Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972) 97-111

GIOVANNI FERRERO (*)

Su certe geometrie gruppali naturali. (**)

Introduzione.

Col presente lavoro continuiamo le dimostrazioni ed i complementi relativi ai risultati annunciati in [7]. Il titolo è giustificato dal fatto che discuteremo più tardi altrove il concetto di geometria gruppale naturale (1), che ci è stato suggerito dal programma di ERLANGEN, dai lavori di KARZEL e della sua scuola (2), e da recenti ricerche sui quasi-anelli planari (3).

Occorrerà impegnare tutto il primo paragrafo per richiamare e commentare notazioni e premesse; qui dobbiamo limitarci ad indicare, sia pure in forma incompleta, alcuni dei risultati più importanti.

Siano G un gruppo, Φ un gruppo di suoi automorfismi tutti privi di coincidenze. Se l'ordine di Φ non è della forma $p^n - 1$, con p^n divisore primario dell'ordine di G, allora i laterali delle unioni delle traiettorie di Φ con il sottogruppo banale E di G formano un BIB-disegno in cui $k = \lambda$.

I disegni da noi ottenuti sono (in un senso che sarà precisato nel primo paragrafo) particolarmente ricchi di moltiplicatori. Alcuni nostri risultati possono pertanto essere interpretati come (sia pure elementari) « teoremi del moltiplicatore » (4), validi per particolari BIB-disegni non simmetrici.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. — Ricevuto: 15-III-1971.

(1) Che cercheremo del resto di suggerire con alcune osservazioni, in un certo senso marginali, anche nel presente lavoro.

(2) Cfr. per esempio [**13**] e L. A. ROSATI, *Gruppi affini d'incidenza*, Rend. Sem. Mat. Padova **35** (1965), tenendo presente il corollario 6 di [**9**].

(3) Cfr. per esempio [**1**], [**4**], [**6**].

(4) Cfr. [**5**], pag. 88; [**8**], n. 6. Il problema dei moltiplicatori per casi non simmetrici è stato posto in [**11**], pag. 125.

Le geometrie gruppali naturali da noi studiate risultano (salvo al più in un numero limitato di casi che non vale la pena di ricordare qui) essere dei BIB-disegni solo se sono spazi affini sopra un campo, o BIB-disegni in cui $k = \lambda$.

Avvertiamo una volta per tutte che ci occuperemo qui solo di strutture finite.

1. - Notazioni e premesse.

1. – Per comodità del lettore ricordiamo le più importanti considerazioni di [**8**] e [**9**], introducendo nel contempo le notazioni che useremo costantemente nel lavoro, per lo più senza richiami espliciti. Qualche ulteriore osservazione servirà a chiarire le motivazioni della presente ricerca ed a preparare il terreno ai risultati principali.

Siano G un gruppo additivo di ordine v, Φ un suo gruppo di automorfismi. Chiamiamo Φa la traiettoria di Φ rappresentata da $a \in G$ e $\Phi_0 a$ l'unione di tale traiettoria con l'insieme E costituito dal solo elemento neutro 0 di G. Indichiamo con $\Phi_0 a + b$ l'insieme degli elementi di G che possono essere scritti come somma di un elemento di $\Phi_0 a$ e dell'elemento $b \in G$. Chiamiamo *punti* gli elementi di G e *blocchi* i sottoinsiemi di G della forma $\Phi_0 a + b$, con $a \neq 0$. Punti e blocchi, con la relazione di appartenenza, formano una struttura di incidenza D [5] in cui i blocchi sono identificabili con sottoinsiemi [6].

Indichiamo con N il Cayleiano di G. È chiaro che N può essere interpretato come un gruppo di automorfismi della struttura di incidenza D [7], ed agisce in modo regolare e transitivo sui punti di D. Se definiamo tra i punti di D un'operazione di somma secondo la (1) di [**8**] e partendo dal punto 0 ritroviamo evidentemente il gruppo G. Possiamo pertanto dire, sempre con [**8**], *che i moltiplicatori di* $(D, N, 0)$ *sono gli automorfismi di* G *che possono essere interpretati come automorfismi di* D, che mandano cioè blocchi in blocchi. Agli effetti del presente lavoro tale enunciato può essere addirittura preso come una definizione di moltiplicatore della struttura $(D, N, 0)$, lasciando a [7], [**8**] il compito di motivare tale definizione e di legarla a quella classica di [**5**], [**11**].

---

(5) Cfr. ad esempio [**5**], pg. 1 per la definizione di tale termine.

(6) Nel senso che se due blocchi sono distinti esiste almeno un punto incidente ad uno solo di essi.

(7) In quanto ogni elemento di N manda punti in punti, blocchi in blocchi, e conserva le relazioni di incidenza. Per brevità non distinguiamo esplicitamente una permutazione su un insieme M dalla sua estensione a sottoinsiemi dell'insieme $P(M)$ delle parti di M.

2. – Ciò posto, possiamo subito dire che

Osservazione 1. *Il gruppo dei moltiplicatori di* $(D, N, 0)$ *contiene il normalizzante di* Φ *nell'automorfo* A *di* G (8).

