Riv. Mat. Univ. Parma (3) 1 (1972). 1-14

GIOVANNI FERRERO (*)

Osservazioni sugli elementi di prima categoria di un gruppo. (**)

Introduzione.

Allo scopo di studiare certe particolari strutture di incidenza dotate di moltiplicatori (1) — che in prossimi lavori chiameremo *geometrie gruppali naturali* (2) — abbiamo introdotto (in [4]) il concetto di elemento di prima categoria. Siano dati un gruppo additivo G ed un suo gruppo di automorfismi Φ. Chiamiamo *elemento di prima categoria* (di G rispetto a Φ) ogni elemento $a \in G$ tale che

$$\Phi_0 a = \Phi_0(-a) + a \ (^3) .$$

Raccogliamo qui qualche considerazione in proposito, in vista del fatto che alcuni risultati che serviranno in seguito — per quanto molto elementari — non sembrano comparire, almeno esplicitamente, nella letteratura a nostra disposizione. Nei successivi lavori, di carattere più geometrico, si troveranno esempi delle situazioni qui prospettate.

I risultati più importanti sono i seguenti:

L'elemento non nullo $a \in G$ è di prima categoria (rispetto a Φ) se e solo se $\Phi_0 a$ è un gruppo e $\Phi a \neq \{a\}$ (*). Se inoltre $\Phi_0 a$ è finito, questo è un gruppo abeliano elementare.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. — Ricevuto: 1-II-1971.
(1) In un senso che generalizza quello di HALL (cfr. [4], [5]).
(2) Tali sono ad esempio le geometrie individuate in [1], [2], [3], [4].
(3) Per queste notazioni si veda l'inizio del primo Capitolo.
(*) Ringraziamo G. BETSCH e J. C. CLAY che il 6/3/'73 hanno segnalato l'importanza dell'ultima precisazione permettendo il ritocco di alcuni enunciati. [Aggiunto sul manoscritto il 24/6/'73].

Chiamiamo automorfismo di HALL un automorfismo della forma H_n: $x \to nx$.

Se Φ è formato da automorfismi di HALL la categoria di un elemento di G dipende solo dalla sua caratteristica. Se inoltre G possiede un elemento di prima categoria avente caratteristica infinita, allora Φ contiene tutte le H_n $(n \neq 0)$, e G è un gruppo abeliano privo di torsione tutti i cui elementi sono di prima categoria.

Se Φ è formato da automorfismi di HALL, G è un p-gruppo e G possiede elementi di prima categoria non nulli, allora gli elementi di prima categoria di G sono quelli appartenenti al suo sottogruppo elementare massimale.

1. - Definizione e motivazione.

1. – Siano G un gruppo additivo e Φ un suo gruppo di automorfismi. Indichiamo con Φa $(a \in G)$ la traiettoria di Φ che contiene a (4). Diciamo equivalenti (rispetto a Φ) (5) due elementi $a, b \in G$ tali che $\Phi a = \Phi b$ (6). Indichiamo con $\Phi_0 a$ l'unione di Φa con l'insieme E costituito dal solo elemento neutro 0 di G. Se X è un sottoinsieme di G indichiamo con $X + g$ $(g \in G)$ l'insieme degli elementi che si possono scrivere come somma di un elemento di X e dell'elemento $g \in G$.

Ciò posto possiamo dare la

Definizione. *L'elemento $a \in G$ sarà detto di prima categoria (rispetto al gruppo Φ) se vale l'eguaglianza* (7)

$$\Phi_0 a = \Phi_0(-a) + a \,. \tag{1}$$

È chiaro che, qualunque sia Φ, l'elemento $0 \in G$ è di prima categoria.

2. – La precedente definizione è motivata dai successivi Lemmi 1 e 2, che sono miglioramenti (sia pure soltanto formali) del lemma 2 di [**3**] (8). Questi

(4) Cioè l'insieme degli elementi di G che si possono scrivere nella forma $g = \varphi(a)$, con $\varphi \in \Phi$.

(5) Tale richiamo al gruppo Φ sarà spesso sottointeso.

(6) È ben noto che la relazione ora indicata è effettivamente di equivalenza e che due elementi sono equivalenti rispetto a Φ se e solo se ciascuno di essi appartiene alla traiettoria che contiene l'altro.

(7) Tra gli insiemi.

(8) Anche le relative dimostrazioni si trovano sostanzialmente in [**3**]. Le ripetiamo qui brevemente col linguaggio attuale anche per mettere in evidenza che le ipotesi ivi poste non risultano più, nel presente contesto, tutte essenziali.

permetteranno, in successivi lavori, di migliorare contemporaneamente i risultati geometrici di [2] e [3] (nonchè, ovviamente, di [1], che ha suggerito l'idea che sta alla base del presente filone di ricerche).

