymbol{G}$, BS *non* U, *è hamiltoniano, pure* $\boldsymbol{G}^*$ *lo è.*

Proposizione 5. Condizione necessaria e sufficiente affinchè $\boldsymbol{G}^*$ sia BC è che $n' + n'' = 4$ e che $\boldsymbol{G}$ sia BSC e contenga un circuito di lunghezza 4.

La dimostrazione è immediata se si tiene conto dei risultati di [**2**], della Proposizione 4 e della definizione di $\boldsymbol{G}^*$.

Proposizione 6. Se $\boldsymbol{G}$, BS non U, si può scomporre in cicli, allora $\boldsymbol{G}^*$ è sconnesso e, se è B allora è uniorientabile.

La dimostrazione è analoga a quella della Proposizione 3.

3. - Alcuni risultati sui grafi complementari e sulla completezza dei grafi.

Proposizione 7. Se G è S connesso, $G^{[\delta(G)]}$ è completo S (4).
La dimostrazione è immediata.

Proposizione 8. Se $\overline{G}$ (5) è connesso, tale è pure $\overline{G}^{[\delta(\overline{G})]}$. E viceversa.
La dimostrazione è banale e segue dalla Proposizione 7.

Proposizione 9. G è connesso e completo se e solo se $G^{[\delta(G)]} \cong G$.
Dalla Proposizione 7 segue che l'isomorfismo si realizza se e solo se $\delta(G) = 1$. La conclusione è immediata.

Proposizione 10. Valgono le seguenti uguaglianze supposto G un grafo S:

$$G \cup \overline{G} = G^{[\delta(G)]} = \overline{G}^{[\delta(\overline{G})]}.$$

La prima uguaglianza segue dalla Proposizione 8. Inoltre, dato che se un grafo G è S e completo, allora pure il suo complementare lo è, dalla Proposizione 7 segue la seconda uguaglianza.

Bibliografia.

[**1**] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris 1970.

[**2**] B. D'Amore, *Alcune considerazioni circa i grafi bipartiti orientati*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972).

Summary.

We enunciate propositions which express properties of the bipartite, complete or not, graphs; of the bipartite onedirected graphs; of the complementary graph of a given graph; of the completeness of the connected graphs, obtained by the definitions of power-graph and of the diameter of a graph.

* * *

(4) $\delta(G)$ è il diametro di G, ved. [**1**], p. 62. $G^{[m]}$ è il grafo unione dei grafi potenza da 1 ad m, $\bigcup_{k=1}^{m} G^k$. Ricordiamo che, dato $G(X, \Omega)$, si ha $G^m(X, \Sigma)$, dove Σ ha elementi colleganti una coppia di X se e solo se in G quella coppia ha distanza non maggiore di m. Dunque in $G^{[m]}(X, \Psi)$, Ψ ha elementi colleganti una coppia di X se e solo se in G quella coppia ha distanza non maggiore di m.

(5) Con $\overline{G}$ abbiamo inteso indicare il grafo complementare di G.