Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 281-308

ANTONIO MAMBRIANI e BIANCA MANFREDI (*)

Su le funzioni asperiodiche in $+\infty$. (I) (**)

§ 1. - Introduzione.

1.1. – Avvertiamo subito che:

1) Consideriamo, qui, *la classe* $\mathscr{K}_{+\infty}$ di tutte e sole le funzioni, di una variabile t, definite in intorni di $+\infty$ ed ivi

reali, univoche, *limitate* e *continue*.

2) Con simboli della forma

$$(1.1.1) \qquad y(t)_{t\geqslant a}\,, \qquad Y(t)_{t>-\infty}\,, \qquad z(t)_{t_0\leqslant t\leqslant t_1}$$

intendiamo soltanto di esprimere con brevità che le funzioni $y(t)$, $Y(t)$, $z(t)$ sono definite, o si considerano, nei seguenti rispettivi intervalli: $a\leqslant t<+\infty$, $-\infty<t<+\infty$, $t_0\leqslant t\leqslant t_1$. Inoltre, con un simbolo della forma

$$t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$$

intendiamo brevemente la successione $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \ldots$.

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito col contributo del C.N.R. nell'ambito del « Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni » ed anche del « Gruppo Nazionale per la Matematica e le sue Applicazioni alla Fisica e all'Ingegneria ». — Ricevuto: 3-XI-1971.

Ecco il contenuto di questo lavoro (1).

1.2. – Nel § **2** (dal titolo: *Ascomportamenti in* $+\infty$), dopo avere fatto alcune premesse basilari (cfr. n. **2.1** e n. **2.2**), si introduce la nozione di *ascomportamenti in* $+\infty$ di una qualsiasi funzione della classe $\mathscr{K}_{+\infty}$: il prefisso « as », in « ascomportamenti », vuole ricordare brevemente il vocabolo « asintotici », e pensiamo che tale vocabolo, o la sua abbreviazione, debba usarsi almeno tutte le volte che la variabile in gioco (sia essa continua o no) passa attraverso valori che non rimangono complessivamente in un intervallo limitato (2).

Per ogni funzione $y(t)$, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, si hanno *infiniti tipi* di ascomportamenti in $+\infty$ (cfr. n. **2.3**, Def. 3), precisamente abbiamo:

l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$, che può essere o convergente o oscillante (cfr. n. **2.4**, Def. 4);

gli ascomportamenti nel discreto in $+\infty$, ciascuno dei quali può essere o convergente o oscillante (cfr. n. **2.5**, Def. 5);

gli ascomportamenti liberi e a passo iterato in $+\infty$, ciascuno dei quali può essere o convergente (ad una funzione) o oscillante (fra due o più funzioni) (cfr. n. **2.7**, Def. 7).

1.3. – Nel § **3** (dal titolo: *Asconfronti in* $+\infty$) si introduce la nozione di *asconfronti in* $+\infty$ (3) fra due qualsiasi funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$.

Per ogni coppia di funzioni $y(t)$ e $z(t)$, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, si hanno *infiniti tipi* di asconfronti in $+\infty$ (cfr. n. **3.1**, Def. 10), precisamente abbiamo:

l'asconfronto nel continuo in $+\infty$, che può essere o un'*aseguaglianza nel continuo in* $+\infty$ [cfr. n. **3.2**, Def. 11, 1°)] o un'*asdiseguaglianza nel continuo in* $+\infty$ [cfr. n. **3.2**, Def. 11, 2°)];

gli asconfronti nel discreto in $+\infty$, ciascuno dei quali può essere o una *aseguaglianza nel discreto in* $+\infty$ [cfr. n. **3.3**, Def. 12, 1°)] o un'*asdiseguaglianza nel discreto in* $+\infty$ [cfr. n. **3.3**, Def. 12, 2°)];

---

(1) Nelle mie ricerche di Meccanica non lineare, per la determinazione di moti periodici e quasiperiodici, essendosi resi necessari alcuni approfondimenti analitici, ho consultato il prof. A. MAMBRIANI: ha avuto origine, così, questo lavoro in collaborazione. (B. MANFREDI)

Gli autori dichiarano che i loro contributi in questa Nota sono *da dividere in parti eguali.*

(2) Ad esempio, S. PINCHERLE ([**1**], p. 93) chiama « comportamento asintotico di una successione » il modo di comportarsi del termine generale a_n, della successione, quando $n \to +\infty$ (qui, la variabile n con i suoi valori $0, 1, 2, \ldots$ non si mantiene manifestamente in un intervallo limitato).

Allargando l'uso del prefisso « as », proponiamo di affermare che

$-\infty$ e $+\infty$ sono degli *asvalori* (infiniti);

parimenti, se t_0 è un valore finito, tanto t_0- che t_0+ si diranno degli *asvalori* (finiti).

(3) Il prefisso « as » in « asconfronti » ricorda il vocabolo « asintotici ».

gli asconfronti liberi e a passo iterato, in $+\infty$, ciascuno dei quali può essere o un'*aseguaglianza libera e a passo iterato* (*in* $+\infty$) [cfr. n. **3.4**, Def. 13, 1°)] o un'*asdiseguaglianza libera e a passo iterato* (*in* $+\infty$) [cfr. n. **3.4**, Def. 13, 2°)].

1.4. – Nel § 4 (dal titolo: *Asperiodicità in* $+\infty$) si pone in luce una speciale proprietà di certi ascomportamenti in $+\infty$: proprietà valida per tutte le funzioni periodiche di $\mathscr{K}_{+\infty}$ e anche per infinite altre funzioni non periodiche di $\mathscr{K}_{+\infty}$.

Questa proprietà (presa a titolo del presente lavoro) è qui chiamata *asperiodicità in* $+\infty$: essa si esprime con delle «aseguaglianze in $+\infty$», ciò che conduce a considerare *infiniti tipi* di asperiodicità in $+\infty$; precisamente, abbiamo:

l'asperiodicità nel continuo in $+\infty$ (cfr. n. **4.2**, Def. 14),
le asperiodicità nel discreto in $+\infty$ (cfr. n. **4.3**, Def. 15),
le asperiodicità libere e a passo iterato, in $+\infty$ (cfr. n. **4.4**, Def. 16).

1.5. – Infine, nel § **5** (dal titolo: *Dimostrazioni dei teoremi*) proviamo i cinque teoremi seguenti:

Teorema 1. *Due funzioni, di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *periodiche in un intorno di* $+\infty$, *sono identiche se e solo se sono aseguali nel continuo in* $+\infty$ [cfr. n. **3.2**, Def. 11, 1°)].

Teorema 2. *Sia* $y(t)$ *una funzione di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, τ *un numero maggiore di zero,* ν *la variabile intera non negativa, e consideriamo la funzione* $y(t)$ *a passo* τ *iterato* (cfr. n. **2.6**, Def. 6) *data da* $y(t+\nu\tau)$. *Supponiamo che* $y(t)$ *e* τ *siano tali che*

$$(1.5.1) \qquad \lim_{\nu\to+\infty} y(t+\nu\tau) \quad \textit{esista in un intervallo del tipo } t_0 \leqslant t < t_0+\tau\,.$$

Allora: 1°) *Il limite* (1.5.1) *esiste anche per ogni valore di* $t \in (-\infty \ldots +\infty)$: *in base a ciò, poniamo*

$$(1.5.2) \qquad \lim_{\nu\to+\infty} y(t+\nu\tau) = Y(t;\tau)\,, \qquad t \in (-\infty \ldots +\infty)\,.$$

2°) *La funzione* (*reale e univoca*) $Y(t;\tau)$ *è limitata e periodica di periodo* τ, *precisamente*: *è periodica costante se* $y(t)$ *quando* $t\to+\infty$ *è convergente, e si ha* $Y(t;\tau) \equiv \lim_{t'\to+\infty} y(t')$; *è periodica oscillante se* $y(t)$ *quando* $t\to+\infty$ *è oscillante.*

Teorema 3. *Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, e τ un numero maggiore di zero. Allora, si equivalgono le tre affermazioni seguenti:*

(I) *La $y(t)$ soddisfa alla relazione limite* (1.5.2).

(II) *La $y(t)$ è asperiodica libera e a passo τ iterato, in $+\infty$, di asperiodo τ* (cfr. n. **4.4**, Def. 16).

(III) *La $y(t)$ è aseguale liberamente e a passo τ iterato, in $+\infty$, ad una funzione periodica di periodo τ* [cfr. n. **3.4**, Def. 13, 1°)].

Teorema 4. *Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, e τ un numero maggiore di zero. Allora, si equivalgono le quattro affermazioni seguenti:*

(α) *La $y(t)$ soddisfa alla relazione limite* (1.5.2) *uniformemente (rispetto a t) in ogni intervallo illimitato $(-T \ldots +\infty)$ con T positivo e grande a piacere* (cfr. n. **2.8**, A., Def. 9).

(α)′ *La successione di funzioni $y(t+\nu\tau)$ $(\nu=0, 1, 2, \ldots)$ ha una e una sola funzione di accumulazione in ogni intervallo illimitato $(-T \ldots +\infty)$ con T positivo e grande a piacere* (cfr. n. **2.8**, A., Osserv. 4).

(β) *La $y(t)$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ* (cfr. n. **4.2**, Def. 14).

(γ) *La $y(t)$ è aseguale nel continuo in $+\infty$ ad una funzione periodica di periodo τ* [cfr. n. **3.2**, Def. 11, 1°)].