Sia infatti α un elemento del normalizzante di Φ in A. Si consideri il blocco $\Phi_0 a + b$. Trasformando tale blocco con α si ha

$$\alpha(\Phi_0 a + b) = \alpha(\Phi_0 a) + \alpha(b) = \Phi_0(\alpha(a)) + \alpha(b) \ (^9) ,$$

che è ancora un blocco di D. Pertanto α (che è una biiezione di G su G) manda blocchi in blocchi; poichè questi sono qui sottoinsiemi di G, chiaramente α risulta subito essere un automorfismo di D. Poichè $\alpha \in A$ questo è sufficiente per asserire che α è un moltiplicatore di $(D, N, 0)$ (10).

Particolare interesse hanno i *moltiplicatori di Hall* di $(D, N, 0)$, che sono i moltiplicatori della forma H_n: $x \to nx$ $(x \in G)$. Se H_n è un tale moltiplicatore diciamo anche che n è un moltiplicatore numerico di $(D, N, 0)$, ed anzi (11) che n è *un moltiplicatore numerico di* (D, N). Diremo brevemente che (D, N) ammette tutti i possibili moltiplicatori numerici se tutti i numeri $n \in Z$ primi con l'ordine v di G ne risultano moltiplicatori numerici (12). In questo caso G è un gruppo abeliano (13). Viceversa se G è abeliano tutte le H_n con $(n, v) = 1$ appartengono al centro dell'automorfo A di G e, giusta l'Osservazione 1, risultano moltiplicatori di HALL di $(D, N, 0)$, e pertanto ogni $n \in Z$ primo con v risulta essere un moltiplicatore numerico di (D, N).

Rissumendo possiamo enunciare esplicitamente che

Osservazione 2. *La struttura* (D, N) *ammette tutti i possibili moltiplicatori numerici se e solo se* G *è un gruppo abeliano.*

È ora abbastanza ragionevole pensare che le strutture di incidenze D di cui ci stiamo occupando siano abbastanza ricche di automorfismi e quindi sufficientemente «regolari» per avere interessanti proprietà combinatorie.

Osservazione 3. *Si consideri un elemento* $a \in G$ (14). *Si chiamino per un momento blocchi gli insiemi del tipo* $\Phi_0 a + b$ $(b \in G)$. *I punti di* G *ed i blocchi*

(8) Già cominciamo, per brevità, ad usare senza richiami le notazioni del n. 1.

(9) Perchè α è un automorfismo di G e perchè $\alpha\Phi = \Phi\alpha$.

(10) Si ricordi il n. 1.

(11) Si ricordi il teorema 4 di [**8**], secondo cui se n è un moltiplicatore numerico di $(D, N, 0)$ lo è anche di $(D, N, 0')$, $\forall 0' \in G$.

(12) Evidentemente se n non è primo con v, allora H_n non può essere un automorfismo di G, ad esempio per il primo teorema di SYLOW.

(13) Cfr., anche per qualche complemento, la fine del n. 2 di [**8**].

(14) E si pensi $a \neq 0$ altrimenti il risultato è banale.

ora definiti, insieme con la relazione di appartenenza, formano un PBIB-*disegno* D_0 (15). *Inoltre* $(D_0, N, 0)$ *ammette come moltiplicatori tutti gli elementi di* Φ *e le* H_n *che sono automorfismi di* G *e mutano in se stessa la traiettoria* Φa.

La seconda parte si dimostra immediatamente ragionando come nella dimostrazione dell'Osservazione 1. Per la prima parte ricordiamo un importante risultato di M. HALL jr. (16):

Sia G_0 un gruppo transitivo di permutazioni su un insieme G. Sia Φ un sottogruppo intransitivo di G_0, e sia M una unione di traiettoria di Φ. Allora le immagini di M secondo gli elementi di G_0 formano un PBIB-disegno.

Osserviamo ora che il prodotto $N\Phi$ è un gruppo transitivo di permutazioni sui punti di G (visto che contiene N). Il suo sottogruppo Φ può certamente essere visto come gruppo intransitivo di permutazioni su G. D'altra parte $\Phi_0 a$ risulta essere una unione di traiettorie di Φ. Le immagini di $\Phi_0 a$ secondo gli elementi di $G_0 = N\Phi$ sono, come subito si verifica, proprio i blocchi definiti nel nostro enunciato. L'Osservazione 3 è dunque conseguenza immediata del citato risultato di HALL (17).

3. – Concludiamo il paragrafo ricordando qualche definizione e risultato di [**9**], sempre per comodità del lettore.

Un elemento $a \in G$ verrà detto *di prima categoria* (rispetto a Φ) se è $\Phi_0 a = \Phi_0(-a) + a$. L'elemento $a \in G$ è di prima categoria se e solo se $\Phi_0 a$ è un sottogruppo di G oppure $\Phi a = \{a\}$. Nel caso finito $\Phi_0 a$ risulta, se gruppo, un gruppo abeliano elementare (18).

Se $a \in G$ non è di prima categoria il blocco $\Phi_0 a + b$ può essere scritto in uno ed un sol modo come somma di un $\Phi_0 x$ e di un y $(x, y \in G)$. Se invece $a \in G$ è di prima categoria e $\Phi a \neq \{a\}$ il blocco $\Phi_0 a + b$ ammette come ulteriori scritture di tale tipo esattamente le $\Phi_0 a + \varphi(a) + b$ $(\varphi \in \Phi)$: esse risultano dunque tante quante gli elementi di Φa (19).

