Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 189-197

FRANCO TRICERRI (*)

Su alcune classi di connessioni sopra varietà quasi complesse. (**)

Premessa.

Nella presente Nota (1) definisco e studio le *connessioni* J_φ*-semisimmetriche* di una varietà M dotata di struttura quasi complessa J. Esse generalizzano le classiche connessioni semisimmetriche e le connessioni J-semisimmetriche introdotte da G. B. RIZZA in [7] (2), che si ottengono rispettivamente per $\varphi = 0,\ \pi/2$.

Sussistono per le connessioni J_φ-semisimmetriche il Teorema (2.1) ed il conseguente Corollario, già ottenuti da G. B. RIZZA in [7] nei casi $\varphi = 0,\ \pi/2$.

Vengono poi considerate le connessioni J_φ-semisimmetriche *a campo J parallelo*, cioè tali che il differenziale covariante di J sia nullo. Per queste vengono stabiliti il Teorema (2.2) che dà indicazioni sull'integrabilità della struttura quasi complessa e il Teorema di rappresentazione (2.3).

Il Teorema (2.4) caratterizza in diversi modi le connessioni simmetriche tra le connessioni J_φ-semisimmetriche e comprende risultati di V. MANGIONE in [4], relativi ai casi $\varphi = 0,\ \pi/2$ e concernenti le connessioni μ introdotte da E. MARTINELLI in [5] e le connessioni ϱ_+, ϱ_- introdotte da G. B. RIZZA in [6].

Infine nel n. 3 sono contenute alcune osservazioni circa le classi di connessioni costruibili su una varietà differenziabile M a partire da un *gruppo di automorfismi* G dell'F-modulo dei campi differenziabili di vettori contravarianti su M e da un *omomorfismo idempotente* Ω dell'F-modulo dei campi differenziabili dei tensori di tipo 1, 2 antisimmetrici nei due indici di covarianza.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Torino, Italia.
(**) Ricevuto: 22-VII-1971.
(1) La Nota riproduce la parte originale della mia Tesi di Laurea.
(2) I numeri in parentesi quadra rinviano alla Bibliografia.

Tali connessioni, dette *connessioni G-semisimmetriche* ed *Ω-connessioni*, generalizzano rispettivamente le connessioni J_φ-semisimmetriche e le connessioni μ, ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 di E. MARTINELLI e di G. B. RIZZA.

1. - Varietà quasi complesse.

Data una varietà M, quasi complessa di dimensione $2n$ (³), sia F l'algebra sul campo reale $\boldsymbol{R}$ delle funzioni a valori reali di classe C^∞ definite su M, e sia D_s^r l'F-modulo dei campi differenziabili di tensori r volte controvarianti ed s volte covarianti.

È utile ricordare che ogni elemento T di D_s^1 può essere pensato come applicazione F-multilineare

$$T\colon\ D^1 \dots D^1 \to D^1\,,$$

$$T\colon\ (X_1, \dots, X_s) \to T(X_1, \dots, X_s)\,,$$

dove $D^1 = D_0^1$ e $T(X_1, \dots, X_s)$ è il campo vettoriale che ad ogni 1-forma ω associa la funzione $T(\omega, X_1, \dots, X_s)$.

Con J viene poi indicato il campo tensoriale antiinvolutorio, elemento di D_1^1, che definisce la *struttura quasi complessa di M*. La *torsione* della struttura quasi complessa di M è il campo tensoriale N, elemento di D_2^1, definito da:

$$N(X, Y) = (1/8)\,\{[J(X), J(Y)] - J([X, J(Y)] - J([J(X), Y]) - [X, Y]\}\,, \tag{1.1}$$

con X e Y appartenenti a D^1 e dove $[X, Y]$ è il campo vettoriale $XY - YX$ (⁴). Se $N = 0$ la struttura si dice *integrabile*: è allora possibile introdurre su M una struttura complessa, che induce la struttura quasi complessa J.