Teorema 5. *Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, τ un numero maggiore di zero, e valga l'affermazione* (α) *del Teor.* 4. *Allora:*

1°) *La funzione limite $Y(t; \tau)$ appartiene alla classe $\mathscr{K}_{+\infty}$.*

2°) *Le funzioni $y(t)$ e $Y(t; \tau)$ hanno sempre lo stesso « intervallo dei valori d'accumulazione in $+\infty$ »* (cfr. n. **2.1**), *e questo intervallo è formato da tutti e soli i valori distinti di $Y(t; \tau)_{0 \leq t < \tau}$* [cfr. n. **2.1**, 5°)].

Osservazione. Le conclusioni ottenute in [**5**], da uno degli autori sono alquanto diverse dalle conclusioni ottenute qui: ciò, per la diversità delle ipotesi su le funzioni considerate e dei procedimenti deduttivi seguiti.

§ 2. - Ascomportamenti in $+\infty$.

2.1. - Premessa 1. **« L'intervallo dei valori d'accumulazione in $+\infty$ » di una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$.**

Definizione 1. Sia $y(t)$ una funzione definita in un intorno di $+\infty$, reale, univoca, limitata e continua, cioè una funzione della classe $\mathscr{K}_{+\infty}$ (cfr. n. **1.1**). « I valori d'accumulazione dei valori di una simile $y(t)$ quando $t \to +\infty$ » si diranno più brevemente

i valori d'accumulazione in $+\infty$ di $y(t)$.

Sui valori d'accumulazione in $+\infty$ delle funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$ possiamo fare le seguenti affermazioni:

1°) *I valori d'accumulazione in* $+\infty$ *di una funzione* $y(t)$, *di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *sono tutti finiti e sempre in numero* $\geqslant 1$. Ciò consegue dalla limitazione di $y(t)$.

2°) *Se, per una funzione* $y(t)$ *di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *esistono due distinti valori d'accumulazione in* $+\infty$, *siano* λ_1 *e* λ_2 *con* $\lambda_1 < \lambda_2$, *esistono infiniti valori d'accumulazione in* $+\infty$, *dati almeno da tutti i valori dell'intervallo* $(\lambda_1 \dots \lambda_2)$. Ciò consegue dalla natura di λ_1 e λ_2 e dalla continuità di $y(t)$.

3°) *L'insieme di tutti i distinti valori d'accumulazione in* $+\infty$ *di una funzione* $y(t)$ *di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *formano sempre un intervallo limitato e chiuso*

$$(\underline{y}(+\infty) \dots \bar{y}(+\infty)), \tag{2.1.1}$$

dove $\underline{y}(+\infty)$ *e* $\bar{y}(+\infty)$ *sono i due estremi valori d'accumulazione in* $+\infty$ *di* $y(t)$, *precisamente:*

$$\underline{y}(+\infty) = \min_{t \to +\infty} \lim y(t)\,, \qquad \bar{y}(+\infty) = \max_{t \to +\infty} \lim y(t)\,. \tag{2.1.2}$$

Ciò, in virtù della precedente affermazione 2°).

Quest'ultima conclusione conduce a porre la seguente

Definizione 2. Il precedente intervallo limitato e chiuso

$$(\underline{y}(+\infty) \dots \bar{y}(+\infty)),$$

relativo ad una funzione $y(t)$ di $\mathscr{K}_{+\infty}$ e contenente tutti e soli i valori d'accumulazione in $+\infty$ di tale funzione, si dirà

l'intervallo dei valori d'accumulazione in $+\infty$ di $y(t)$.

4°) *L'intervallo dei valori d'accumulazione in* $+\infty$ *di una funzione* $y(t)$, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, *si riduce ad un solo valore se e solo se esiste* $\lim\limits_{t \to +\infty} y(t)$, *e tale valore è*

$$\underline{y}(+\infty) = \bar{y}(+\infty) = \lim_{t \to +\infty} y(t)\,.$$

5°) *L'intervallo dei valori d'accumulazione in* $+\infty$ *di una funzione* $y(t)$, *di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *periodica di periodo* τ (> 0), *è formato da tutti e soli i valori distinti di* $y(t)$, *quindi (per la detta periodicità) da tutti e soli i valori distinti di*

$$y(t)_{t_0 \leqslant t < t_0 + \tau}\,. \tag{2.1.3}$$

Ne segue

$$\underline{y}(+\infty) = \min y(t)_{t_0 \leq t < t_0 + \tau} , \qquad \bar{y}(+\infty) = \max y(t)_{t_0 \leq t < t_0 + \tau} .$$

Invero, da

$$y(t + \nu\tau) = y(t) \qquad (t_0 \leq t < t_0 + \tau ; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

segue manifestamente

$$\lim_{\nu \to +\infty} y(t + \nu\tau) = y(t) \qquad (t_0 \leq t < t_0 + \tau) ,$$

la quale esprime che tutti i valori (2.1.3) sono valori d'accumulazione in $+\infty$ di $y(t)$ [e non possono esserci altri valori d'accumulazione in $+\infty$ di $y(t)$].

Osservazione 1. La conclusione 5°) precedente sarà poi largamente generalizzata in questo lavoro [cfr. i teoremi del n. **1.5**, e in particolare il Teor. 5, 2°)].

2.2. - Premessa 2. **Una classificazione degli infiniti modi, per una variabile, di « tendere crescendo verso $+\infty$ ».**

Per ciò che segue interessa la seguente classificazione:

I) Se la variabile t, partendo da un valore t_0 comunque grande, varia con continuità e tende sempre crescendo verso $+\infty$, si dirà che

t tende, crescendo nel continuo, verso $+\infty$.

Un tale modo di tendere verso $+\infty$ (quando non si tenga conto della velocità di tendenza) è manifestamente unico.

II) Se la variabile t, partendo da una valore t_0 comunque grande, varia con discontinuità, assumendo via via soltanto i valori di una determinata successione

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_\nu, \quad \ldots \qquad (t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_\nu < \ldots \to +\infty) , \tag{2.2.1}$$

si dirà che

t tende, crescendo nel discreto $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$, verso $+\infty$.

Tali modi di tendere sono manifestamente infiniti, perchè sono infinite le successioni del tipo (2.2.1). Osserviamo, ora, che la successione (2.2.1) si può presentare in modo diverso: ponendo in evidenza le differenze

$$t_1 - t_0 = \tau_1 , \quad t_2 - t_1 = \tau_2 , \quad \ldots, \quad t_\nu - t_{\nu-1} = \tau_\nu , \quad \ldots$$

[che sono tutte maggiori di zero e che chiameremo « *i passi* della successione (2.2.1) »], la successione (2.2.1) si può scrivere

$$(2.2.1)' \qquad t_0\,, \quad t_0+\tau_1\,, \quad t_0+(\tau_1+\tau_2)\,, \quad \ldots, \quad t_0+(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_\nu)\,, \quad \ldots,$$

e quando t assume via via soltanto i valori (2.2.1)′ si dirà che

t tende, partendo da t_0 e crescendo a passi $\tau_{\nu(=1,2,\ldots)}$, verso $+\infty$.

Nel caso particolare notevole in cui sia $\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_\nu=\ldots=\tau$ (>0), la (2.2.1)′ diventa

$$(2.2.1)'' \qquad t_0\,, \quad t_0+\tau\,, \quad t_0+2\tau\,, \quad \ldots, \quad t_0+\nu\tau\,, \quad \ldots,$$

e quando t assume via via soltanto i valori (2.2.1)″ si dirà che

t tende, partendo da t_0 e crescendo a passo τ iterato, verso $+\infty$.

III) Le successioni del tipo (2.2.1)′, e in particolare del tipo (2.2.1)″, suggeriscono poi l'idea di sostituire al valore iniziale t_0 il generico valore t, ottenendo così le successioni:

$$(2.2.2) \qquad t\,, \quad t+\tau_1\,, \quad t+(\tau_1+\tau_2)\,, \quad \ldots, \quad t+(\tau_1+\tau_2+\ldots+\tau_\nu)\,, \quad \ldots,$$

$$(2.2.2)' \qquad t\,, \quad t+\tau\,, \quad t+2\tau\,, \quad \ldots, \quad t+\nu\tau\,, \quad \ldots.$$

Si vedrà che la (2.2.2)′ interviene assai utilmente nelle considerazioni seguenti.

2.3. - Infiniti tipi di « ascomportamenti in $+\infty$ » per una stessa funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$.

Dopo le premesse dei nn. **2.1** e **2.2**, poniamo la seguente

Definizione 3. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$. Il comportamento limite di $y(t)$, quando t tende crescendo verso $+\infty$ in uno dei possibili infiniti modi (cfr. n. **2.2**), si dirà

un ascomportamento in $+\infty$ di $y(t)$ [1].

Con questa definizione desideriamo fissare che si ha un tipo di « ascomportamento in $+\infty$ », per una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, in corrispondenza od ogni modo, della variabile t, di tendere crescendo verso $+\infty$. Poichè questi modi

[1] Su questo vocabolo « ascomportamento » e su altri vocaboli seguenti con il prefisso « as » (a ricordare il vocabolo « asintotico ») si veda l'inizio del n. **1.2**.

di tendere sono infiniti, abbiamo:

Per una stessa funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$ *si hanno infiniti tipi di ascomportamenti in* $+\infty$.

Diamo ora dei nomi a questi tipi di ascomportamenti in $+\infty$.

2.4. - Ascomportamento nel continuo in $+\infty$.