Lemma 1. *La seguente eguaglianza*

$$\Phi_0 a + b = \Phi_0 a' + b' \tag{2}$$

vale se e solo se si verifica una delle circostanze:

I) *valgono le*

$$\Phi_0 a = \Phi_0 a', \qquad b = b'; \tag{3}$$

II) *gli elementi a, a' sono di prima categoria ed inoltre valgono le*

$$\Phi a' = \Phi(-a)\,, \qquad b' \in \Phi a + b \text{ (9)}\,. \tag{4}$$

Valga infatti la (2) con $b \neq b'$. Allora $\Phi_0 a = \Phi_0 a' + (b' - b)$. Pertanto $\exists \varphi \in \Phi$ tale che $\varphi(a') + (b' - b) = 0$, cioè che $b - b' = \varphi(a')$. Analogamente $\exists \varphi' \in \Phi$ tale che $b' - b = \varphi'(a)$. Allora $b - b' \in \Phi a' \cap \Phi(-a)$, e dunque $\Phi a' = \Phi(-a)$. Quindi $\Phi_0 a + b = \Phi_0(-a) + b'$. Pertanto $\exists \varphi'' \in \Phi$ tale che $b' = \varphi''(a) + b$ (10), e allora

$$\Phi_0 a + b = \Phi_0(-a) + \varphi''(a) + b\,.$$

Pertanto $\Phi_0 a = \Phi_0(-a) + \varphi''(a)$. Operando con φ''^{-1} sui due membri dell'ultima eguaglianza ottenuta si ottiene che $\Phi_0 a = \Phi_0(-a) + a$ che, coincidendo con la (1), esprime il fatto che a è di prima categoria.

Nel corso delle considerazioni precedenti è già stato visto che vale la prima delle (4). Il fatto che $b' = \varphi''(a) + b$ dice che vale anche la seconda delle (4).

Si ha così dunque che se vale la (2) e non valgono la I, allora valgono le II. Che se poi valgono o le I o le II valga anche la (2) è subito visto con un calcolo diretto, ed il Lemma è dimostrato.

Vedremo successivamente (Corollario 3) che, salvo in un caso degenere, se a è di prima categoria è $\Phi a = \Phi(-a)$; pertanto la prima delle (4) risulterà equivalente alla $\Phi a' = \Phi a$, e dunque alla prima delle (3).

---

(9) Le due circostanze (I, II) prospettate, ovviamente, si escludono a vicenda.

(10) Perchè $b' \in \Phi_0 a + b$ e $b \neq b'$.

Nei successivi lavori citeremo il presente Lemma 1 tenendo conto di questo fatto, ma senza ulteriori richiami.

Lemma 2. *Se l'elemento a non è di prima categoria l'insieme $\Phi_0 a + b$ può essere scritto in uno ed un sol modo come somma di un $\Phi_0 x$ e di un y $(x, y \in G)$. Se l'elemento a è di prima categoria* e $\Phi a \neq \{a\}$ *l'insieme $\Phi_0 a + b$ ammette invece come ulteriori rappresentazioni di tale tipo esattamente le $\Phi_0 a + \varphi(a) + b$ $(\varphi \in \Phi)$; esse risultano tante quanti sono gli elementi di Φa.*

La prima parte è conseguenza immediata del Lemma 1.

Quanto alla seconda parte si osservi che dal Lemma 1 (e precisamente dalle (4)) si ha che le ulteriori scritture di $\Phi_0 a + b$ (con a di prima categoria) devono essere della forma $\Phi_0(-a) + \varphi''(a) + b$. Il Corollario 3, autorizzandoci a identificare $\Phi_0 a$ con $\Phi_0(-a)$, ci permette ([11]) di enunciare il Lemma.

2. - Osservazioni preliminari.

3. – Introdotta e giustificata la definizione di elemento di prima categoria, cerchiamo di individuare gli elementi a di prima categoria di un gruppo G (rispetto ad un suo gruppo di automorfismi Φ) ([12]).

Lemma 3. *Se $\Phi_0 a$ è un gruppo, allora a è di prima categoria.*

Se infatti $\Phi_0 a$ è un gruppo, esso coincide con $\Phi_0(-a)$ (perchè contiene $-a$, ed è unione di due classi di elementi equivalenti rispetto a Φ) ed anche con $\Phi_0(-a) + a$ (perchè contiene a). Pertanto vale la (1), ed a è di prima categoria.

Osservazione 1. *Se l'elemento $a \in G$ è di prima categoria lo sono anche tutti gli elementi equivalenti ad a, nonchè tutti gli elementi equivalenti all'opposto $-a$ di a.*

Sia $\alpha \in G$ un elemento equivalente ad a. Esiste allora un $\varphi \in \Phi$ tale che $\alpha = \varphi(a)$. Operando con detto φ sui due membri della (1) ([13]) si ha che

$$\varphi(\Phi_0 a) = \varphi(\Phi_0(-a) + a) \,. \tag{5}$$

([11]) Visto che utilizzeremo il Lemma solo in lavori successivi, e che pertanto la dimostrazione del successivo Corollario 3 non dipende da esso.