Ogni connessione lineare ∇ su M, ammette, come è noto, una decomposizione del tipo:

$$\nabla = \Gamma + T \tag{1.2}$$

dove Γ è una connessione lineare *simmetrica*, tale cioè che

$$\Gamma_X Y - \Gamma_Y X = [X, Y]\,, \qquad X, Y \in D^1, \tag{1.3}$$

e T è un campo tensoriale elemento di D_2^1, *antisimmetrico* nei due indici di cova-

(³) Per le nozioni generali sulle varietà quasi complesse si veda, per esempio, S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [3], II; S. HELGASON [2].

(⁴) Vedasi, per esempio, S. KOBAYASHI - K. NOMIZU [3], I, pag. 5.

rianza. La (1.2) va naturalmente interpretata come:

$$\nabla_X Y = \Gamma_X Y + T(X, Y)\,, \qquad X, Y \in D^1, \tag{1.4}$$

Γ e T sono rispettivamente dati da:

$$\Gamma_X Y = \tfrac{1}{2}(\nabla_X Y + \nabla_Y X + [X, Y])\,, \tag{1.5}$$

$$T(X, Y) = \tfrac{1}{2}(\nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y])\,. \tag{1.6}$$

Γ è detta *connessione simmetrica associata* e T *torsione* di ∇ (5).

Nel seguito vengono studiate alcune classi di connessioni lineari legate alla struttura quasi complessa J della varietà M. A tale scopo saranno utilizzati gli *omomorfismi* W, K, Q, r, s di D_2^1 in sè, dipendenti da J, introdotti e studiati da G. B. Rizza in [7], [8] e definiti da

$$(WT)(X, Y) = -J\big(T(X, J(Y))\big)\,, \tag{1.7}$$

$$4\,(KT)(X, Y) = T(X, Y) - J\big(T(Y, J(X))\big) - J\big(T(J(Y), X)\big) - T\big(J(X), J(Y)\big)\,, \tag{1.8}$$

$$4\,(QT)(X, Y) = T(X, Y) - J\big(T(X, J(Y))\big) - J\big(T(J(X), Y)\big) - T\big(J(X), J(Y)\big)\,, \tag{1.9}$$

$$2\,(rT)(X, Y) = (\varepsilon T)\big(X, J(Y)\big) + (\varepsilon T)\big(J(X), Y\big)\,, \tag{1.10}$$

$$2\,(sT)(X, Y) = (\sigma T)\big(X, J(Y)\big) + (\sigma T)\big(J(X), Y\big) - 2\,J\big((\sigma T)(X, Y)\big)\,, \tag{1.11}$$

dove $X, Y \in D^1$ e $T \in D_2^1$ e ε, σ sono, rispettivamente, l'omomorfismo di antisimmetrizzazione, di simmetrizzazione, indotti su D_2^1 dagli analoghi omomorfismi di D_2^0.

Gli omomorfismi W, K, Q godono di molte proprietà formali, utili nel seguito (6).

2. - Connessioni J_φ - semisimmetriche.

L'esistenza su una varietà quasi complessa M del campo tensoriale J permette di definire su M una nuova classe di connessioni lineari. Queste connes-

(5) Vedasi, per esempio, G. B. Rizza [7], pag. 236.

(6) G. B. Rizza [8], pag. 13-14.

sioni, che vengono chiamate J_φ*-semisimmetriche*, generalizzano le classiche connessioni semisimmetriche ($\varphi = 0$) e le connessioni J-semisimmetriche di G. B. Rizza ($\varphi = \pi/2$).

Si considerino anzitutto in D^1 gli *automorfismi* (7)

$$J_\varphi = I \cos\varphi + J \sin\varphi\,, \qquad \varphi \in \boldsymbol{R}\,, \tag{2.1}$$

dove I è l'identità di D^1. L'insieme $\{J_\varphi\}_{\varphi\in\boldsymbol{R}}$ costituisce un *gruppo commutativo* rispetto all'ordinaria composizione di applicazioni; infatti

$$J_\varphi\big(J_\psi(X)\big) = J_\psi\big(J_\varphi(X)\big) = J_{\varphi+\psi}(X)\,, \qquad \varphi, \psi \in \boldsymbol{R}: \tag{2.2}$$