Definizione 4. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$. Il comportamento limite di $y(t)$, quando $t \to +\infty$ o, meglio, quando t tende, crescendo nel continuo, verso $+\infty$ [cfr. n. **2.2**, I)], si dirà

l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$ di $y(t)$.

Tale tipo di ascomportamento può essere soltanto di due specie:

1°) Se

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) \quad \text{esiste (finito)} \tag{2.4.1}$$

[limite necessariamente finito, perchè $y(t)$ è limitata], si dirà che l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$, di $y(t)$, è *convergente*, o, più brevemente, che $y(t)$ nel continuo in $+\infty$ è *costante* (in particolare, sono tali le funzioni costanti in un intorno di $+\infty$).

2°) Se

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) \quad \text{non esiste} \tag{2.4.2}$$

[ed allora $y(t)$ oscillerà fra infiniti valori d'accumulazione in $+\infty$], si dirà che l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$, di $y(t)$, è *oscillante*, o, più brevemente, che $y(t)$ nel continuo in $+\infty$ è *oscillante*. (2)

Manifestamente: quando per la precedente funzione $y(t)$ l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$ è precisato dalla (2.4.1), l'intervallo dei valori d'accumulazione in $+\infty$ di $y(t)$ si riduce al solo valore $\underline{y}(+\infty) = \bar{y}(+\infty) = \lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ [cfr. n. **2.1**, 4°)]; invece, quando per $y(t)$ l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$ è precisato dalla (2.4.2), l'intervallo dei valori d'accumulazione in $+\infty$ di $y(t)$ ha lunghezza $\bar{y}(+\infty) - \underline{y}(+\infty) > 0$ [cfr. n. **2.1**, 3°)].

Esempi semplici: la funzione $y(t) \equiv 1 + \exp(-t)$ converge nel continuo in $+\infty$ verso 1, onde $\underline{y}(+\infty) = \bar{y}(+\infty) = 1$; la funzione $y(t) \equiv 1 + \operatorname{sen} t$ oscilla nel continuo in $+\infty$, ed è $\underline{y}(+\infty) = 0$, $\bar{y}(+\infty) = 2$, onde il suo intervallo dei valori d'accumulazione in $+\infty$ è l'intervallo $(0 \ldots 2)$ [cfr. n. **2.1**, 3°) e 5°)].

---

(2) Non ha luogo la considerazione di un ascomportamento nel continuo in $+\infty$ che sia «divergente», perchè $y(t)$ è limitata.

2.5. - Ascomportamenti nel discreto in $+\infty$.

Definizione 5. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$. Il comportamento limite di $y(t)$, quando t varia con discontinuità assumendo via via soltanto i valori di una determinata successione $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ crescente e tendente verso $+\infty$ [cfr. n. **2.2**, II)], si dirà

un ascomportamento nel discreto in $+\infty$ di $y(t)$

e precisamente

l'ascomportamento nel discreto $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ di $y(t)$.

Ogni tale tipo di ascomportamento può essere soltanto di due specie:

1°) Se

$$\lim_{\nu\to+\infty} y(t_\nu) \quad \text{esiste (finito)} \tag{2.5.1}$$

[limite necessariamente finito, perchè $y(t)$ è limitata], si dirà che l'ascomportamento nel discreto $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ (in $+\infty$) di $y(t)$ è *convergente.*

2°) Se

$$\lim_{\nu\to+\infty} y(t_\nu) \quad \text{non esiste} \tag{2.5.2}$$

[ed allora $y(t_\nu)$ oscillerà fra due o più valori d'accumulazione in $+\infty$], si dirà che l'ascomportamento nel discreto $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ (in $+\infty$) di $y(t)$ è *oscillante.* (3)

Facendo intervenire i passi $\tau_{\nu(=1,2,\ldots)}$ (tutti maggiori di zero) della successione $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ [cfr. n. **2.2**, II)] si ha

$$\lim_{\nu\to+\infty} y(t_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty} y(t_0 + (\tau_1 + \tau_2 + \ldots + \tau_\nu)) \tag{2.5.3}$$

e l'ascomportamento si preciserà dicendo

l'ascomportamento a partire da t_0 *e a passi* $\tau_{\nu(=1,2,\ldots)}$ (*in* $+\infty$) di $y(t)$.

In particolare, per $\tau_\nu = \tau$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ si ha

$$\lim_{\nu\to+\infty} y(t_\nu) = \lim_{\nu\to+\infty} y(t_0 + \nu\tau) \tag{2.5.3$'$}$$

e l'ascomportamento si preciserà dicendo

l'ascomportamento a partire da t_0 *e a passo* τ *iterato* (*in* $+\infty$) di $y(t)$.

Osservazione 2. Evidentemente, quando per la $y(t)$, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$ è convergente (verso un determinato numero), ogni ascomportamento nel discreto in $+\infty$ è convergente (verso lo stesso numero precedente). Invece, quando l'ascomportamento nel continuo in $+\infty$, di $y(t)$, è oscillante, gli ascomportamenti nel discreto in $+\infty$, di tale $y(t)$, possono non essere sempre tutti oscillanti: allora, hanno speciale interesse i casi nei quali la $y(t)$ ha ascomportamenti nel discreto in $+\infty$ convergenti.

---

(3) Non ha luogo la considerazione di un ascomportamento nel discreto $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ che sia « divergente », perchè $y(t)$ è limitata.

2.6. - Le funzioni, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, a passo iterato.

Per completare la classificazione degli « ascomportamenti in $+\infty$ » interessa porre ancora la seguente

Definizione 6. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$. Fissato un valore $\tau > 0$, e detta ν la variabile intera non negativa, passiamo da $y(t)$ alla funzione

$$y(t + \nu\tau) \tag{2.6.1}$$

dipendente dal binomio $t + \nu\tau$ [cfr. n. **2.2**, (2.2.2)′] e quindi dipendente dalle due variabili t e ν. Si dirà che la (2.6.1) è

la funzione $y(t)$ a passo τ iterato (4) .

A seconda che la $y(t)$ è una $y(t)_{t\geqslant a}$ o una $y(t)_{t>-\infty}$, la (2.6.1) si preciserà, rispettivamente, così:

$$y(t + \nu\tau)_{t\geqslant a-\nu\tau;\ \nu=0,1,2,\ldots} \tag{2.6.1′}$$

(in quanto, dovendo essere $a \leqslant t + \nu\tau < +\infty$ segue $a - \nu\tau \leqslant t < +\infty$), e

$$y(t + \nu\tau)_{t>-\infty;\ \nu=0,1,2,\ldots} . \tag{2.6.1″}$$

Ecco, ora, alcune utili conclusioni:

1°) *In un piano cartesiano, di assi coordinati t e y, si considerino il diagramma di $y(t)$ e il diagramma di $y(t + \nu\tau)$ (per un fissato $\nu > 0$).*

Si osserva facilmente che, se il diagramma di $y(t)$ si trasla nel piano (t, y), dell'ampiezza $\nu\tau$, parallelamente all'asse t e nel verso negativo di tale asse, si ottiene il diagramma di $y(t + \nu\tau)$: basta notare che è $y(t) = y\big((t - \nu\tau) + \nu\tau\big)$.

2°) *La funzione $y(t)$ a passo τ iterato, cioè la $y(t + \nu\tau)$, si può sempre calcolare per ogni $t \in (-\infty \ldots +\infty)$, purchè nel caso (2.6.1)′ l'intero ν $(= 0, 1, 2, \ldots)$ sia preso sufficientemente grande.*

Invero, ciò è evidente se la (2.6.1) è una (2.6.1)″; se invece la (2.6.1) è una (2.6.1)′, dove t può assumere solo i valori dell'intervallo $(a - \nu\tau \ldots +\infty)$ (cfr. Def. 6), basterà notare che è $\lim\limits_{\nu\to+\infty}(a - \nu\tau \ldots +\infty) = (-\infty \ldots +\infty)$, per concludere.

3°) *Se la funzione $y(t)$ a passo τ iterato, cioè la $y(t + \nu\tau)$, quando $\nu \to +\infty$ è convergente (verso un determinato numero λ) per un particolare valore $t = t_0$,*

tale funzione è pure convergente (verso lo stesso numero λ) per tutti gli infiniti valori

$$t = t_0 + k\tau \qquad (k = \ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots) . \tag{2.6.2}$$

---

(4) Avvertiamo subito che la considerazione della (2.6.1) equivale, manifestamente, alla considerazione della successione

$$y(t) , \quad y(t + \tau) , \quad y(t + 2\tau) , \quad \ldots , \quad y(t + \nu\tau) , \quad \ldots ,$$

già studiata in [**5**], dove venne chiamata « la progressione di aritmeticità di generatrice $y(t)$ e di ragione τ ».

Invero, per l'ipotesi fatta, in corrispondenza a $t = t_0$ sia $\nu = \nu_0$ un tale intero (abbastanza grande) che $t_0 + \nu_0\tau$ appartenga all'intorno (di $+\infty$) in cui è definita $y(t)$, ed allora l'ipotesi fatta equivale ad affermare che la successione

$$(2.6.3) \qquad y(t_0 + \nu_0\tau)\,, \quad y(t_0 + (\nu_0 + 1)\tau)\,, \quad y(t_0 + (\nu_0 + 2)\tau)\,, \quad \ldots$$

converge verso il numero λ. Calcolando ora la $y(t + \nu\tau)$ per uno generico dei valori (2.6.2), abbiamo

$$y((t_0 + k\tau) + \nu\tau) \equiv y(t_0 + (\nu + k)\tau)\,,$$

e facendo qui via via $\nu = \nu_0, \nu_0 + 1, \nu_0 + 2, \ldots$ si ha la successione (2.6.3) per $k = 0$, mentre per ogni altro valore di k si ha questa stessa successione (2.6.3) accresciuta o privata di un certo numero finito di termini iniziali. Ciò basta per concludere.