([12]) Queste notazioni, valide in quasi tutto il lavoro, saranno spesso sottointese negli enunciati meno importanti.

([13]) Valida perchè per ipotesi a è di prima categoria.

Ora, ricordando che φ è un automorfismo appartenente al gruppo di automorfismi Φ si ha anche che

$$\varphi(\Phi_0 a) = \Phi_0 \alpha\,, \qquad \varphi(\Phi_0(-a) + a) = \varphi(\Phi_0(-a)) + \varphi(a) = \Phi_0(-a) + \alpha\,.$$

Da queste e dalla (5), ricordando che è $\Phi a = \Phi\alpha$ (per le posizioni fatte) e dunque $\Phi_0 a = \Phi_0\alpha$, $\Phi_0(-a) = \Phi_0(-\alpha)$ (14) si ha che

$$\Phi_0\alpha = \Phi_0(-\alpha) + \alpha\,,$$

che esprime appunto il fatto che α è di prima categoria.

Basta d'altra parte osservare che la (1) può anche essere scritta come

$$\Phi_0(-a) = \Phi_0 a - a\,.$$

per vedere che $-a$ (e dunque, per quanto sopra visto, tutti gli elementi equivalenti all'elemento $-a$) è di prima categoria.

Di qui si ha ovviamente il

Corollario 1. *L'insieme degli elementi di prima categoria di G è unione di traiettorie di Φ.*

Tale insieme è inoltre mutato in se stesso dalla corrispondenza che manda ogni elemento di G nel suo opposto.

Lemma 4. *Se $a \in G$ è di prima categoria la differenza $\alpha' - \alpha$ di due qualunque elementi di Φa è un elemento di $\Phi_0(-a)$* (15).

Se $\alpha, \alpha' \in \Phi a$ esiste certamente un $\varphi \in \Phi$ tale che $\alpha' = \varphi(\alpha)$, si osserva allora che

$$\alpha' - \alpha = \varphi(\alpha) - \alpha \in \Phi\alpha - \alpha \subseteq \Phi_0\alpha - \alpha\,.$$

Ricordando che anche α è di prima categoria (in quanto equivalente ad a) (16) si ha inoltre che $\Phi_0(\alpha) - \alpha = \Phi_0(-\alpha) = \Phi_0(-a)$. Se ne deduce che $\alpha' - \alpha \in \Phi_0(-a)$, come volevamo dimostrare.

---

(14) Infatti opposti di elementi equivalenti sono equivalenti.

(15) Si badi che, poichè in generale G non è abeliano, l'elemento $-\alpha' + \alpha$ non è — per quanto ora ne sappiamo — differenza di due elementi di Φa.

(16) Si ricordi l'Osservazione 1.

Lemma 5. *Se $\Phi_0 a = \Phi_0(-a)$ ed a è di prima categoria, allora $\Phi_0 a$ è un gruppo.*

Basta mostrare che in questo caso la differenza di due elementi α, α' di $\Phi_0 a$ è ancora un elemento di $\Phi_0 a$. Ora se nessuno di tali elementi è nullo la differenza $\alpha' - \alpha$ appartiene a $\Phi_0(-a)$, per il Lemma 4; essa, nelle nostre ipotesi, appartiene pertanto anche a $\Phi_0 a$. Ma questo è vero anche negli alri casi, come si vede immediatamente, ed il Lemma è dimostrato.

Corollario 2. *Se ogni elemento di G è equivalente (rispetto a Φ) al suo opposto ma nessun $\Phi_0 a$ è un gruppo, allora G non contiene elementi di prima categoria.*

È conseguenza immediata del Lemma 5. Le enunciamo qui perchè proprio in queste condizioni abbiamo voluto metterci in [**3**] nel dare la definizione di stem fondamentale, con lo scopo di costruire BIB-disegni [17].

3. - Risultati principali.