---

(15) Per la non breve definizione di PBIB-disegno, che non avremo occasione di utilizzare direttamente si veda la bibliografia di [**6**], oppure [**5**], che usa il termine « partial design ».

(16) Annunciato in [**10**] senza dimostrazione, e soprattutto senza dettagli sui parametri del PBIB-disegno ottenuto.

(17) Naturalmente tale risultato ha ben altra portata, permettendo ad esempio di fornire osservazioni analoghe per « blocchi » del tipo $\Phi a + b$, $(\Phi_0 a \cup \Phi_0 a') + b$ eccetera. Ciascuna di queste, come la nostra Osservazione 3, può fornire in un certo senso spunti per lo studio di altre geometrie gruppali naturali.

(18) Teorema 1 di [**9**].

(19) Lemma 2 di [**9**]. Se $\Phi(a) = \{a\}$, l'unica ulteriore scrittura di tale tipo risulta subito essere la $\Phi_0(-a) + a + b$.

2. - Fatti elementari.

4. – Vediamo di studiare le prime proprietà geometrico-combinatorie dei blocchi definiti nel paragrafo precedente.

Osservazione 4. *I blocchi hanno tutti lo stesso numero di elementi se e solo se tutte le traiettorie non banali* ([20]) *di Φ sono equipotenti.*

La cosa è del tutto ovvia, visto che se Φa è formata da n elementi, allora tutti i blocchi $\Phi_0 a + b$ hanno $n+1$ elementi. Questa osservazione può tuttavia essere subito completata col

Teorema 1. – *I blocchi formano una configurazione tattica* ([21]) *se e solo se tutte le traiettorie (non banali) di Φ sono equipotenti.*

Dopo l'Osservazione 4 è sufficiente mostrare che il numero dei blocchi per un punto non dipendente dal punto stesso. Ma questo è chiaro perchè i blocchi per il punto x sono tanti quanti quelli per il punto 0, visto che la $y \to y - x$ è un automorfismo della struttura D che stiamo studiando.

Cogliamo l'occasione per calcolare i parametri della configurazione tattica ottenuta. Supponiamo che le traiettorie non banali di Φ siano tutte costituite da n $(\neq 1)$ elementi ([22]). Dal momento che elementi equivalenti rispetto a Φ sono della stessa categoria (per l'Osservazione 4 di [**9**]) possiamo indicare con α_1 il numero delle traiettorie non banali di Φ costituite da elementi di prima categoria. Indichiamo analogamente con α_2 il numero delle traiettorie formate da elementi di G che non sono di prima categoria ([23]). Ricordando il già citato Lemma 2 di [**9**] si ha subito che i blocchi del tipo $\Phi_0 a + b$, con a di prima categoria, sono in numero di $\alpha_1 v/(n+1)$ mentre gli altri sono in numero di $\alpha_2 v$. I blocchi di D sono pertanto in numero di $b = (\alpha_1 + (n+1)\alpha_2)v/(n+1)$. Si ha anche che ogni Φa è costituita da n elementi e pertanto $v = 1 + (\alpha_1 + \alpha_2)n$. Da questo, e dalla relazione fondamentale ricordata nell'annotazione ([21]) si

([20]) Qui «non banali» significa «non ridotte al solo 0 di G» anche se altrove spesso significa «formate da più di un elemento». Naturalmente l'enunciato continua a valere se si intende «non banali» nell'altro senso, e si sono definiti i blocchi come gli insiemi $\Phi_0 a + b$ con $\Phi_0 a$ traiettoria non banale di Φ. In quella situazione si studierebbe un'altra geometria gruppale naturale.

([21]) Cfr. per esempio [**5**], pag. 10. Una configurazione tattica è struttura di incidenza costituita da b blocchi e da v punti in cui:

I) tutti i blocchi hanno lo stesso numero k di punti,

II) ogni punto appartiene ad uno stesso numero r di blocchi.

I numberi b, v, k, r si dicono paramertri della configurazione, ed avranno sempre questo significato in tutto il presente lavoro.

Notoriamente deve essere sempre $bk = vr$.

([22]) E, come sempre, che G abbia ordina v.

([23]) Ricordiamo anche (cfr. [**9**]) che, come del resto è ovvio, l'elemento 0 è sempre di prima categoria.

ricava subito che $r = \alpha_1 + (n+1)\alpha_2$ (24).

Riassumendo si ha l'enunciato:

Osservazione 5. *Le traiettorie non banali di Φ siano costituite tutte da n elementi. Allora i blocchi formano una configurazione tattica con i parametri*

$$v = 1 + (\alpha_1 + \alpha_2)n\,, \qquad b = v(\alpha_1 + (n+1)\alpha_2)/(n+1)\,,$$

$$k = n+1\,, \qquad r = \alpha_1 + (n+1)\alpha_2\,.$$

La situazione prospettata nel Teorema 1 e nell'Osservazione 5 si verifica certamente quando Φ è formato da automorfismi tutti (25) privi di coincidenze (26), e in altri casi molto particolari.