4°) *Se la funzione $y(t)$ a passo τ iterato, cioè la $y(t + \nu\tau)$, quando $\nu \to +\infty$ è convergente (verso determinati numeri) per ogni t di un intervallo $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$ (di lunghezza τ),*

tale funzione è pure convergente (ordinatamente verso gli stessi numeri) per ogni t di ciascuno degli intervalli

$$\ldots, \quad t_0 - 2\tau \leqslant t < t_0 - \tau\,, \quad t_0 - \tau \leqslant t < t_0\,;$$
$$t_0 + \tau \leqslant t < t_0 + 2\tau\,, \quad t_0 + 2\tau \leqslant t < t_0 + 3\tau\,, \quad \ldots.$$

Ciò segue applicando via via, per ogni t dell'intervallo $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$, la conclusione 3°) precedente. Abbiamo quindi il corollario:

5°) *Se la funzione $y(t)$ a passo τ iterato, cioè la $y(t + \nu\tau)$, quando $\nu \to +\infty$ è convergente per ogni t di un intervallo $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$ (di lunghezza τ),*

tale funzione è convergente in tutto l'intervallo $(-\infty \ldots +\infty)$, ed il limite $Y(t;\tau)$ è una funzione, della t, limitata e p e r i o d i c a di periodo τ.

2.7. - Ascomportamenti liberi e a passo τ iterato in $+\infty$.

Dopo avere introdotto la nozione di «funzione, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, a passo iterato», poniamo la seguente

D e f i n i z i o n e 7. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, τ un numero maggiore di zero, ν la variabile intera non negativa, e consideriamo (cfr. n. **2.6**, Def. 6) «la funzione $y(t)$ a passo τ iterato», cioè

$$2.7.1) \qquad y(t + \nu\tau)\,.$$

Il comportamento limite di (2.7.1) quando $\nu \to +\infty$ si dirà

l'ascomportamento libero e a passo τ iterato, in $+\infty$, di $y(t)$.

Tale tipo di ascomportamento può essere soltanto di due specie:

1°) Se [cfr. n. **2.6**, 5°)]

$$\lim_{\nu\to+\infty} y(t+\nu\tau) = Y(t;\tau)_{t>-\infty} \tag{2.7.2}$$

[dove la $Y(t;\tau)$ è limitata perchè $y(t)$ è limitata], si dirà che l'ascomportamento libero e a passo τ iterato in $+\infty$, di $y(t)$, è *convergente*, e la (2.7.2) si enuncerà dicendo che *la funzione $y(t)$ a passo τ iterato quando $\nu \to +\infty$ converge verso $Y(t;\tau)_{t>-\infty}$* (5).

2°) Se

$$\lim_{\nu\to+\infty} y(t+\nu\tau) \qquad \text{non esiste}\,, \tag{2.7.3}$$

si dirà che l'ascomportamento libero e a passo τ iterato in $+\infty$, di $y(t)$, è *oscillante*, e la (2.7.3) si enuncerà dicendo che *la funzione $y(t)$ a passo τ iterato quando $\nu \to +\infty$ è oscillante* (6).

Esempi semplici. 1°) La funzione $y(t) \equiv \exp(-t) + \operatorname{sen} t$ a passo $\tau = 2\pi$ iterato è convergente: invero, risulta

$$\lim_{\nu\to+\infty}[\exp[-(t+\nu\cdot 2\pi)] + \operatorname{sen}(t+\nu\cdot 2\pi)] = \operatorname{sen} t\,.$$

2°) La stessa funzione precedente a passo $\tau = \pi$ iterato è invece oscillante. Invero, tale funzione a passo $\tau = \pi$ iterato è data da

$$y(t+\nu\pi) \equiv \exp[-(t+\nu\pi)] + \operatorname{sen}(t+\nu\pi)\,,$$

che non ha limite quando $\nu \to +\infty$, perchè in corrispondenza a $\nu = 2n$ e $\nu = 2n+1$ si spezza, rispettivamente, nelle due funzioni seguenti:

$$y(t+2n\cdot\pi) = y(t+n\cdot 2\pi) = \exp[-(t+n\cdot 2\pi)] + \operatorname{sen}(t+n\cdot 2\pi)\,,$$

$$y(t+(2n+1)\pi) = y(t+\pi+n\cdot 2\pi) = \\ = \exp[-(t+\pi+n\cdot 2\pi)] + \operatorname{sen}(t+\pi+n\cdot 2\pi)\,,$$

le quali, quando $n \to +\infty$, hanno ordinatamente i limiti distinti $\operatorname{sen} t$ e $\operatorname{sen}(t+\pi) = -\operatorname{sen} t$.

---

(5) Il caso (2.7.2) sarà ulteriormente precisato nel seguente n. **2.8**.

(6) Il caso (2.7.3) sarà analizzato in un prossimo lavoro.

2.8. - Precisazioni su la relazione limite (2.7.2).

Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, τ un numero maggiore di zero, e passiamo alla «funzione $y(t)$ a passo τ iterato» di espressione

$$y(t+\nu\tau)\,. \tag{2.8.1}$$

Come si è detto al n. **2.6**, Def. 6, la (2.8.1) si precisa così: se è $y(t)_{t\geqslant a}$ si ha:

$$y(t+\nu\tau)_{t\geqslant a-\nu\tau;\ \nu=0,1,2,\dots}\,, \tag{2.8.1$'$}$$

se è $y(t)_{t>-\infty}$ si ha

$$y(t+\nu\tau)_{t>-\infty;\ \nu=0,1,2,\dots}\,. \tag{2.8.1$''$}$$

In questo n. **2.8** converremo, però, di mantenere sempre per la funzione (2.8.1) la precisazione (2.8.1)$'$, intendendo che il numero reale a sia un qualsiasi numero reale se si è nel caso (2.8.1)$''$.

A. – *Definizioni di convergenza e di uniforme convergenza.*

Definizione 8. Si dirà che *la $y(t+\nu\tau)$ [cioè la funzione $y(t)$ a passo τ iterato] quando $\nu\to+\infty$ converge ad una funzione $Y(t;\tau)$ in tutto l'intervallo $-\infty<t<+\infty$*, allorchè:

presi ad arbitrio un $\varepsilon>0$ e un n intero positivo comunque grande, esiste un intero positivo $\nu_{\varepsilon,n}(t)$ (dipendente in generale da ε e n, e anche da t) tale che sia

$$|y(t+\nu\tau)-Y(t;\tau)|<\varepsilon \qquad \left(\nu>\begin{cases} n \\ \nu_{\varepsilon,n}(t)\end{cases},\quad t\geqslant a-n\tau\right). \tag{2.8.2}$$

Definizione 9. Si dirà che *la $y(t+\nu\tau)$ [cioè la funzione $y(t)$ a passo τ iterato] quando $\nu\to+\infty$ uniformemente converge ad una funzione $Y(t;\tau)$ in ogni intervallo illimitato $-T\leqslant t<+\infty$, con T positivo grande a piacere*, allorchè:

presi ad arbitrio un $\varepsilon>0$ e un n intero positivo comunque grande, esiste un intero positivo $\bar\nu_{\varepsilon,n}$ (dipendente in generale da ε e n, ma non da t) tale che sia

$$|y(t+\nu\tau)-Y(t;\tau)|<\varepsilon \qquad \left(\nu>\begin{cases} n \\ \bar\nu_{\varepsilon,n}\end{cases},\quad t\geqslant a-n\tau=-T\right). \tag{2.8.3}$$

Osservazione 3. Quando vale la Def. 8 varrà anche la Def. 9 se e solo se l'intero $\nu_{\varepsilon,n}(t)$, che compare nella Def. 8, non dipende da $t\in(a-n\tau\dots+\infty)$.