4. – Assorbendo buona parte delle considerazioni precedenti possiamo ora enunciare il

Teorema 1. *Siano G un gruppo additivo, Φ un suo gruppo di automorfismi. L'elemento $a \in G$ non nullo è di prima categoria rispetto a Φ se e solo se $\Phi_0 a$ è un gruppo o $\Phi a = \{a\}$. Se $\Phi_0 a$ è un gruppo finito, esso risulta essere un gruppo abeliano elementare.*

Sia $a \in G$ un elemento di prima categoria. La differenza di due elementi distinti di Φa è un elemento di $\Phi(-a)$, come risulta subito dal Lemma 4. Questo significa che per ogni coppia di eventuali elementi distinti $\varphi(a)$, $\varphi'(a) \in \Phi a$ esiste un $\varphi'' \in \Phi$ tale che $\varphi(a) - \varphi'(a) = \varphi''(-a) = -\varphi''(a)$. Ora $\varphi''(a)$ non solo appartiene a Φa, ma, come differenza di elementi distinti di Φa, appartiene anche $\Phi(-a)$ (ancora per il Lemma 4). Poichè le traiettorie di Φ formano una partizione (in senso insiemistico) di G se ne deduce che $\Phi a = \Phi(-a)$ e dunque $\Phi_0 a = \Phi_0(-a)$. Si ha ora che $\Phi_0 a$ è un gruppo, per il Lemma 5.

Osserviamo ora che la restrizione di Φ al gruppo additivo $\Phi_0 a$ è un gruppo di automorfismi di $\Phi_0 a$, transitivo sugli elementi non nulli. Se ne deduce intanto che $\Phi_0 a$ non ammette sottogruppi caratteristici ed è dunque, nel caso finito, prodotto diretto di gruppi semplici isomorfi [18]. D'altra parte, sempre per la transitività sopra indicata, tutti gli elementi di $\Phi_0 a$ hanno la stessa

(17) Cfr. [**3**], teorema 6.

(18) Cfr. Burnside, *Theory of groups of finite order*, Cambridge U.P. (1867), p. 232.

caratteristica. Basta ricordare per questo ad esempio che i gruppi semplici non abeliani hanno ordine pari senza essere 2-gruppi per dedurne che $\Phi_0 a$ è abeliano elementare [19]. Per completare la dimostrazione del presente teorema basta ora ricordare il Lemma 3 ed osservare che se $\Phi\, a = \{a\}$ certamente a è di prima categoria.

Corollario 3. *Se a è di prima categoria risulta $\Phi_0 a = \Phi_0(-a)$, salvo che $\Phi a = \{a\}$, $a + a \neq 0$.*

Risulta dalla dimostrazione della prima parte del Teorema 1, e giustifica l'osservazione che precede il Lemma 2.

Corollario 4. *Sia K un sottogruppo di G formato da elementi di prima categoria e tenuto fermo da tutti gli elementi di Φ. Allora i $\Phi_0 a$ $(a \in K)$ non banali* [20] *costituiscono una partizione* (nel senso di Baer) *di K* [21], *tosto che Φ non stabilizzi elementi aventi caratteristica prima dispari.*

Corollario 5. *Se tutti gli elementi di G sono di prima categoria i $\Phi_0 a$ non banali formano una partizione di G, tosto che Φ non stabilizzi elementi di caratteristica prima dispari.*

È un caso particolare del precedente corollario.

In queste condizioni ci si ritrova in [**1**] e [**2**], (teoremi 5, 7). Allora tra l'altro i laterali dei gruppi $\Phi_0 a$ (pensati come rette di una struttura di incidenza in cui gli elementi di G siano punti) formano uno spazio generale [22], come è ben noto [23].

Ancora per indicare collegamenti tra le nostre considerazioni e classiche questioni di geometria combinatoria aggiungiamo il

Corollario 6. *Se G contiene un elemento a tale che $\Phi_0 a = G$ allora tutti gli elementi di G sono di prima categoria e G, se finito, è abeliano elementare.*

Anche questo è conseguenza immediata del Teorema 1; infatti allora $\Phi_0 a$ è un gruppo, ed a dunque è di prima categoria. Gli altri elementi non nulli

---

(19) Risulta infatti prodotto diretto di gruppi semplici abeliani isomorfi, quindi di gruppi ciclici aventi lo stesso ordine primo.

(20) Non ridotti cioè al solo 0 di G.

(21) Cfr. per esempio [**8**]. Una partizione di un gruppo K è un sistema di suoi sottogruppi tale che ogni elemento non nullo di K appartenga ad uno ed uno solo dei sottogruppi del sistema.

(22) Nel senso che una coppia di elementi di G appartiene ad uno ed uno solo di tali laterali.

(23) Cfr. ad esempio [**8**], cui rimandiamo per l'inquadramento di questo genere di questioni e per risultati più precisi.

di G equivalenti ad a, sono ancora di prima categoria (Osservazione 1). Già abbiamo osservato che lo zero di G è sempre di prima categoria. Che poi, nel caso finito, G risulti abeliano elementare, risulta dalla seconda parte del Teorema 1.