A titolo indicativo ricordiamo per esempio che se tutte le traiettorie non banali di Φ sono equipotenti senza che Φ sia formato da automorfismi tutti privi di coincidenze, allora G è un gruppo abeliano elementare (27). Se inoltre Φ è un p-gruppo deve essere $p = 2$ (28). Per notizie più precise si vedano i profondi lavori di Passman intitolati ai gruppi 3/2 transitivi (29). Tale è infatti in questo caso l'olomorfo $N\Phi$ (cfr. [**8**], osservazione 2 e teorema 3).

3. - Ricerca di disegni.

5. – Nei casi precedentemente studiati (30) i blocchi formavano BIB-disegni (31). Vediamo qui di contare i blocchi per due punti distinti, per vedere fino a che punto i risultati precedenti possono essere generalizzati.

---

(24) Un controllo più diretto può essere fatto ragionando come nel lemma 3 di [**6**].

(25) Salvo l'automorfismo identico.

(26) Salvo la coincidenza banale, costituita dall'elemento 0 di G. Precisazioni come questa e quella della precedente annotazione (25) saranno per lo più omesse, nel seguito, per brevità.

(27) Cfr. [**12**], teorema I.

(28) Cfr. [**12**], teorema II.

(29) Cfr. per esempio [**15**]. Un gruppo $\frac{3}{2}$-transitivo è un gruppo transitivo tale che le traiettorie non banali dello stabilizzante di un punto siano equipotenti.

(30) Col linguaggio dei quasi-anelli o stems: cfr. [**1**], [**4**], [**6**], [**7**] ed i lavori ivi citati.

(31) Cfr. [**6**]. Un BIB-disegno è una configurazione tattica tale che due suoi punti distinti appartengano ad uno stesso numero λ di blocchi. D'ora in poi, seguendo [**5**], li indicheremo semplicemente come disegni.

Osservazione 6. *Il numero dei blocchi contenenti i due punti distinti* $x, y \in G$ *dipende solo da* $x-y$.

Infatti il blocco $\Phi_0 a + b$ passa per 0, $x-y$ se e solo se il blocco $\Phi_0 a + (b+y)$ passa per x, y; pertanto i blocchi per x, y sono tanti quanti quelli per 0, $x-y$.

Teorema 2. *Il numero dei blocchi per i due punti distinti* $x, y \in G$ *è eguale al numero dei modi con cui* $y-x$ *può essere scritto come differenza di elementi equivalenti che non siano di prima categoria, aumentato di uno o di due a seconda che l'elemento* $y-x$ *sia o rispettivamente non sia un elemento di prima categoria.*

Come risulta della precedente Osservazione 6, è sufficiente contare i blocchi che passano contemporaneamente per 0 e per $z=x-y$; ovviamente $z \neq 0$ perchè per ipotesi $x \neq y$.

Sia pertanto

$$\{z, 0\} \subseteq \Phi_0 a + b\,. \tag{1}$$

Distinguiamo i casi

I) se $b=0$, allora $z \in \Phi a$; questo si ha se e solo se $\Phi a = \Phi z$. Pertanto in queste condizioni si ritrova soltanto il blocco $\Phi_0 a$.

II) Se $b=z$ e vale la (1) si deve ovviamente avere $z \in \Phi(-a)$ (perchè allora $0 \in \Phi_0 a + z$), e dunque $\Phi a = \Phi(-z)$. In queste condizioni si trova soltanto il blocco $\Phi_0(-z)+z$.

Risulta subito [32] che *i due blocchi* $\Phi_0 z$ e $\Phi_0(-z)+z$ *ritrovati in* I) *e* II) *coincidono se e solo se* z *è di prima categoria.*

III) La situazione è un poco più complessa nel rimanente caso in cui sia $0 \neq b \neq z$. Se in tali condizioni vale la (1) esiste un elemento $\varphi \in \Phi$ tale che $0 = \varphi(a) + b$ (perchè $b \neq 0$). Pertanto gli elementi a, $-b$ risultano equivalenti rispetto a Φ, e si può scrivere

$$\Phi_0 a + b = \Phi_0(-b) + b \text{ (}^{33}\text{)}\,. \tag{2}$$

Per imporre che $\Phi_0(-b)+b$ contenga l'elemento $z \neq b$ bisogna chiedere che esista un $\varphi' \in \Phi$ tale che $z = \varphi'(-b) + b = -\varphi'(b) + b$ [34]. Ecco che allora $y-x=-z$ risulta differenza di due elementi equivalenti a b.

---

(32) In base alla definizione di elemento di prima categoria.

(33) E si nota che un blocco siffatto contiene sempre lo 0 di G.

(34) Si ricordi che siamo nel caso in cui $b \neq 0$.

Se ora b è di prima categoria l'elemento z, differenza di due elementi del gruppo ([35]) $\Phi_0 b$ appartiene ancora a $\Phi_0 b$, anzi a Φb (perchè $z \neq 0$). Pertanto $\Phi_0 b = \Phi_0 z$. Ma, essendo b di prima categoria, si ha anche che $\Phi_0 b = \Phi_0(-b) + b$, e dunque il secondo membro della (1) coincide (per la (2)) con $\Phi_0 z$, cioè con il blocco trovato nel caso I).