Osservazione 4. *Quando vale la Def. 9, la funzione $Y(t;\tau)$ non solo è un limite, è anche una funzione d'accumulazione (e l'unica funzione d'accumulazione) delle funzioni $y(t+\nu\tau)$ $(\nu=0,1,2,\dots)$ in ogni intervallo illimitato $-T\leqslant t<+\infty$, con T positivo grande a piacere.*

B. – *Criteri di convergenza e di uniforme convergenza.*

1°) *La* $y(t+\nu\tau)$ [*cioè la funzione* $y(t)$ *a passo* τ *iterato*] *quando* $\nu \to +\infty$ *converge in tutto l'intervallo* $-\infty < t < +\infty$ se e solo se si ha:

presi ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e un n intero positivo comunque grande, esiste un intero positivo $\tilde{\nu}_{\varepsilon,n}(t)$ (dipendente in generale da ε e n, e anche da t; ma non dipendente da m) tale che sia

$$(2.8.4)\qquad |y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)|<\varepsilon \quad \left(\nu > \begin{cases} n \\ \tilde{\nu}_{\varepsilon,n}(t) \end{cases}, \quad t \geqslant a - n\tau; \quad m = 1, 2, \dots\right),$$

Questa condizione si può anche porre nella forma:

$$(2.8.4)'\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu\to+\infty} [y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)]_{t\geqslant a-\nu\tau;\ m=1,2,\dots} = 0 \\ \qquad\qquad \textit{uniformemente rispetto ad } m\,. \end{cases}$$

2°) *La* $y(t+\nu\tau)$ [*cioè la funzione* $y(t)$ *a passo* τ *iterato*] *quando* $\nu \to +\infty$ *uniformemente converge in ogni intervallo illimitato* $-T \leqslant t < +\infty$, *con* T *positivo grande a piacere*, se e solo se si ha:

presi ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ e un n intero positivo comunque grande, esiste un intero positivo $\bar{\tilde{\nu}}_{\varepsilon,n}$ (dipendente da ε e n, ma non dipendente da t e m) tale che sia

$$(2.8.5)\qquad |y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)|<\varepsilon \quad \left(\nu > \begin{cases} n \\ \bar{\tilde{\nu}}_{\varepsilon,n} \end{cases}, \quad t \geqslant a - n\tau; \quad m = 1, 2, \dots\right).$$

Questa condizione si può anche porre nella forma:

$$(2.8.5)'\qquad \begin{cases} \lim\limits_{\nu\to+\infty} [y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)]_{t\geqslant a-\nu\tau} = 0 \\ \textit{uniformemente} \begin{cases} \textit{sia rispetto a } t \in (-T \dots +\infty) \ (T>0 \textit{ e grande a piacere}), \\ \textit{sia rispetto ad } m \ (=1, 2, \dots)\,. \end{cases} \end{cases}$$

§ 3. - Asconfronti in $+\infty$.

3.1. - Infiniti tipi di « asconfronti in $+\infty$ » fra due stesse funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$.

Definizione 10. Siano $y(t)$ e $z(t)$ due funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$. Il comportamento limite della differenza

$$y(t) - z(t),$$

quando t tende crescendo verso $+\infty$ in uno dei possibili infiniti modi (cfr. n. **2.2**), individua (1) ciò che si dirà

un asconfronto in $+\infty$ fra $y(t)$ e $z(t)$ (2).

Con questa Def. 10 desideriamo fissare che si ha un tipo di « asconfronto in $+\infty$ », fra due funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$, in corrispondenza ad ogni modo della variabile t di tendere crescendo verso $+\infty$ (cfr. n. **2.2**). Poichè questi modi di tendere sono infiniti, si conclude:

Fra due stesse funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$ *si hanno infiniti tipi di asconfronti in* $+\infty$.

Diamo ora dei nomi a questi tipi di asconfronti in $+\infty$.

3.2. - Asconfronto nel continuo in $+\infty$.

Definizione 11. Siano $y(t)$ e $z(t)$ due funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$. Il comportamento limite della differenza $y(t) - z(t)$ quando $t \to +\infty$ o meglio quando t tende, crescendo nel continuo, verso $+\infty$ [cfr. n. **2.2**, I)], individua ciò che si dirà

l'asconfronto nel continuo in $+\infty$ fra $y(t)$ e $z(t)$.

Tale tipo di asconfronto può essere soltanto di due specie:

1°) Se

$$\lim_{t\to+\infty} [y(t) - z(t)] = 0, \tag{3.2.1}$$

si dirà che *l'ascomportamento nel continuo in* $+\infty$ *di* $y(t)$ *è uguale all'ascomportamento nel continuo in* $+\infty$ *di* $z(t)$, e si scriverà anche:

$$y(t) \underset{+\infty}{\overset{t}{=}} z(t), \tag{3.2.1$'$}$$

oppure

$$y(t) - z(t) \underset{+\infty}{\overset{t}{=}} 0. \tag{3.2.1$''$}$$

La (3.2.1)′ si dirà un'*aseguaglianza nel continuo in* $+\infty$ e si leggerà $y(t)$ *aseguale nel continuo* t, *in* $+\infty$, *a* $z(t)$.

---

(1) Il modo di individuare verrà precisato fra poco, appena sarà fissato il particolare modo della t di tendere crescendo verso $+\infty$.

(2) Su questo vocabolo « asconfronto », con il prefisso « as », si veda l'inizio del n. **1.2**.

2°) Se

$$\lim_{t \to +\infty} [y(t) - z(t)] \qquad \text{esiste non nullo, o non esiste}, \tag{3.2.2}$$

si dirà che *l'ascomportamento nel continuo in* $+\infty$ *di* $y(t)$ *è diseguale dall'ascomportamento nel continuo in* $+\infty$ *di* $z(t)$, e si scriverà:

$$y(t) \underset{+\infty}{\overset{t}{\neq}} z(t), \tag{3.2.2)'$$

oppure

$$y(t) - z(t) \underset{+\infty}{\overset{t}{\neq}} 0. \tag{3.2.2)''$$

La (3.2.2)' si dirà un'*asdiseguaglianza nel continuo in* $+\infty$ e si leggerà $y(t)$ *asdiseguale, nel continuo* t, *in* $+\infty$, *da* $z(t)$ (³).

Osservazione 1. *Due funzioni di* $\mathscr{K}_{+\infty}$ *quando sono aseguali nel continuo in* $+\infty$ *hanno lo stesso «intervallo dei valori di accumulazione in* $+\infty$*»; però, non è vera sempre l'affermazione inversa.* L'affermazione diretta discende facilmente dal n. **2.1** e dalla (3.2.1). Circa l'affermazione inversa, basta questo esempio: le due funzioni $\operatorname{sen} t$ e $-\operatorname{sen} t$ hanno lo stesso intervallo dei valori di accumulazione in $+\infty$, dato da $(-1 \ldots +1)$ [cfr. n. **2.1**, 5°)], ma evidentemente non sono aseguali nel continuo in $+\infty$.

Osservazione 2. *Quando vale la* (3.2.2), *e più precisamente risulta*

$$\lim_{t \to +\infty} [y(t) - z(t)] = \lambda \neq 0, \tag{3.2.3}$$

si ha manifestamente

$$y(t) \underset{+\infty}{\overset{t}{=}} z(t) + \lambda \tag{3.2.3)'$$

oppure

$$y(t) - \lambda \underset{+\infty}{\overset{t}{=}} z(t), \tag{3.2.3)''$$

cioè: $y(t)$ *è aseguale nel continuo* t, *in* $+\infty$, *a* $z(t) + \lambda$ [*ossia*, $y(t) - \lambda$ *è aseguale nel continuo* t, *in* $+\infty$, *a* $z(t)$].

3.3. - Asconfronti nel discreto in $+\infty$.

Definizione 12. Siano $y(t)$ e $z(t)$ due funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$. Il comportamento limite della differenza $y(t) - z(t)$, quando t varia con discontinuità assumendo via via

(³) Quando si ha una «asdiseguaglianza», può accadere che se ne possa precisare il verso: allora, è possibile introdurre le nozioni di *asminore in* $+\infty$ e di *asmaggiore in* $+\infty$ (od anche di *asminore-uguale in* $+\infty$ e di *asmaggiore-uguale in* $+\infty$).

soltanto i valori di una determinata successione $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ crescente e tendente verso $+\infty$ [cfr. n. **2.2**, II)], individua ciò che si dirà

un asconfronto nel discreto in $+\infty$ fra $y(t)$ e $z(t)$,

e precisamente

l'asconfronto nel discreto $t_{\nu(=0,1,2\ldots)}$ *in* $+\infty$ fra $y(t)$ e $z(t)$.

Ogni tale tipo di asconfronto può essere soltanto di due specie:

1°) Se

$$\lim_{\nu\to+\infty} [y(t_\nu) - z(t_\nu)] = 0\,, \tag{3.3.1}$$

si dirà che *l'ascomportamento nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ *di* $y(t)$ *è uguale all'ascomportamento nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ *di* $z(t)$, e si scriverà anche:

$$y(t) \overset{t_\nu}{\underset{+\infty}{=\!=}} z(t)\,, \tag{3.3.1$'$}$$

oppure

$$y(t) - z(t) \overset{t_\nu}{\underset{+\infty}{=\!=}} 0\,. \tag{3.3.1$''$}$$

La (3.3.1)$'$ si dirà un'*aseguaglianza nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ fra $y(t)$ e $z(t)$, e si leggerà $y(t)$ *aseguale nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ *a* $z(t)$.

2°) Se

$$\lim_{\nu\to+\infty} [y(t_\nu) - z(t_\nu)] \quad \text{esiste non nullo, o non esiste}\,, \tag{3.3.2}$$

si dirà che *l'ascomportamento nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ *di* $y(t)$ *è diseguale dall'ascomportamento nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ *di* $z(t)$, e si scriverà

$$y(t) \overset{t_\nu}{\underset{+\infty}{\neq}} z(t) \tag{3.3.2$'$}$$

oppure

$$y(t) - z(t) \overset{t_\nu}{\underset{+\infty}{\neq}} 0. \tag{3.3.2$''$}$$

La (3.3.2)$'$ si dirà un'*asdiseguaglianza nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ e si leggerà $y(t)$ *asdiseguale nel discreto* $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ *in* $+\infty$ *da* $z(t)$. (4)

3.4. - Asconfronti liberi e a passo iterato, in $+\infty$.

Definizione 13. Siano $y(t)$ e $z(t)$ due funzioni di $\mathscr{K}_{+\infty}$, τ un numero maggiore di zero e ν la variabile intera non negativa; indi consideriamo le funzioni $y(t)$ e $z(t)$ a passo τ iterato (cfr. n. **2.6**, Def. 6), cioè $y(t+\nu\tau)$ e $z(t+\nu\tau)$. Il comportamento limite della differenza $y(t+\nu\tau) - z(t+\nu\tau)$ quando $\nu \to +\infty$ (la t restando generica) individua ciò che si dirà

l'asconfronto libero e a passo τ *iterato, in* $+\infty$, fra $y(t)$ e $z(t)$.