Indichiamo con G_0 il Cayleiano (destro) di G. Consideriamo il gruppo di permutazioni $S = G_0 \Phi$ prodotto di G_0 e di Φ (24). Se ora esiste un a tale che $\Phi_0 a = G$ tale prodotto $S = G_0 \Phi$ può essere visto come estensione transitivo (25) della restrizione di Φ a $G - E$. Infatti $G_0 \Phi$ è transitivo (contenendo G_0), ed in esso Φ è lo stabilizzante di 0 perchè se $n_0 : x \to x + n$ appartiene a $G_0 (n \in G)$, allora dalla $\varphi \circ n_0(0) = 0$ si ha che $\varphi(n) = 0$ e dunque $n = 0$ e n_0 coincide con l'identità.

5. – Concludiamo il paragrafo con qualche considerazione atta a semplificare certe dimostrazione in applicazioni combinatorie.

Lemma 6. *Se G è finito e la differenza di due qualunque elementi di Φa è un elemento di $\Phi_0(-a)$, allora a è di prima categoria.*

Infatti allora si ha che $\Phi a - a \subseteq \Phi_0(-a)$ e dunque $\Phi a \subseteq \Phi_0(-a) + a$. Allora è anche $\Phi_0 a \subseteq \Phi_0(-a) + a$ perchè $0 = -a + a \in \Phi_0(-a) + a$. Ora la corrispondenza che manda 0 in a e $\varphi(a)$ $(\forall \varphi \in \Phi)$ in $\varphi(-a) + a$ è una biiezione di $\Phi_0 a$ su $\Phi_0(-a) + a$ (perchè Φ è un gruppo di automorfismi). Pertanto nel caso finito $\Phi_0 a$ e $\Phi_0(-a) + a$, essendo equipotenti devono, dopo quanto sopra osser-osservato coincidere. Vale dunque la (1), ed a è di prima categoria.

Lemma 7. *Se G è abeliano e la differenza di due qualunque elementi di Φa è un elemento di $\Phi_0(-a)$ allora a è di prima categoria.*

Grazie al Lemma 3 è sufficiente mostrare che $\Phi_0 a$ è un gruppo. Osserviamo allora che, per le ipotesi fatte, $\forall \varphi \in \Phi$ è $a - \varphi(a) \in \Phi_0(-a)$. Se in particolare φ non è l'identità esiste un $\varphi' \in \Phi$ tale che $a - \varphi(a) = \varphi'(-a)$. Ne segue che $a = -\varphi'(a) + \varphi(a)$ e poichè G è abeliano, anche $a = \varphi(a) - \varphi'(a)$. Pertanto a è differenza di elementi distinti di Φa e, per le ipotesi fatte, appartiene a $\Phi(-a)$. Pertanto $\Phi a = \Phi(-a)$.

Ne segue rapidamente che la differenza di due elementi di $\Phi_0 a$ è un elemento di $\Phi_0 a (= \Phi_0(-a))$, e dunque che $\Phi_0 a$ è un gruppo. Il Lemma è così dimostrato. Perchè ovviamente se $\Phi(a) = \{a\}$, a è di prima categoria.

(24) È chiaro che qui lavoriamo con lo stesso spirito di [5]; si veda ad esempio l'osservazione 2 di tale lavoro.

(25) Cfr. per esempio [7], pag. 21. Siano G un gruppo di permutazioni sull'insieme M, ed H un gruppo di permutazioni sull'insieme $M' = M \cup \{q\}$ con $q \notin M$. Il gruppo H si chiama estensione transitiva di G se H è transitivo su M' ed inoltre G è lo stabilizzante di q in H (coincide cioè con l'insieme degli elementi di H che lasciano fisso q).

Riassumendo si ha il

Teorema 2. *Sia G un gruppo additivo finito oppure un gruppo abeliano. Sia Φ un suo gruppo di automorfismi. Allora l'elemento $a \in G$ è di prima categoria rispetto a Φ se e solo se la differenza di due elementi qualunque di Φa è un elemento di $\Phi_0(-a)$.*

Nel caso finito questo risulta dal Lemma 6 e dal Teorema 1, nel caso abeliano dal Lemma 7 e ancora dal Teorema 1, sempre che si ricordi il Corollario 3.

Per ragioni analoghe enunciamo il

Teorema 3. *Siano G un gruppo additivo finito e Φ un suo gruppo di automorfismi. Supponiamo che la $H_n\colon x \to nx$ $(x \in G)$ sia un automorfismo di G. Allora $\Phi_0 a \cup \Phi_0(na) \cup \Phi_0(n^2a) \cup \ldots$ è un gruppo se e solo se a è di prima categoria rispetto al gruppo Φ^* generato da Φ e da H_n, tosto che Φ^* non stabilizzi alcun elemento di G di caratteristica prima dispari.*

Infatti allora, dal momento che Φ è permutabile col gruppo ciclico generato da H_n, si può scrivere che $\Phi^* = \Phi \cup \Phi \circ H_n \cup \Phi \circ H_n^2 \cup \ldots$. Ricordando anche che $(\forall i \in Z)$ è $H_n^i = H_{n^i}$ se ne deduce subito che $\Phi_n^* a = \Phi_0 a \cup \Phi_0(na) \cup \cup \Phi_0(n^2a) \cup \ldots$. Il Teorema 1 fornisce ora immediatamente il risultato richiesto ([26]).