Se invece è sempre $z = \varphi'(b) + b$, ma b non è di prima categoria, allora $\Phi_0(-b) + b$ risulta distinto dai blocchi indicati nei casi I) e II), come pure da tutti gli analoghi blocchi del tipo $\Phi_0(-b') + b'$, con

$$z = \varphi''(-b') + b' \; (\varphi'' \in \Phi,\; b' \in G,\; b' \neq b) \; ([36]) ,$$

e questo per il ricordato lemma 2 di [**9**]. I blocchi relativi a questo terzo caso e distinti dai blocchi dei casi I), II) sono dunque tanti quanti i modi con cui $y - x = -z$ può essere scritto come differenza $(-b') - \varphi''(-b')$ di elementi equivalenti che non siano di prima categoria. Con questo il Teorema 2 è dimostrato.

6. – Per uno studio completo del numero dei blocchi per due punti il precedente Teorema 2 ([37]), suggerisce chiaramente l'uso della teoria delle rappresentazioni o, meglio, degli anelli di SCHUR ([38]). Vogliamo qui tuttavia occuparci solo dei casi più semplici e più direttamente legati a [4], [**6**], [**7**], [**1**].

Teorema 3. *Supponiamo che Φ sia formato da automorfismi tutti privi di coincidenze. Allora i blocchi formano un disegno se e solo se tutti gli elementi non nulli di G sono della stessa categoria.*

Sia anzitutto n l'ordine del gruppo Φ. Le traiettorie non banali di Φ saranno tutte costituite da n elementi, di modo che i blocchi formeranno una configurazione tattica con $k = n + 1$ (Teorema 1).

Si ricordi ora che per ogni coppia $\langle \varphi, \varphi' \rangle$ di elementi distinti di Φ esiste uno ed un solo $x \in G$ tale che $z = \varphi(x) - \varphi'(x)$ $(\forall z \in G$, con $z \neq 0)$ ([39]). Questo significa che il generico elemento non nullo $z \in G$ ammette $n(n-1)$ scritture del tipo indicato. Queste tuttavia, n ad n, forniscono la *stessa* scrittura di z come differenza di elementi equivalenti. Infatti se $z = \varphi(x) - \varphi'(x)$ le n scritture $z = \varphi \circ \varphi''^{-1}(\varphi''(x)) - \varphi' \circ \varphi''^{-1}(\varphi''(x))$ $(\varphi'' \in \Phi)$ sono tutte le scritture di z

---

([35]) Si ricordi il già citato teorema 1 di [**9**], e si noti che $\Phi b \neq \{b\}$ altrimenti $z = 0$ il che è ora escluso.

([36]) Per cui sempre vale la (1), con $a = -b'$, $b = b'$, e che, per la stessa ragione, sono due a due distinti.

([37]) Ove si ricordi anche l'osservazione 4 di [**9**], secondo cui elementi equivalenti rispetto a Φ hanno la stessa categoria.

([38]) Cfr. per esempio [**16**].

([39]) Lemma 4 di [**6**].

(del tipo $\varphi^*(x) - \varphi^{**}(x)$ $(\varphi^*, \varphi^{**} \in \Phi)$) come differenza degli stessi elementi equivalenti.

Se ora z non è di prima categoria nessuno degli $x \in G$ di cui poco sopra può essere di prima categoria [40]. Pertanto i blocchi per 0, z risultano in numero di $(n-1)+2$, per il precedente Teorema 2.

Se invece z è di prima categoria per 0, z passa un solo blocco, perchè allora le $n-1$ scritture di z come differenza di elementi equivalenti sono quelle del tipo $z = a - (a - z)$, con $a \in \Phi z$, $a \neq z$. Infatti $\Phi_0 z$ è un gruppo abeliano di ordine $n+1$; allora (per ogni $a \in \Phi z$ diverso da z e da 0) $a - z (= -z + a)$ è un elemento equivalente ad a ed a z, e dunque le scritture indicate, in numero di $n-1$ sono tutte le scritture di z come differenza di elementi equivalenti [41].

Di qui si ha subito che *se i blocchi formano un disegno tutti gli elementi non nulli di G sono della stessa categoria.*

Se viceversa tutti gli elementi di G sono di prima categoria, allora per due punti passa esattamente un blocco [42], e così i blocchi formano un disegno con $\lambda = 1$; cosicchè anche per $n = 1$ l'enunciato è (banalmente) verificato.

Se invece nessun elemento non nullo è di prima categoria i blocchi per due punti sono sempre in numero di $(n-1)+2 = n+1$, come risulta dalle considerazioni precedenti, e anche in questo caso siamo in presenza di un disegno.

Corollario 1. *Se Φ è formato da automorfismi tutti privi di coincidenze ed i blocchi formano un disegno D, in esso è $\lambda = k$ oppure $\lambda = 1$, secondo che gli elementi non nulli di G siano o rispettivamente non siano di prima categoria.*

In ogni caso $(D, N, 0)$ ammette come moltiplicatori tutti gli elementi del normalizzante di Φ nell'automorfo A di G.

Per vederlo basta notare che, dalla dimostrazione del Teorema 1, risulta che nel caso in cui si ha un disegno con $\lambda \neq 1$ è $\lambda = n+1 = k$. La seconda parte dell'enunciato è un semplice richiamo dell'Osservazione 1.