---

(4) Anche per queste «asdiseguaglianze» vale un'osservazione analoga a quella fatta nella precedente annotazione (3).

Tale tipo di asconfronto può essere soltanto di due specie:

1°) Se

(3.4.1) $$\lim_{\nu \to +\infty} [y(t+\nu\tau) - z(t+\nu\tau)] = 0, \qquad t \in (-\infty \dots +\infty)$$ (5)

[e affinchè ciò si verifichi è sufficiente che la relazione limite valga in un intervallo $t_0 \leqslant t < t_0 + \tau$ (di lunghezza τ) (cfr. n. **2.6**, 5°))], si dirà che *l'ascomportamento libero e a passo τ iterato, in $+\infty$, di $y(t)$ è uguale all'ascomportamento libero e a passo τ iterato, in $+\infty$, di $z(t)$*, e si scriverà anche:

(3.4.1)′ $$y(t+\nu\tau) \overset{\nu}{\underset{+\infty}{=}} z(t+\nu\tau), \qquad t \in (-\infty \dots +\infty),$$

oppure

$$y(t+\nu\tau) - z(t+\nu\tau) \overset{\nu}{\underset{+\infty}{=}} 0, \qquad t \in (-\infty \dots +\infty).$$

La (3.4.1)′ si dirà un'*aseguaglianza libera e a passo τ iterato, in $+\infty$.*

2°) Se

(3.4.2) $$\lim_{\nu \to +\infty} [y(t+\nu\tau) - z(t+\nu\tau)]_{t > -\infty} \quad \text{esiste non nullo, o non esiste,}$$

si dirà che *l'ascomportamento libero e a passo τ iterato, in $+\infty$, di $y(t)$ è diseguale dall'ascomportamento libero e a passo τ iterato, in $+\infty$, di $z(t)$*, e si scriverà

(3.4.2)′ $$y(t+\nu\tau) \overset{\nu}{\underset{+\infty}{\neq}} z(t+\nu\tau), \qquad t \in (-\infty \dots +\infty),$$

oppure

$$y(t+\nu\tau) - z(t+\nu\tau) \overset{\nu}{\underset{+\infty}{\neq}} 0, \qquad t \in (-\infty \dots +\infty).$$

La (3.4.2)′ si dirà un'*asdiseguaglianza libera e a passo τ iterato, in $+\infty$.* (6)

Osservazione 3. *Quando vale la* (3.4.2), *e più precisamente risulta*

(3.4.3) $$\lim_{\nu \to +\infty} [y(t+\nu\tau) - z(t+\nu\tau)] = \Lambda(t;\tau) \not\equiv 0, \qquad t \in (-\infty \dots +\infty),$$

si ha evidentemente

(3.4.3)′ $$y(t+\nu\tau) \overset{\nu}{\underset{+\infty}{=}} z(t+\nu\tau) + \Lambda(t;\tau), \qquad t \in (-\infty \dots +\infty),$$

oppure

(3.4.3)″ $$y(t+\nu\tau) - \Lambda(t;\tau) \overset{\nu}{\underset{+\infty}{=}} z(t+\nu\tau), \qquad t \in (-\infty \dots +\infty).$$

---

(5) Affinchè nel primo membro di (3.4.1) la differenza considerata risulti sempre definita, basterà che la variabile ν (nel tendere a $+\infty$) parta da valori sufficientemente grandi in corrispondenza ai vari t.

(6) Anche qui vale un'osservazione analoga a quella fatta nella precedente annotazione (3).

3.5. - Alcune generalità su le aseguaglianze in $+\infty$.

1°) In ogni aseguaglianza in $+\infty$ va distinto (come per le comuni eguaglianze) un « primo membro » e un « secondo membro ».

Inoltre, per le aseguaglianze in $+\infty$ va considerata la nozione di *variabile dell'aseguaglianza*, data semplicemente da quella variabile il cui tendere verso $+\infty$ porta ad affermare l'aseguaglianza stessa.

2°) Per le aseguaglianze in $+\infty$ valgono le ben note proprietà *riflessiva*, *commutativa* e *transitiva* delle comuni eguaglianze, e valgono tutte le varie trasformazioni delle comuni eguaglianze.

3°) Per le aseguaglianze in $+\infty$ valgono inoltre le seguenti proprietà:

Se in un'aseguaglianza in $+\infty$ ai due membri o a un solo membro si aggiungono o si tolgono delle funzioni, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, infinitesime quando la variabile dell'asegualianza tende a $+\infty$, si ottiene una nuova aseguaglianza in $+\infty$.

Se in un'aseguaglianza in $+\infty$ i due membri o un solo membro si moltiplicano per funzioni, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, convergenti ad 1 quando la variabile dell'aseguaglianza tende a $+\infty$, si ottiene una nuova aseguaglianza in $+\infty$.

Pertanto, le trasformazioni possibili per le aseguaglianze (in $+\infty$) sono assai più vaste delle trasformazioni per le comuni eguaglianze.

§ 4. - Asperiodicità in $+\infty$.

4.1. - Un problema preliminare.

Ad ogni prefissata funzione $p(t)$, della classe $\mathscr{K}_{+\infty}$, corrisponde sempre in $\mathscr{K}_{+\infty}$ un determinato pennello di infinite funzioni $y(t)$ tali che sia [cfr. n. **3.5**, 3°)]

$$\lim_{t\to+\infty}[y(t)-p(t)]=0\,, \tag{4.1.1}$$

ossia tali che valga l'aseguaglianza [cfr. n. **3.2**, Def. 11, 1°)]

$$y(t)\underset{+\infty}{\overset{t}{=}}p(t)\,. \tag{4.1.1$'$}$$

Supposto, ora, che $p(t)$ sia una funzione periodica, determinare una proprietà che non contenga la $p(t)$, e che sia verificata da tutte e sole le infinite funzioni $y(t)$ del nominato pennello.

Risoluzione. Sia τ un periodo, maggiore di zero, della $p(t)$. La (4.1.1) ci dice che, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, esiste per la variabile t un valore t_ε tale che sia

$$|y(t)-p(t)|<\varepsilon/2 \qquad \text{per } t>t_\varepsilon\,; \tag{4.1.2}$$

se poi in (4.1.2) la t si muta in $t + m\tau$ ($m = 1, 2, \ldots$), si ottiene

(4.1.2)′ $\quad |y(t + m\tau) - p(t)| < \varepsilon/2$ per $t + m\tau > t_\varepsilon$ e quindi anche per $t > t_\varepsilon$.

È facile, ora, eliminare $p(t)$ fra (4.1.2) e (4.1.2)′: invero, sommando queste due diseguaglianze si ha

$$|y(t + m\tau) - p(t)| + |p(t) - y(t)| < \varepsilon \qquad \text{per } t > t_\varepsilon ,$$

da cui, per una nota proprietà sui valori assoluti,

(4.1.3) $$|y(t + m\tau) - y(t)| < \varepsilon \qquad (t > t_\varepsilon;\ m = 1, 2, \ldots) ,$$

ossia, poichè t_ε non dipende da m, concludiamo:

(4.1.3)′ $$\lim_{t \to +\infty} [y(t + m\tau) - y(t)]_{m=1,2,\ldots} = 0 , \quad \textit{uniformemente rispetto ad } m ,$$

vale a dire valgono le infinite aseguaglianze

(4.1.3)″ $$y(t + m\tau) \underset{+\infty}{\overset{t}{=}} y(t) \quad (m = 1, 2, \ldots) , \ \textit{uniformemente rispetto ad } m. \ (^1)$$

La (4.1.3)′, o la (4.1.3)″, dà la proprietà richiesta dal nostro problema.

[Si vedrà (cfr. Teor. 4 e Teor. 5 del n. **1.5**) che, inversamente, *se una funzione* $y(t)$, *di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *soddisfa alla* (4.1.3)′, *esiste sempre in* $\mathscr{K}_{+\infty}$ *una determinata funzione periodica* $p(t)$ (*di periodo* τ) *tale che per la detta* $y(t)$ *valga proprio la* (4.1.1).]

4.2. - Asperiodicità nel continuo in $+\infty$.

Tenendo presente la precedente relazione limite (4.1.3)′ poniamo la seguente

Definizione 14. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, e τ un numero maggiore di zero. Si dirà che

$y(t)$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ (²),

(¹) Si noti che da $y(t+\tau) \underset{+\infty}{\overset{t}{=}} y(t)$ segue, usando la proprietà transitiva [cfr. n. **3.5**, 2°)], che è pure $y(t + m\tau) \underset{+\infty}{\overset{t}{=}} y(t)$ ($m = 2, 3, \ldots$), ma non può senz'altro conseguire la sopra affermata tendenza uniforme rispetto ad m.

(²) Sui vocaboli « asperiodica » e « asperiodo » (con il prefisso « as ») si confronti l'inizio del n. **1.2**.

se si ha

$$\lim_{t\to+\infty}[y(t+m\tau)-y(t)]_{m=1,2,\ldots}=0\ ,\ \textit{uniformemente rispetto ad } m\,. \tag{4.2.1}$$

[Da (4.2.1) segue, poi, che anche tutti i numeri positivi $2\tau, 3\tau, \ldots$ sono asperiodi di $y(t)$.]