L'automorfismo J_φ ($\varphi \in \boldsymbol{R}$) induce a sua volta un automorfismo su D^1_2 (ed in generale su D^1_s), denotato ancora con J_φ e definito da

$$J_\varphi(T)(X, Y) = J_\varphi\big(T(X, Y)\big)\,, \qquad X, Y \in D^1;\; T \in D^1_2\,. \tag{2.3}$$

Conviene ricordare che le connessioni semisimmetriche su M sono caratterizzate da una torsione del tipo $\varepsilon(\omega \otimes I)$ con ω arbitraria 1-forma. Ciò premesso, si diranno *connessioni* J_φ*-semisimmetriche* le connessioni lineari la cui torsione è data da

$$T = J_\varphi\big(\varepsilon(\omega \otimes I)\big)\,. \tag{2.4}$$

Poichè

$$T(X, Y) = J_\varphi\big(\varepsilon(\omega \otimes I)\big)(X, Y) = \tfrac{1}{2}\{\omega(X)\,J_\varphi(Y) - \omega(Y)\,J_\varphi(X)\}\,,$$

la (2.4) diviene

$$T = \varepsilon(\omega \otimes J_\varphi)\,. \tag{2.5}$$

Per le connessioni J_φ-semisimmetriche sussistono alcune proprietà.

Conviene anzitutto osservare che, in virtù delle (1.8), (1.9), J_φ commuta con K e con Q. Un primo risultato è questo.

Teorema (2.1). *Per ogni connessione* J_φ*-semisimmetrica è sempre* $K(T)=0$, *essendo* T *la torsione della connessione e* K *l'omomorfismo definito dalla* (1.8).

(7) G. B. Rizza [7], pag. 235.

Il Teorema è stato stabilito da G. B. RIZZA per le connessioni semisimmetriche e per le connessioni J-semisimmetriche (casi $\varphi=0$, $\pi/2$) ([8]) e tenuta presente la (2.1) riesce vero in generale in virtù della linearità di K.

Si consideri ora una connessione ∇ su M, e sia $\nabla_X J$ il differenziale covariante di J rispetto ad X. Conviene introdurre il campo tensoriale ∇J appartenente a D_2^1 e definito da

$$(\nabla J)(X, Y) = (\nabla_X J)(Y) . \tag{2.4}$$

Si considerino poi i campi tensoriali $R(\nabla)$, $S(\nabla)$ di D_2^1 introdotti da G. B. RIZZA in [7] e definiti da

$$2\, R(\nabla)(X, Y) = r(\nabla J)(X, Y) , \tag{2.5}$$

$$2\, S(\nabla)(X, Y) = s(\nabla J)(X, Y) . \tag{2.6}$$

Ciò premesso, poichè per ogni connessione lineare ∇ su una varietà a struttura quasi complessa risulta

$$R(\nabla) = N - K(T) , \tag{2.7}$$

essendo N la torsione della struttura e T la torsione della connessione ([9]), dal Teorema (2.1) segue il

Corollario. *Per ogni connessione J_φ-semisimmetrica si ha $R(\nabla) = N$.*

È noto poi che le connessioni a campo J parallelo su M, cioè con la proprietà $\nabla J = 0$, sono caratterizzate dalle condizioni

$$R(\nabla) = 0 , \qquad S(\nabla) = 0 . \quad ({}^{10}) \tag{2.8}$$

La prima di esse, in virtù della (2.7), diviene

$$K(T) = N . \tag{2.9}$$

Dunque se ∇ è una connessione J_φ-semisimmetrica, dal Teorema (2.1) segue $N = 0$. In conclusione:

([8]) G. B. RIZZA [7], pag. 250.
([9]) Vedasi, per esempio, V. MANGIONE [4], pag. 143.
([10]) V. MANGIONE [4], teor. T_3, pag. 148.

Teorema (2.2). *Una connessione J_φ-semisimmetrica a campo J parallelo può esistere solo su una varietà a struttura quasi complessa integrabile.*

Conviene ricordare ora che G. B. RIZZA, utilizzando le (2.8), ha dato un teorema generale di rappresentazione per le connessioni a campo J parallelo (11).