4. - Primi sviluppi.

7. – Analizziamo ora i casi prospettati dal Teorema 3 e dal relativo Corollario 1, per individuare meglio le geometrie ottenute. Il caso in cui $\lambda = 1$ è

---

(40) Perchè la differenza di elementi equivalenti di prima categoria è ancora un elemento di prima categoria. Cfr. per esempio [**9**], teorema 2 ed osservazione 1.

(41) Di qui, a completamento delle considerazioni di [**9**], possiamo anche enunciare:

Sia Φ un gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze. Se un elemento non nullo di G è di prima categoria ed è scritto come differenza di due elementi equivalenti, anche tali elementi sono di prima categoria; sono anzi equivalenti a z.

(42) Come si ricava per esempio da [**9**], commento al corollario 5.

sostanzialmente noto, ma desideriamo egualmente discuterlo anche per chiarire (sia pure implicitamente) la ragione per cui abbiamo chiamato geometrie gruppali naturali le strutture che stiamo studiando ([43]).

Teorema 4. *Sia Φ un gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze, e tutti gli elementi di G siano di prima categoria rispetto a Φ. Allora i blocchi possono essere interpretati come rette di uno spazio affine su un campo. Inoltre la struttura (D, N) ammette tutti i possibili moltiplicatori numerici.*

Si osservi intanto che se Φ ha ordine pari contiene un elemento di ordine 2, e allora G è abeliano ([44]).

Se d'altra parte Φ ha ordine dispari tutti gli elementi non nulli di G, essendo per ipotesi di prima categoria, hanno caratteristica 2 ([45]). Anche allora dunque il gruppo G è abeliano. Si ha ora subito che (D, N) ammette tutti i possibili moltiplicatori numerici, come conseguenza immediata dell'Osservazione 2.

Si ricordi ora che in queste condizioni i $\Phi_0 a$ non banali formano una partizione π di G ([46]). Se esiste un $a \in G$ tale che $G = \Phi_0 a$, allora l'ordine di G è potenza di un numero primo, esiste un solo blocco, e la struttura di incidenza ottenuta può essere interpretata, se si vuole, come una retta affine su un campo avente l'ordine di G ([47]).

Altrimenti tale partizione π contiene almeno due componenti distinte $\Phi_0 a$ e $\Phi_0 b$. La loro somma (somma di sottogruppi di G) è ovviamente tenuta ferma da tutti gli elementi di Φ, ed è dunque unione (insiemistica) di componenti $\Phi_0 x$ della partizione π. Tale somma è pertanto un sottogruppo π-ammissibile di G ([48]). Ne segue che tale partizione è geometrica ([49]). Come tale, sempre secondo [**2**], può essere piana o spaziale. Nel primo caso, quando cioè G è somma di due qualunque componenti di π, il disegno ottenuto è un piano affine

---

([43]) Si vedano anche gli esempi di [**4**], n. 2 e [**6**], n. 5.

([44]) Cfr. per esempio B. HUPPERT, *Endliche Gruppen* I, Springer, 1967, pag. 506.

([45]) Cfr. [**9**], osservazione 4. Naturalmente se Φ è identico il Teorema è banalmente verificato.

([46]) Cfr. [**9**], corollario 5. A tale lavoro rimandiamo anche per la definizione di partizione nel senso di BAER.

([47]) Si potrebbe in effetti dire di più, ma ora non ci interessa, tanto più che non sarebbero cose nuove. Cfr. B. SEGRE, *Lectures on modern geometry*, Cremonese 1971, A 7 e [**13**], pag. 73.

([48]) Cfr. per esempio [**2**]. E immediato osservare che un sottogruppo di G è π-ammissibile secondo la definizione ivi formulata se e solo se è unione di componenti di π.

([49]) Per il lemma 2,1 di [**2**]. La partizione π è detta geometrica se e solo se non è banale e la somma di due sue qualunque componenti è π-ammissibile.

su un corpo [50] (anzi, su un campo, visto che siamo nel caso finito). Nel rimanente caso i $\Phi_0 a$ non banali sono i sottospazi ad una dimensione di uno spazio vettoriale sopra un campo finito (cfr. [**2**], Satz 2, 3). Anche allora i blocchi possono essere interpretati come rette di un ordinario spazio affine su tale campo. L'enunciato è pertanto dimostrato.

Si noti che il nostro enunciato può essere interpretato, a meno del linguaggio, come una generalizzazione del teorema 7 di [**1**], tosto che si abbia presente il corollario 2 di [**6**] e la sua dimostrazione.

Notiamo anche esplicitamente che nel caso prospettato dal Teorema 4 si ha uno spazio con parallelismo [51] nel senso che se diciamo paralleli due laterali di uno stesso $\Phi_0 a$ otteniamo una relazione di equivalenza tra blocchi tale che ogni punto appartiene ad uno ed un sol blocco parallelo ad un blocco dato [52].

8. – In un certo senso più interessante si presenta l'altro caso, caratterizzato dal

Teorema 5. *Sia Φ un gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze, e G non contenga elementi non nulli di prima categoria. Allora i blocchi formano un disegno D in cui $k = \lambda$. La struttura $(D, N, 0)$ ammette come moltiplicatori tutti gli elementi del normalizzante di Φ nell'automorfo A di G. Se inoltre G è abeliano la struttura (D, N) ammette tutti i possibili moltiplicatori numerici.*

È conseguenza immediata del Teorema 3, del Corollario 1 e delle Osservazioni 1, 2. Si noti che l'abbondanza di moltiplicatori per i disegni qui prospettati si presenta più raramente nei disegni costruiti a partire da sistemi di differenze [53], come si può vedere leggendo ad esempio [**14**]. Sulla possibilità di parlare di parallelismo nel caso ora prospettato si veda l'osservazione finale di [**6**].

---

(50) Cfr. V. P. Zarovnyi, *Interpretation of the plane axioms of affine geometry in an abstract group*, Ukrain. Math. Z. **10** (1958), 351-364, ripreso in [**1**]. I teoremi I, II, III, IV di tale lavoro possono essere riformulati dicendo che, se tutte le componenti di una partizione piana sono sottogruppi normali, allora i laterali di tali componenti sono rette di un piano « affine » (nel senso di Artin). Come in [**1**] (teorema 5, comma 5) si vede che allora siamo in presenza di un piano affine su un corpo, e non di un generico piano di traslazione.

(51) Cfr. [**17**], pag. 131.

(52) Questo viene qui richiamato, ovviamente, solo perchè può servire di spunto per ulteriori ricerche.

(53) Cfr. [**5**], pag. 87.

9. – Lo studio dei casi prospettati nel Teorema 5 non può ovviamente essere esaurito nel presente lavoro. Ci limitiamo per ora a trarne enunciati atti a preparare i lavori che faremo seguire al presente.

Teorema 6. *Sia Φ un gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze del gruppo additivo G. Supponiamo che l'ordine di Φ non sia della forma $n = p^\alpha - 1$, con p numero primo e p^α divisore dell'ordine v di G. Allora i blocchi formano un disegno D in cui $k = \lambda = n + 1$* (54).

Ricordando il Teorema 5 è chiaro che ci basta mostrare che G non possiede elementi non nulli di prima categoria rispetto a Φ. Se infatti l'elemento non nullo $a \in G$ fosse di prima categoria $\Phi_0 a$ sarebbe un gruppo abeliano elementare (55). Come tale avrebbe ordine p^α, con p numero primo e p^α divisore dell'ordine v di G. Tale ordine dovrebbe d'altra parte essere eguale all'ordine di Φ aumentato di 1. Questo è escluso dalle ipotesi fatte.

Le osservazioni aritmetiche di [**9**] indicano tra l'altro che se Φ è un 2-gruppo e l'ordine di G non è divisibile per alcun numero primo di FERMAT (56) tali ipotesi sono sempre soddisfatte (57).

Teorema 7. *Sia G un gruppo additivo di ordine pari v, e sia Φ un suo gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze. L'ordine di Φ sia eguale ad n. Se i blocchi non formano un disegno con $k = \lambda$, allora $n + 1$ è una potenza di 2 che divide l'ordine v di G.*

È chiaro che in queste condizioni Φ ha ordine dispari. Pertanto gli elementi (non nulli) di G che sono di prima categoria rispetto a Φ hanno caratteristica 2 (58). Se ora i blocchi non formano un disegno con $k = \lambda$ vuol dire (59) che G possiede almeno un elemento a non nullo e di prima categoria. Allora $\Phi_0 a$ è un 2-gruppo elementare di ordine $n+1$ (per quanto sopra osservato e per il teorema 1 di [**9**]), ed $n+1$ è una potenza di 2 che divide l'ordine v di G.

10. – Per concludere confermiamo un'idea di CLAY (60) con il

Teorema 8. *Siano G un gruppo additivo di ordine v, Φ un suo gruppo di automorfismi tutti privi di coincidenze, diciamo di ordine n. Supponiamo*

(54) E, naturalmente, si hanno moltiplicatori come nella seconda parte del Teorema 5, ma questo al momento non ci interessa.

(55) Per il teorema 1 di [**9**], spesso ricordato. A partire da qui se Φ è identico l'enunciato cade.

(56) Della forma cioè $p = 2^n + 1$.

(57) Suggeriscono anche di studiare in modo più approfondito il caso in cui l'ordine di Φ è eguale ad 8, e l'ordine v di G è multiplo di 9.

(58) Per l'osservazione 4 di [**9**].

(59) Per il Teorema 5.

(60) Suggerita dall'ultimo esempio di [**1**].

che le traiettorie non banali di Φ siano in numero di n. Allora i blocchi $\Phi_0 a + b$ $(a \neq 0)$formano un piano di Möbius (61). (*)

Osserviamo intanto che, dicendo che Φ è un gruppo di automorfismi privi di coincidenze escludiamo implicitamente che sia ridotto alla sola identità, e quindi $2 \leqslant n$. Se inoltre le traiettorie non banali di Φ sono in numero di n l'ordine v di G non può essere che $v = n^2 + 1$.

Se ora fosse $n = p^\alpha - 1$ si avrebbe $v = n^2 + 1 = p^\alpha(p^\alpha - 2) + 2$, pertanto p^α può dividere v solo se divide 2, cosa esclusa dal fatto che $2 \leqslant p^\alpha - 1$. Pertanto i blocchi formano un disegno con $k = \lambda = n + 1$, per il Teorema 6. Ricordando ora l'Osservazione 5, e notando che ora $\alpha_1 = 0$ si ha che i blocchi del disegno sono in numero di $b = n(n^2 + 1)$. Poichè i blocchi sono identificabili con sottoinsiemi le incidenze di tale disegno risultano in numero di $bk = n(n + 1)(n^2 + 1)$. Ora è stato dimostrato in [**3**] che una struttura di incidenza in cui $v = n^2 + 1$, $b = n(n^2 + 1)$, e dotata di $n(n + 1)(n^2 + 1)$ incidenze, tale che inoltre due punti distinti appartengono al più ad $n+1$ blocchi è un piano di Möbius. Da questo segue immediatamente il nostro enunciato.

---

(61) Tali piani sono detti «inversive planes» in [**5**]. Cfr. [**3**]: Un piano di Möbius è una struttura di incidenza in cui:

I) Tre punti distinti sono incidenti ad uno ed un solo blocco,

II) presi comunque due punti distinti x, y ed un blocco B incidente ad x ma non ad y esiste uno ed un sol blocco per x, y che incontra B soltanto in x,

III) esistono quattro punti non appartenenti allo stesso blocco. Ogni blocco contiene almeno un punto.

(*) [Aggiunto sul manoscritto il 26/6/1973]. Ci è stato segnalato da A. Barlotti, J. C. Clay e G. Betsch che il nostro Teorema 8 offre eccezioni (come ad esempio quando $n = 6$, $v = 37$), in dipendenza dal fatto che il risultato di [**3**] che abbiamo utilizzato non è del tutto esatto. Cfr. *Errata corrige*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **7** (1973), 510.

Cadono di conseguenza in difetto gli ultimi commi del teorema 4 e del corollario 10 del già stampato lavoro: G. Ferrero, *Su una classe di nuovi disegni*, Rend. Istit. Lombardo Sci. Lett. A **106** (1972), 419-430.

Cogliamo anche l'occasione per segnalare che abbiamo dovuto modificare la numerazione degli enunciati in [**6**], [**8**], [**9**] e nel presente lavoro quando già tali lavori erano stati presentati per la stampa e circolavano come manoscritti, di modo che essi appaiono qua e là citati in modo inesatto senza colpa degli Autori. Anche l'indicazione del volume di pubblicazione è spesso errata, per ragioni indipendenti dalla nostra volontà.

Bibliografia.

[1] M. Anshel, J. R. Clay, *Planar algebraic systems: some geometric interpretations*, J. Algebra **10** (1968), 166-173.

[2] R. Baer, *Partitionen abelscher Gruppen*, Arch. Math. **14** (1963), 73-83.

[3] P. Biscarini, *Una caratterizzazione dei piani finiti di Möbius*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **3** (1970), 993-997.

[4] J. R. Clay, *Some algebric and geometric aspects of planarity*, Atti Conv. Geo. Comb. Appl. Perugia 1970, 163-172.

[5] P. Dembowski, *Finite Geometries*, Springer-Verlag, Berlin 1968.

[6] G. Ferrero, *Stems planari e* BIB-*disegni*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 79-96.

[7] G. Ferrero, *Sui moltiplicatori (nel senso di Hall) e sui disegni ricchi di moltiplicatori*, Atti Conv. Geo. Comb. Appl. Perugia 1970, 233-237.

[8] G. Ferrero, *Sul concetto di moltiplicatore nel senso di Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 83-95.

[9] G. Ferrero, *Osservazioni sugli elementi di prima categoria di un gruppo*, Riv. Mat. Univ. Parma (3) **1** (1972).

[10] M. Hall jr., R. Lane, D. Wates, *Designs derived from permutation groups*, J. Combinatorial Theory **8** (1970), 12-22.

[11] M. Hall jr., *Group theory and block designs*, Proc. Int. Cong. on the Theory of groups, Gordon and Breach, New York 1967.

[12] I. M. Isaacs - D. S. Passman, *Half-transitive automorphisms groups*, Canad. J. Math. **18** (1966), 1243-1250.

[13] H. Karzel, I. Pieper, *Bericht über geschlichte Inzidenzgruppen*, Iber. Deutsch. Math. Verein. **72** (1970), 70-114.

[14] H. B. Mann, *Balanced incomplete Block designs and Abelian difference sets*, Illinois J. Math. **8** (1964), 252-261.

[15] D. S. Passman, *Exceptional $\frac{3}{2}$-transitive permutation groups*, Pacific J. Math. **29** (1969), 669-713.

[16] O. Tamaschke, *An extension of group theory*, Symposia Mathematica **1** (1969), 5-13.

[17] G. Zappa, *Sugli spazi generali quasi di translazione*, Le Matematiche (Catania) **19** (1964), 127-143.

Summary.

We begin the study of a special category C of (finite) natural group geometries. A geometry which belongs to C is a design if and only if

a) *it is an affine space over a field,*

b) *it is a design for which $k = \lambda$.*

Further we find an algebraic characterisation for the cases above.

* * *