Abbiamo subito le affermazioni seguenti:

1°) *Ogni funzione periodica, di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *è pure asperiodica nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodi positivi tutti e soli i periodi positivi della funzione stessa.* Ne segue: *Se una funzione asperiodica nel continuo in* $+\infty$ *si trova essere periodica, i suoi periodi positivi sono tutti e soli gli asperiodi positivi.*

2°) *Ogni funzione, di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *convergente nel continuo in* $+\infty$ [cfr. n. **2.4**, Def. 4, 1°)] *è asperiodica nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodi positivi ogni numero positivo.*

3°) *Le infinite funzioni* $y(t)$, *di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *aseguali nel continuo in* $+\infty$ *ad una stessa funzione, di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *periodica di periodo* τ (>0), *sono tutte asperiodiche nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodo* τ. Ciò discende dalla risoluzione del Problema considerato nel n. **4.1**.

Osservazione 1. Sappiamo che le funzioni periodiche si possono suddividere in due categorie: α) «le funzioni periodiche costanti» date dalle costanti, per le quali ogni numero maggiore di zero è periodo (onde, ciascuna di tali funzioni non ha un periodo positivo minimo); β) «le funzioni periodiche oscillanti» per ciascuna delle quali avviene che, a motivo della sua oscillarietà, esiste necessariamente un periodo positivo minimo. — Parallelamente (includendo anche la suddivisione ora richiamata) si ha che *le funzioni asperiodiche nel continuo in* $+\infty$ *si possono suddividere in due categorie*:

α') «*le funzioni asperiodiche nel continuo in* $+\infty$ *e convergenti nel continuo in* $+\infty$» [cfr. n. **2.4**, Def. 4, 1°)] *per le quali ogni numero maggiore di zero è asperiodo* (*onde, ciascuna di tali funzioni non ha un asperiodo positivo minimo*);

β') «*le funzioni asperiodiche nel continuo in* $+\infty$ *e oscillanti nel continuo in* $+\infty$» [cfr. n. **2.4**, Def. 4, 2°)] *per ciascuna delle quali avviene che, a motivo della sua oscillatorietà, esiste necessariamente un asperiodo positivo minimo.*

Proprietà di equivalenza. *Sia* $y(t)$ *una funzione, di* $\mathscr{K}_{+\infty}$, *asperiodica nel continuo in* $+\infty$, *di asperiodo* τ (>0), *cioè tale che sia* (cfr. n. **4.2**, Def. 14):

$$\lim_{t\to+\infty}[y(t+m\tau)-y(t)]_{m=1,2,\ldots}=0\,, \qquad \textit{uniformemente rispetto ad } m\,. \tag{4.2.1}$$

Questa relazione limite nel continuo *equivale alla seguente relazione limite nel* discreto *(essendo* $\nu=0,1,2,\ldots$*):*

$$\left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{\nu\to+\infty}[y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)]=0 \\ \textit{uniformemente} \left\{\begin{array}{l}\textit{sia rispetto a } t\in(-T\ldots+\infty)\ (T>0 \textit{ e grande a piacere})\\ \textit{sia rispetto ad } m\ (=1,2,\ldots)\,.\end{array}\right.\end{array}\right. \tag{4.2.2}$$

Dimostrazione. 1°) Si ha: (4.2.1) $\Rightarrow$ (4.2.2). Invero, la (4.2.1) ci dice che, preso ad arbitrio un $\varepsilon>0$, esiste per t un valore t_ε, indipendente da m, tale che sia

$$|y(t+m\tau)-y(t)|<\varepsilon \qquad (t>t_\varepsilon;\ m=1,2,\ldots)\,, \tag{4.2.1$'$}$$

da cui, cambiando t in $t+\nu\tau$ $(\nu=0,1,2,\ldots)$,

$$\left\{\begin{array}{l}|y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)|<\varepsilon\\[2mm] (t>t_\varepsilon-\nu\tau;\ \nu=0,1,2,\ldots;\ m=1,2,\ldots)\,.\end{array}\right. \tag{4.2.1$''$}$$

Osservando, ora, che $t_\varepsilon-\nu\tau\to-\infty$ quando $\nu\to+\infty$, abbiamo: preso ad arbitrio un numero negativo $-T$ (con T positivo grande a piacere), esiste un intero positivo $\nu_{\varepsilon,T}$ (indipendente da t e da m) tale che

$$t_\varepsilon-\nu\tau<-T \qquad \text{per } \nu>\nu_{\varepsilon,T}\,.$$

Pertanto, dalla (4.2.1)$''$ segue: presi ad arbitrio un $\varepsilon>0$ e un T (grande a piacere), esiste un intero positivo $\nu_{\varepsilon,T}$ (indipendente da t e da m) tale che si abbia

$$\left\{\begin{array}{l}|y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)|<\varepsilon\\[2mm] (t\geqslant-T,\ \nu>\nu_{\varepsilon,T};\ m=1,2,\ldots)\,,\end{array}\right. \tag{4.2.3}$$

cioè proprio quanto afferma la (4.2.2).

2°) Si ha: (4.2.2) $\Rightarrow$ (4.2.1). Invero, la (4.2.2) equivale alla (4.2.3); se poi in (4.2.3) si pone $t+\nu\tau=t'$, abbiamo

$$|y(t'+m\tau)-y(t')|<\varepsilon \qquad (t'\geqslant -T+\nu\tau,\ \ \nu>\nu_{\varepsilon,T};\ \ m=1,2,\ldots)\,,$$

la quale, se fissiamo per ν il valore particolare $\nu_{\varepsilon,T}+1$ e poniamo $-T+$ $+(\nu_{\varepsilon,T}+1)\,\tau=t'_\varepsilon$, ci dà

$$|y(t'+m\tau)-y(t')|<\varepsilon \qquad (t'>t'_\varepsilon;\ \ m=1,2,\ldots)\,.$$

Questa conclusione non è altro che la (4.2.1)', cioè la (4.2.1) da ottenere.

3°) L'equivalenza fra (4.2.1) e (4.2.2) è dunque provata.

Osservazione 2. Poichè la (4.2.2) e esattamente la (2.8.5)', la precedente Proprietà d'equivalenza si può così enunciare:

L'asperiodicità nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ (>0), per una funzione $y(t)$ di $\mathscr{K}_{+\infty}$, è necessaria e sufficiente affinchè la $y(t+\nu\tau)$ (essendo $\nu=$ $=0,1,2,\ldots$) quando $\nu\to+\infty$ uniformemente converga in ogni intervallo illimitato $-T\leqslant t<+\infty$ (con T positivo grande a piacere).

4.3. - Asperiodicità nel discreto in $+\infty$.

Definizione 15. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$ una successione crescente e tendente a $+\infty$, e τ un numero maggiore di zero. Si dirà che

$y(t)$ è asperiodica nel discreto $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$, in $+\infty$, di asperiodo τ,
se si ha:

$$\lim_{\nu\to+\infty}[y(t_\nu+m\tau)-y(t^\nu)]=0\,, \qquad \textit{uniformemente rispetto ad } m\ (=1,2,\ldots)\,. \tag{4.3.1}$$

[Da (4.3.1) segue, poi, che anche tutti i numeri positivi 2τ, 3τ, ... sono asperiodi di $y(t_\nu)$.]

Osservazione 3. Evidentemente, quando la $y(t)$ di $\mathscr{K}_{+\infty}$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$ di asperiodo τ (>0), è anche asperiodica su ogni discreto $t_{\nu(=0,1,2,\ldots)}$, in $+\infty$, di asperiodo τ. Invece, quando la $y(t)$ non è asperiodica nel continuo in $+\infty$, può benissimo avere delle asperiodicità nel discreto in $+\infty$, il che può essere di un certo interesse.

4.4. - Asperiodicità libere e a passo iterato in $+\infty$.

Definizione 16. Sia $y(t)$ una funzione di $\mathscr{K}_{+\infty}$, τ un numero maggiore di zero, e ν la variabile intera non negativa. Si dirà che

$y(t)$ è asperiodica libera e a passo τ iterato, in $+\infty$, di asperiodo τ,

se si ha (essendo $\nu = 0, 1, 2, \ldots$)

$$(4.4.1)\qquad \lim_{\nu\to+\infty}[y(t+(\nu+m)\tau)-y(t+\nu\tau)]=0\,,\quad \textit{uniformemente rispetto ad } m\ (=1,2,\ldots)\,.$$

[Da (4.4.1) segue, poi, che anche tutti i numeri positivi 2τ, 3τ, ... sono asperiodi del tipo di τ.]

Osservazione 4. Se se nella (4.4.1) si aggiunge che « la tendenza indicata è uniforme anche rispetto a $t \in (-T \ldots +\infty)$ (con $T > 0$ e grande a piacere) », si ottiene la (4.2.2), equivalente a (4.2.1), cioè si ottiene che la $y(t)$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ.

§ 5. - Dimostrazioni dei Teoremi del n. 1.5.

5.1. - Dimostrazione del Teorema 1.