In particolare, risulta:

Teorema (2.3). *Se M è una varietà a struttura quasi complessa integrabile le connessioni J_φ-semisimmetriche a campo J parallelo sono, tutte e sole, date da*

$$\nabla = \Gamma + S(\Gamma) + \sigma W(T) + K(\Sigma) + T \,, \tag{2.10}$$

dove Γ è un'arbitraria connessione simmetrica, Σ un arbitrario elemento di D_2^1, simmetrico nei due indici di covarianza e T è del tipo (2.5).

Mentre il Teorema (2.2) esprime una condizione necessaria per l'esistenza di una connessione J_φ-semisimmetrica a campo J parallelo, il Teorema precedente esprime implicitamente una condizione sufficiente, riconducendo l'esistenza di una connessione J_φ-semisimmetrica all'esistenza di Γ, Σ ed ω.

Il Teorema (2.3) si stabilisce senza difficoltà a partire dal risultato generale, sopra accennato, osservando che, nel caso attuale, $N = 0$ onde T è necessariamente dalla forma $E - K(E)$ con E elemento antisimmetrico di D_2^1. In virtù delle proprietà formali, di cui alla fine del n. **1**, si ha poi $\sigma W(E) = \sigma W(T)$, e così si perviene alla (2.10).

Su una varietà quasi complessa sono state introdotte da E. MARTINELLI in **[5]** e da G. B. RIZZA in [7] quattro classi di connessioni denotate rispettivamente con μ, ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0. Successivamente G. B. RIZZA ha dato per le connessioni di queste classi dei teoremi di rappresentazione (12), utilizzando i quali si stabilisce il seguente

Teorema (2.4). *Una connessione J_φ-semisimmetrica, che sia anche rispettivamente una connessione μ, ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0, è necessariamente una connessione simmetrica.*

Il Teorema è già noto per $\varphi = 0$, $\pi/2$ e con riferimento alle connessioni μ, ϱ_+, ϱ_- (13).

Come è noto le connessioni ϱ_+, ϱ_- sono particolari connessioni μ; è sufficiente provare quindi il Teorema per le connessioni μ e ϱ_0.

---

(11) G. B. RIZZA [8], pag. 19.
(12) G. B. RIZZA [8], pag. 7.
(13) V. MANGIONE [4], pag. 150.

Conviene denotare con A_2^1 l'insieme dei campi tensoriali di D_2^1, *antisimmetrici* nei due indici di covarianza. Ciò premesso, sia ∇ una connessione μ J_φ-semisimmetrica. Risulta

$$T = J_\varphi\big(\varepsilon(\omega \otimes I)\big) = K(E) + Q(E)\,,$$

dove E è un elemento di A_2^1. Applicando successivamente gli omomorfismi Q e K alla precedente relazione e tenute presenti le proprietà formali accennate al termine del n. **1** e il Teorema (2.1), si ottiene subito $Q(T) = Q(E)$, $K(E) = 0$, onde risulta $T = Q(T)$. Poichè J_φ commuta con Q ed è un isomorfismo, segue subito $\varepsilon(\omega \otimes I) = Q\big(\varepsilon(\omega \otimes I)\big)$. Dalla (1.9) discende

$$\varepsilon(\omega \otimes I)(X, Y) + \varepsilon(\omega \otimes I)\big(J(X), J(Y)\big) = 0\,,$$

con $X, Y \in D^1$ arbitrari. Posto infine $Y = JX$ si ha

$$\omega(X)\,J(X) = \omega\big(J(X)\big)\,X$$

e poichè in ogni punto p di M i campi X e $J(X)$ dànno luogo a vettori indipendenti, risulta, per ogni X, $\omega(X) = 0$ e si perviene immediatamente all'asserto.

Analogamente si procede nel caso ϱ_0, ricordando che le connessioni ϱ_0 hanno torsione $T = E - Q(E) - K(E)$.

3. - Connessioni G-semisimmetriche ed Ω-connessioni.

I metodi usati per costruire le connessioni J_φ-semisimmetriche, le connessioni μ, ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 possono essere generalizzati.

Sia infatti M una varietà differenziabile (non necessariamente quasi complessa) dotata di un *gruppo di automorfismi* G di D^1. