Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972), 247-251

BRUNO D'AMORE (*)

Alcune considerazioni circa i grafi bipartiti orientati. (**)

1. - Definizione di catena.

(1) Sia $C = \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ una $(r+1)$-pla di vertici di un grafo $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ semplice non orientato, tale che esista una r-pla di spigoli di $\boldsymbol{G}$, $C' = \{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ con $\alpha_i = (x_i, x_{i+1})$, $i = 1, \dots, r$. (Si dice che α_i congiunge x_i con x_{i+1}). Chiameremo *catena* la coppia (C, C').

Se, per ogni h e k, $(h, k = 1, \dots, r)$, $\alpha_h \neq \alpha_k$ se e solo se $h \neq k$, allora (C, C') è detta *catena semplice*.

Se, per ogni h e k (che non siano rispettivamente 1 ed $r+1$), $x_h \neq x_k$ se e solo se $h \neq k$, (C, C') è detta *catena elementare*.

Si dimostra immediatamente che, se una catena è elementare, allora essa è pure semplice; mentre non vale la deduzione inversa.

2. - Definizione di ciclo e di lunghezza di un ciclo.

Se si ha che $x_1 = x_{r+1}$, la catena (C, C') prende il nome di *ciclo*. In maniera analoga alle catene semplici ed elementari si definiscono i cicli semplici ed elementari.

Dato un ciclo (C, C') si dice *lunghezza del ciclo* il numero cardinale dell'insieme C'.

(*) Indirizzo: Istituto di Geometria, Università, 40127 Bologna, Italia.

(**) Ricevuto: 16-II-1972. Lavoro eseguito per le G.N.S.A. (C.N.R.).

(1) Ammettiamo come noti i concetti di grafo, espresso come coppia (X, Ω), grafo orientato, grafo connesso e di tutti i termini elementari ad essi relativi. Dette definizioni si possono trovare in [**1**] e [**4**]. Le altre definizioni che appaiono nella presente nota, vengono date in maniera leggermente diversa dalla solita. La definizione data in **11** è nuova.

3. - Definizione di cammino, di circuito, di lunghezza di un circuito.

Consideriamo ora un grafo G orientato e sia (C, C') una catena di G_0 (2). Se l'orientazione degli spigoli di C' è tale che, per ogni coppia di vertici consecutivi di C, x_i ed x_{i+1}, l'arco ad essi associato α_i va da x_i verso x_{i+1} (o viceversa, per ogni coppia), diremo che la catena ordinata ed orientata $(C^*, C^{*\prime})$ dedotta da (C, C') assume il nome di *cammino*. (Si dice a volte che un cammino è una catena concordemente orientata).

Se la catena (C, C') era un ciclo, il cammino (C, C') è detto *circuito*. (Anche il circuito può essere pensato come un ciclo concordemente orientato.)

4. - Definizione di grafo bipartito.

Sia X l'insieme dei vertici di un grafo G e siano X_1 ed X_2 due suoi sottoinsiemi che ne costituiscano una partizione. Sia Ω l'insieme degli spigoli di G. Supponiamo che ogni elemento di Ω, se ha un estremo in X_1, abbia necessariamente l'altro in X_2 e viceversa. Chiameremo un tale grafo *bipartito non orientato*.

Dato un grafo orientato G, diremo che è bipartito se tale è G_0. Se, di più, ogni vertice iniziale è in X_1 (o in X_2) ed ogni vertice finale è in X_2 (o in X_1), G si dice *bipartito uniorientato* o *di tipo* BU (3).

D'ora innanzi indicheremo con n' ed n'' rispettivamente i cardinali degli insiemi X_1 ed X_2.

5. - Definizione di isomorfismo tra grafi.

Siano G e G' due grafi, $G(X, \Omega)$ e $G'(X', \Omega')$.

Se esistono: un'applicazione biunivoca f_1 tra X ed X' ed un'applicazione pure biunivoca f_2 tra Ω ed Ω'; e se, dall'essere $x'_j = f_1(x_i)$, $x'_k = f_1(x_h)$, $\alpha'_s = f_2(\alpha_t)$, si ha che $(x_i, x_h) = \alpha_t$ se e solo se $(x'_j, x'_k) = \alpha'_s$ $(i, j, h, k, s, t = 1, \dots, n,$ dove $n = \operatorname{card} X)$, allora si dice che G *è isomorfo a* G'.

(2) Con G_0 indichiamo il grafo associato a quello orientato G, una volta che non si tenga conto dell'orientazione degli archi di G.

(3) Si veda [4], p. 58.

6. - Definizione di grafo opposto di uno dato.

Sia $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ un grafo orientato. Consideriamo il grado $\overline{\boldsymbol{G}}(X, \Omega^{-1})$ in cui Ω^{-1} è stato ottenuto da Ω scambiandone l'orientazione di ogni elemento. $\overline{\boldsymbol{G}}$ è detto *opposto* di $\boldsymbol{G}$ [4].

7. - Teorema 1.

Se $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$, bipartito orientato, contiene circuiti, questi hanno lunghezza pari.

Infatti, se avesse un circuito di lunghezza dispari, $\boldsymbol{G}_0$ avrebbe un ciclo di lunghezza dispari il che è contrario ad un noto teorema [5].

8. - Teorema 2.

Se $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ di tipo BU *è isomorfo al proprio opposto, allora $n' = n''$.*

Infatti, combinando le definizioni contenute nei nn. **5** e **6**, si deve ammettere che ogni elemento di X_1 viene a corrispondere tramite f_1 ad un elemento di X_2 e viceversa. Ma f_1 è un'applicazione biunivoca, quindi: $n' = n''$.

9. - Definizione di grafo bipartito completo.

Sia $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ un grafo bipartito semplice e sia m il cardinale di Ω. In generale vale la relazione $n' \cdot n'' \geqslant m$ [6].

Se, per ogni coppia di elementi x_1 ed x_2 rispettivamente appartenenti ad X_1 ed X_2, esiste in Ω un elemento $\alpha = (x_1, x_2)$, $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ è detto *bipartito completo* o *di tipo* CB. In questo caso: $n' \cdot n'' = m$.

Se $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$ è contemporaneamente di tipo BU e di tipo CB, si dice che è *di tipo* BCU.

---

(4) Il problema di determinare i grafi che sono isomorfi al proprio opposto è stato recentemente studiato da L. Cavalieri D'Oro [**2**]. Invece l'autore ha studiato condizioni necessarie e sufficienti affinchè un grafo sia isomorfo al proprio opposto [**3**].

(5) Lo si può trovare enunciato, per esempio, in [**4**], p. 58.

(6) Si veda, ad esempio [**4**], p. 58.

10. - Teorema 3.

$G(X, \Omega)$ di tipo BCU *è isomorfo al proprio opposto se e solo se $n' = n''$.*

Infatti, se G di tipo BCU è isomorfo al proprio opposto, vale in particolare il Teorema 2 e si ha $n' = n''$.

Viceversa, se è dato G di tipo BCU ed in esso $n' = n''$, allora, facendo corrispondere ordinatamente ogni elemento di X_1 ad uno ed un solo elemento di X_2, si realizzano le condizioni richieste nei nn. **5** e **6** per l'isomorfismo tra G e $\overline{G}$.

11. - Definizione di grafo bicomplementare.

Sia G un grafo bipartito semplice. Si dice grafo *bicomplementare* di G un grafo $G^{\diamond}$ tale che $G \cup G^{\diamond}$ è un grafo bipartito completo (7). (È chiara l'analogia con il grafo complementare di uno dato (8)).

12. - Proprietà di $G^{\diamond}$.

È immediato constatare che $G^{\diamond}$ è un grafo a sua volta bipartito semplice.

13. - Teorema 4.

Se G è di tipo BU, *$G^{\diamond}$ è* BU *se e solo se $G \cup G^{\diamond}$ è di tipo* BCU.

Che $G^{\diamond}$ sia bipartito è già considerato nel n. **12**; che sia uniorientato è evidente non appena si consideri che $G \cup G^{\diamond}$ lo è. E viceversa.

14. - Teorema 5.

Se G di tipo BU *è isomorfo al proprio opposto, allora pure $G^{\diamond}$ è isomorfo al proprio opposto.*

Dall'essere G, di tipo BU, isomorfo al proprio opposto, segue, per il Teorema 2, che $n' = n''$. Essendo $n' = n''$, per il Teorema 3, $G \cup G^{\diamond}$ è isomorfo al proprio opposto $\overline{G \cup G^{\diamond}}$. Dunque si realizzano le condizioni dell'isomorfismo

(7) Per la definizione di unione tra grafi, si veda, ad esempio [4], p. 50.

(8) Se ne può trovare la definizione in [4], pp. 99-100. È conveniente premettere la definizione di grafo completo, [4], p. 35.

sia tra $\boldsymbol{G}$ e $\overline{\boldsymbol{G}}$, sia tra $\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}$ e $\overline{\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}}$. Ma $\boldsymbol{G} \subset \boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}$ e $\overline{\boldsymbol{G}} \subset \overline{\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}}$. Siano, per fissare le idee, $\boldsymbol{G}(X, \Omega)$, $\overline{\boldsymbol{G}}(X, \Omega^{-1})$, $\boldsymbol{G}^{\diamond}(X, \Omega^{\diamond})$, $\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}(X, \Omega \cup \Omega^{\diamond})$ e $\overline{\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}}(X, \Omega^{-1} \cup \Omega^{\diamond -1})$.

Se $f_1\colon X \to X$, $f_2\colon \Omega \cup \Omega^{\diamond} \to \Omega^{-1} \cup \Omega^{\diamond -1}$, chiameremo $F\colon \Omega^{\diamond} \to \Omega^{\diamond -1}$ tale che se $\alpha = (x_1, x_2) \in \Omega^{\diamond}$, $F(\alpha) = \beta$, dove $\beta = (x_2, x_1) \in \Omega^{\diamond -1}$.

F è un'applicazione biunivoca, dato che f_1 lo è e dato che $\Omega^{-1} \cap \Omega^{\diamond -1} = \emptyset$. È chiaro che tra $\boldsymbol{G}^{\diamond}$ e $\overline{\boldsymbol{G}^{\diamond}}$ nasce un isomorfismo, così come definito nei nn. **5** e **6**, una volta stabilito che f_1 associa ad un elemento di X (pensato come insieme dei vertici del grafo $\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}$) quello che gli corrisponde in X (pensato come insieme dei vertici del grafo $\overline{\boldsymbol{G} \cup \boldsymbol{G}^{\diamond}}$), mentre F associa analogamente elementi di $\Omega \cup \Omega^{\diamond}$ ad elementi $\Omega^{-1} \cup \Omega^{\diamond -1}$. (L'isomorfismo è basato sul fatto essenziale che $\Omega \cap \Omega^{\diamond} = \emptyset$).

Testi citati.

[1] C. BERGE, *Théorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris 1958.

[2] L. CAVALIERI D'ORO, *Sui grafi orientati finiti isomorfi con l'opposto*, Boll. Un. Mat. Ital. (6) **4** (1971), 859-869.

[3] B. D'AMORE, *Una condizione necessaria e sufficiente affinché un grafo orientato finito antisimmetrico sia isomorfo al proprio opposto*, Atti Accad. Sci. Ist. Bologna (1972), 41-44.

[4] L. MURACCHINI, *Introduzione alla Teoria dei Grafi*, Boringhieri, Torino 1967.

Summary.

We study some properties of bipartite onedirected and complete graphs. We introduce the bi-complementary graph **G** *of a given bipartite simple graph* **G** *and we study some of its properties.*

* * *