Siano $p(t)$ e $q(t)$ due funzioni, di $\mathscr{K}_{+\infty}$, periodiche in un intorno di $+\infty$ (intorno che indicheremo con $J_{+\infty}$). Da

$$(5.1.1)\qquad p(t)-q(t)=0\,,\qquad t\in J_{+\infty}\,,$$

segue evidentemente

$$(5.1.2)\qquad \lim_{t\to+\infty}[p(t)-q(t)]=0\,,$$

cioè

$$(5.1.2)'\qquad p(t)\overset{t}{\underset{+\infty}{=}}q(t)\,.$$

È pure vera l'affermazione *inversa*. Invero, detto τ un periodo maggiore di zero di $p(t)$, da (5.1.2)$'$ segue

$$p(t+m\tau)\overset{t}{\underset{+\infty}{=}}q(t+m\tau),\ \text{uniformemente rispetto a } m=1,2,\ldots,\ ^{(1)}$$

---

(1) Infatti, la (5.12)$'$ ci dice che, preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$, esiste per t un valore t_ε tale che sia $|p(t)-q(t)| < \varepsilon$ per $t > t_\varepsilon$, da cui

$$|p(t+m\tau)-q(t+m\tau)| < \varepsilon \text{ per } t+m\tau > t_\varepsilon \text{ e quindi anche per } t > t_\varepsilon\,.$$

dalla quale, sottraendo la (5.1.2)$'$, si ha

$$p(t+m\tau)-p(t) \overset{t}{\underset{+\infty}{=}} q(t+m\tau)-q(t)\,, \quad \text{uniformemente rispetto a } m=1,2,\ldots,$$

ossia [per essere $p(t+m\tau)-p(t)=0$]

$$q(t+m\tau)-q(t) \overset{t}{\underset{+\infty}{=}} 0 \quad \text{uniformemente rispetto a } m=1,2,\ldots\,.$$

Questa aseguaglianza esprime (cfr. n. **4.2**, Def. 14) che $q(t)$ è asperiodica nel continuo in $+\infty$, di asperiodo τ (>0): pertanto [cfr. n. **4.2**, 1°)] τ è anche un periodo della funzione periodica $q(t)$. Quindi:

$$p(t+\nu\tau)-q(t+\nu\tau)=p(t)-q(t) \qquad (\nu=0,1,2,\ldots)\,. \tag{5.1.3}$$

Ora, da (5.1.2) segue, necessariamente,

$$\lim_{\nu\to+\infty}[p(t+\nu\tau)-q(t+\nu\tau)]=0, \qquad t\in J_{+\infty}\,;$$

d'altra parte da (5.1.3) segue che tale limite è anche $p(t)-q(t)$. Si ha quindi proprio la (5.1.1) da provare.

Il Teor. 1 è così dimostrato.

5.2. - Dimostrazione del Teorema 2.

Tale dimostrazione risulta già dal n. **2.6** [vedasi le conclusioni successive 3°), 4°) e 5°)]. Però non ci sembra inutile una dimostrazione alquanto diversa.

Si vede che $\lim\limits_{\nu\to+\infty} y(t+\nu\tau)$ è invariante per il cambiamento di t in $t+\tau$. Ciò, permette subito di concludere che l'ipotesi (1.5.1) porta all'affermazione 1°) del Teorema, ed anche all'affermazione 2°) di periodicità di periodo τ per la funzione limite $Y(t;\tau)$. Se poi è

$$\lim_{t\to+\infty} y(t)=\lambda\,, \quad \text{è pure} \quad \lim_{\nu\to+\infty} y(t+\nu\tau)=\lambda\,;$$

se, invece, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$ non esiste, necessariamente $Y(t;\tau)$ è funzione periodica sciollante. — Il Teor. 2 è così dimostrato.

5.3. - Dimostrazione del Teorema 3.

Proviamo che le affermazioni (I) e (II) del Teor. 3 si equivalgono. Invero: se vale (I), ossia la (1.5.2), varrà necessariamente la (2.8.4)$'$, cioè la (4.4.1), che è esattamente l'affermazione (II); viceversa, se vale (II), ossia (4.4.1), che è esattamente la (2.8.4)$'$, varrà la (1.5.2), cioè (I).

Proviamo che le affermazioni (I) e (III) del Teor. 3 si equivalgono. Invero: se vale (I), ossia (1.5.2), tale (1.5.2) si può scrivere

$$\lim_{\nu\to+\infty} [y(t+\nu\tau) - Y(t+\nu\tau;\,\tau)] = 0\,, \tag{5.3.1}$$

la quale esprime proprio l'affermazione (III) da concludere [cfr. n. **3.4**, Definizione 13, 1°)]; viceversa, se vale (III), cioè la (5.3.1), per la periodicità di $Y(t;\,\tau)$, di periodo τ, si ha (I).

Ciò basta per concludere che il Teor. 3 è dimostrato.

5.4. - Dimostrazione del Teorema 4.

Le affermazioni (α) e $(\alpha)'$ del Teor. 4 sono equivalenti in virtù del legame fra la definizione di uniforme convergenza di una successione di funzioni e la definizione di funzione d'accumulazione unica di una tale successione.

Le affermazioni (α) e (β) del Teor. 4 sono pure equivalenti. Invero: se vale (α), varrà necessariamente la (2.8.5)$'$, coincidente con la (4.2.2), che equivale alla (4.2.1) ossia all'affermazione (β); inversamente, se vale (β), cioè la (4.2.1) varrà l'equivalente (4.2.2) coincidente con la (2.8.5)$'$, la quale è sufficiente per l'affermazione (α) (cfr. n. **4.2**, Osserv. 2).

Le affermazioni (α) e (γ) del Teor. 4 sono equivalenti. Invero: 1°) Se vale (α), cioè la (2.8.3), in quanto $Y(t;\,\tau)$ è periodica di periodo τ si ha anche

$$|y(t+\nu\tau) - Y(t+\nu\tau;\,\tau)| < \varepsilon \qquad (t \geqslant -T,\;\; \nu > \nu_{\varepsilon,T})\,,$$

da cui (ponendo $t+\nu\tau = t'$)

$$|y(t') - Y(t';\,\tau| < \varepsilon \qquad (t' \geqslant -T+\nu\tau,\;\; \nu > \nu_{\varepsilon,T})\,.$$

Qui, fissando per ν il valore particolare $\nu_{\varepsilon,T}+1$ e ponendo brevemente $-T+$ $+(\nu_{\varepsilon,T}+1)\,\tau = t'_\varepsilon$, s'ottiene

$$|y(t') - Y(t';\,\tau)| < \varepsilon \qquad (t' > t'_\varepsilon)\,,$$

conclusione esprimente proprio l'affermazione (γ). 2°) Inversamente, se vale (γ), la risoluzione del Problema del n. **4.1** ci fa concludere con (4.1.3)$'$, ossia con (β), dalla quale abbiamo già visto che segue (α).

Ciò basta per concludere che il Teor. 4 è dimostrato.

5.5. - Dimostrazione del Teorema 5.

Sappiamo già che la funzione (reale e univoca) $Y(t; \tau)$ è limitata [cfr. Teor. 2, 2°)], ora, se supponiamo che valga l'affermazione (α) del Teor. 4, abbiamo subito, per un noto teorema, che la $Y(t; \tau)$ è anche continua, onde vale la affermazione 1°) del Teor. 5.

Dato, poi, che le affermazioni (α) e (γ) del Teor. 4 sono equivalenti, valendo (α) vale anche (γ), cioè $y(t)$ e $Y(t; \tau)$ sono aseguali nel continuo in $+\infty$, ed allora per la Osserv. 1 del n. **3.2** resta conclusa l'affermazione 2°) del Teor. 5.

Il Teor. 5 è così dimostrato.

Riferimenti.

[1] S. Pincherle e U. Amaldi, *Le operazioni distributive e le loro applicazioni all'Analisi*, N. Zanichelli, Bologna 1901.

[2] G. Sansone e R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese, Roma 1956.

[3] L. Cesari, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin 1963.

[4] W. Hahn, *Stability of motion*, Springer, Berlin 1967.

[5] B. Manfredi, *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazione periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 149-159.

Riassunto.

Let us depart (§ **1**) *from the class* $\mathscr{K}_{+\infty}$ *of all, and only, the real, one-to-one, bounded and continuous in the various* $+\infty$ *neighbourhoods functions.*

First of all (§ **2**), *for any* $\mathscr{K}_{+\infty}$ *function, we distinguish infinite types of asymptotic behaviours in* $+\infty$ (*briefly: asbehaviours in* $+\infty$), *which are classified in the following way: continuous asbehaviour in* $+\infty$, *discrete asbehaviours in* $+\infty$, *free and iterate-step asbehaviours in* $+\infty$.

Secondly (§ **3**), *for any couple of* $\mathscr{K}_{+\infty}$ *functions, we make an asymptotic comparison in* $+\infty$ (*briefly:* *a s c o m p a r i s o n* *in* $+\infty$) *of the correspondent asbehaviours in* $+\infty$, *and we can obtain either an* *a s e q u a l i t y* *in* $+\infty$ *or an* *a s u n e q u a l i t y* *in* $+\infty$. *We distinguish: the continuous ascomparison in* $+\infty$, *the discrete ascomparisons in* $+\infty$, *the free and interate-step ascomparisons in* $+\infty$.

Finally (§ **4**), *the usual notion of* « *a s p e r i o d i c i t y* *in* $+\infty$ » *is introduced. Since such a notion is expressed by an asequality in* $+\infty$, *infinite types of asperiodicity in* $+\infty$ *are obtained; precisely: continuous asperiodicity in* $+\infty$, *discrete asperiodicities in* $+\infty$, *free and iterate-step asperiodicities in* $+\infty$.

Hence arise the five theorems stated at the end of § **1**, *and proved by* § **5**. *Further results will be given by a subsequent work.*

* * *