Il caso in cui $n = -1$ è stato indirettamente trattato (sia pure in casi particolari) nel lavoro [2] ([27]), cui continuiamo ad ispirarci.

4. - Casi particolari.

6. – Scegliendo i gruppi G, Φ in modo che l'individuazione degli elementi di prima categoria sia particolarmente semplice si prepara il terreno allo studio delle prime geometrie gruppali naturali.

Nonostante la sua semplicità è utile la

Osservazione 2. *Siano G un gruppo additivo, Φ un gruppo di automorfismi. Se l'elemento $a \in G$ è tenuto fermo da tutti gli elementi di Φ, allora a è di prima categoria.*

([26]) Si noti che dimostrazione ed enunciato continuano a valere, con minimi ritocchi, se sostituiamo al gruppo ciclico generato da H_n un qualunque gruppo di automorfismi di G che sia permutabile con Φ. A noi però l'enunciato interessa solo nella forma indicata.

([27]) Teorema 6.

Osservazione 3. *Se Φ ha ordine 2 gli elementi di prima categoria non nulli del gruppo G sono:*

I) *gli elementi tenuti fermi da tutti gli elementi di Φ;*

II) *gli elementi di caratteristica 3 trasformati nel loro opposto dall'unico elemento non identico di Φ* (28).

All'infuori del Caso I (29), allora $a \in G$ è di prima categoria se e solo se $\Phi_0 a$ è un gruppo di ordine 3. Tale gruppo non potrà che essere ciclico, e l'elemento non identico di Φ non potrà che mutare a nel suo opposto.

Osservazione 4. *Se Φ ha ordine dispari gli elementi (non nulli) di prima categoria non stabilizzati da Φ hanno tutti caratteristica* 2.

Sia allora a un elemento di prima categoria. Il gruppo $\Phi_0 a$ è finito (perchè Φ ha ordine dispari, dunque finito). Pertanto è un gruppo abeliano elementare (Teorema 1). Come tale ha per ordine una potenza p^n di un numero primo. D'altra parte il numero degli elementi di Φa, dividendo l'ordine di Φ (30), non può che essere dispari. Ne segue che l'ordine di $\Phi_0 a$, essendo pari, è una potenza di 2. Il fatto che $\Phi_0 a$ è un gruppo abeliano elementare permette di completare la dimostrazione dell'enunciato.

Osservazioni aritmetiche.

Possiamo farci una idea più precisa della possibilità di trovare elementi di prima categoria in un gruppo sfruttando il noto teorema di CATALAN-GÉRONO secondo cui quando p, q sono numeri primi e $q^x = p^y + 1$, allora uno almeno degli esponenti x, y è eguale ad 1, salvo nel caso in ui $q = y = 3$ e $x = p = 2$ (31).

Supponiamo infatti che Φ sia un p-gruppo e che a sia di prima categoria. Sia p^y l'ordine di Φ e q^x l'ordine di $\Phi_0 a$: chiaramente è $q^x = p^y + 1$ (32). Pos-

(28) L'interesse di questa osservazione dipende da quello dei casi in cui Φ contiene la $x \to -x$. Cfr., inoltre [**1**], [**5**], ma anche per esempio [**6**] e il corollario 6 di [**3**].

(29) Esemplificato per esempio dal caso in cui G è isomorfo al trirettangolo, Φ contiene l'identità e lo scambio di due elementi non nulli di G. Allora sono di prima categoria lo 0 di G e l'elemento non nullo di G tenuto fermo da Φ.

(30) Ricordiamo che il numero degli elementi di Φa è eguale all'indice dello stabilizzante di a in Φ, perchè due elementi di Φ trasformano a in uno stesso elemento se e solo se appartengono ad uno stesso laterale di tale stabilizzante. Cfr. del resto il trattato citato in [**5**].

(31) Cfr. per esempio A. NATUCCI, *Ricerche sistematiche intorno al « teorema di Catalan »*, Giorn. Mat. **89** (1954), 297-300.

(32) Ed inoltre q è primo, grazie al Teorema 1.

siamo ora affermare che si possono avere soltanto i seguenti casi:

1) il numero p è eguale a 2 e l'ordine q^x di $\Phi_0 a$ è eguale a 9;

2) il numero p è eguale a 2 e q^x è un numero primo di Fermat ([33]);

3) il numero q è eguale a 2, $y=1$ e p è un numero primo di Mersenne, e dunque x è un numero primo ([34]).

Se infatti p è dispari, allora $q=2$. Dalla $2^x = p^y + 1$ si ha subito che $x \neq 1$. Ne segue che $y=1$ e che $p = 2^x - 1$.

Si noti in particolare che *se Φ è un p-gruppo che non ha ordine* 8, *allora uno almeno dei gruppi Φ, $\Phi_0 a$ risulta essere ciclico.*

Queste osservazioni possono essere utilmente collegate (specie ricordando [**3**]) con il lavoro di G. Čupona, *On fields with finite characteristic*, Bull. Soc. Math. Phys. Macédoine, **6** (1955), 44-46 (in macedone).

7. – Particolarmente interessanti e semplici sono i casi in cui Φ sposta o rispettivamente tiene fermi tutti i sottogruppi proprii di G.

Osservazione 5. *Se Φ non tiene fisso alcun sottogruppo proprio di G, allora l'insieme degli elementi di prima categoria di G è un sottogruppo improprio di G* ([35]).

Se infatti a è di prima categoria e Φ non tiene fermo a $\Phi_0 a$ è un sottogruppo, ovviamente tenuto fermo da tutti gli elementi di Φ (Teorema 1). Se pertanto nelle nostre condizioni G contiene un elemento di prima categoria a, non, nullo allora $\Phi_0 a = G$.

Quanto al caso opposto si ha intanto

Osservazione 6. *Se Φ tiene fermi tutti i sottogruppi di G l'elemento non nullo $a \in G$, avente caratteristica finita c, è di prima categoria se e solo se l'indice del suo stabilizzante in Φ è eguale a $c-1$ o all'ordine di Φ.*

Se infatti in queste condizioni a è di prima categoria e non è stabilizzato da Φ, allora $\Phi_0 a$ coincide con il gruppo ciclico additivo C_a generato da a. Ovviamente C_a ha ordine c. Allora Φa è costituito da $c-1$ elementi, e tale è l'indice dello stabilizzante di a in Φ ([36]) se e solo se a è di prima categoria.

([33]) Questi casi esauriscono la possibilità che sia $p=2$. Infatti se allora $x=1$ siamo nel secondo dei casi prospettati. Se $y=1$ è $q=3$, e siamo ancora nello stesso caso. Per il ricordato teorema di Catalan-Gèrono non resta che il caso $q=y=3$, $x=2$, prospettato al primo punto.

([34]) Cfr. per esempio E. Dickson, *History of the theory or numbers*, I, Chelsea, Washington 1919.

([35]) Cfr. anche il Corollario 6. Questo permetterà più tardi un collegamento con la teoria degli stems p-singolari. Cfr. la bibliografia di [2] o [**3**].

([36]) Cfr. l'annotazione ([30]), relativa alla dimostrazione dell'Osservazione 4.

8. – Tra gli automorfismi che tengono fermi tutti i sottogruppi di G hanno per noi particolare interesse quelli della forma

$$H_n\colon x \to nx \qquad (\text{con } n \in Z)\ (^{37})\,.$$

Per brevità, e in armonia con la terminologia dei nostri precedenti lavori indicheremo un tale H_n (se è un automorfismo del gruppo additivo G) come *automorfismo di Hall*.

Teorema 4. *Sia Φ costituito tutto da automorfismi di Hall. Allora G contiene un elemento di prima categoria avente caratteristica infinita se e solo se Φ contiene tutte le funzioni $H_n (0 \neq n \in Z)$. Se si verificano tali condizioni G è un gruppo abeliano privo di torsione tutti i cui elementi sono di prima categoria rispetto a Φ.*

Sia infatti $a \in G$ di prima categoria e di caratteristica infinita. Per il Teorema 1 l'insieme $\Phi_0 a$ è un gruppo; come tale contiene tutti gli elementi di G della forma $na\,(n \in Z)$. Ora, per $n \in N$, l'unico automorfismo di Hall capace di mandare a in na è evidentemente H_n (38). Se ne deduce che Φ deve contenere tutti gli H_n $(n \in N)$. In particolare Φ contiene H_2, e dunque G è abeliano (39). Sia ora b un elemento qualunque di G. Se b avesse caratteristica non nulla c la $H_c (\in \Phi)$ manderebbe b nello zero di G e non sarebbe un automorfismo di G, contro quanto visto poco sopra. Pertanto G è privo di torsione. Si nota ancora che $\Phi_0 b$, contenendo tutti e soli gli elementi della forma nb, coincide con il sottogruppo ciclico generato da b. Pertanto anche b è di prima categoria, per il Teorema 1. Il resto è ovvio.

Teorema 5. *Se Φ contiene soltanto automorfismi di Hall la categoria di un elemento $a \in G$ dipende solo dalla sua caratteristica.*

Il Teorema 4 dice subito che il nostro enunciato è valido per quanto riguarda gli eventuali elementi che hanno caratteristica zero.

Sia $a \in G$ un elemento di caratteristica finita c. Lo stabilizzante di a in Φ è formato dagli $H_n \in \Phi$ tali che $a = na$, tali cioè che $n-1$ sia un multiplo di c. Pertanto l'indice dello stabilizzante di a in Φ dipende solo dalla caratteristica di a. Ma la categoria di a dipende solo dall'indice di tale stabilizzante, perchè Φ tiene fermi tutti i sottogruppi di G (Cfr. l'Osservazione 6). Il Teorema è così dimostrato.

---

(37) Cfr. [**4**], [**5**] nonchè il nostro Teorema 3.

(38) Infatti la $xa = na$ equivale alla $(x-n)a = 0$ ed è dunque soddisfatta se e solo se $x = n$, dal momento che a, per ipotesi, ha caratteristica infinita.

(39) Cfr. per esempio la conclusione del n. 2 di [**5**].

Corollario 7. *Se Φ, formato tutto da automorfismi di Hall, non stabilizza alcun elemento di G ed inoltre G è abeliano dotato di torsione gli elementi di prima categoria di G sono quelli che appartengono a certi sottogruppi abeliani elementari massimali* ([40]) *di G.*

Infatti per il Teorema 4 gli elementi di prima categoria di G hanno intanto caratteristica finita; caratteristica che, per il Teorema 1, deve essere un numero primo. Se ora p è la caratteristica di un elemento G, notoriamente gli elementi di G (che è abeliano) aventi caratteristica p formano un sottogruppo elementare massimale di G. Tali elementi saranno tutti o no di prima categoria secondo che lo sia o no uno di essi (non nullo), come risulta subito dal Teorema 5.

Teorema 6. *Sia G un p-gruppo abeliano. Sia Φ un suo gruppo di automorfismi di Hall che non stabilizzi alcun elemento di G. Se G contiene elementi di prima categoria non nulli, gli elementi di prima categoria di G sono appunto quelli del suo sottogruppo elementare massimale.*

Dal momento che G, in quanto p-gruppo, è dotato di torsione, questo enunciato è conseguenza immediata del precedente Corollario 7.

Anche queste osservazioni potranno tornare utili in successive ricerche.

Bibliografia.

[1] M. Ahnsel - J. R. Clay, *Planar algebraic systems: some geometric interpretations*, J. Algebra **10** (1968), 166-175.

[2] J. R. Clay, *Some algebraic and geometric aspects of planarity*, Atti. Conv. Geo. Comb. Appl. Perugia 1970, 163-172.

[3] G. Ferrero, *Stems planari e* BIB-*disegni*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 79-96.

[4] G. Ferrero, *Sui moltiplicatori (nel senso di Hall) e sui disegni ricchi di moltiplicatori*, Atti. Conv. Geo. Comb. Appl. Perugia 1970, 233-237.

[5] G. Ferrero, *Sul concetto di moltiplicatore nel senso di Hall*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1971), 83-95.

[6] E. C. Johnsen, *The inverse multiplier for abelian group difference sets*, Canadian J. Math. **16** (1964), 787-796.

[7] H. Lüneburg, *Transitive Erweiterungen Endlicher Permutationsgruppen*, Springer Verlag, Berlin 1969.

[8] G. Zappa, *Partizioni ed S-partizioni dei gruppi finiti*, Symposia Mathematica **1** (1969), 85-94.

([40]) Non appartenenti cioè propriamente ad alcun altro sottogruppo abeliano elementare di G.

Summary.

Let $(G, +)$ *be a group, not necessarily abelian, and let* Φ *denote an group of automorphisms of* G. *We say that* $a \in G$ *is of first category with respect to* Φ *if* $\Phi_0 a = \Phi_0(-a) + a$, *where* $\Phi_0 y$ *is the union of* $\{0\}$ *and the orbit* $\Phi y = \{\alpha(y) : \alpha \in \Phi\}$ *of* y *under the action of* Φ. *The motivation of this definition is geometrical.*

Suppose $\Phi a \neq \{a\}$, $\forall a \neq 0$ *of* G.

The element $a \in G$ *is of first category (with respect to* Φ*) if and only if* $\Phi_0 a$ *is a group. If* $\Phi_0 a$ *is finite, then the group* $\Phi_0 a$ *is elementary abelian.*

Suppose now that Φ *consists of automorphism of the form* $H_n(x) = nx$. *We have then*

1) *the category of an element of* G *depends only on its characteristic;*

2) *if* G *has an element of first category of infinite characteristic, then* Φ *contains all* H_n; $n \neq 0$, *and* G *is torsion free and abelian, and each element of* G *is of first category;*

3) *if* G *is an abelian* p*-group and if* G *contains non zero elements of first category, then the elements of first category in* G *are those belonging to the maximal elementary subgroup of* G.

* * *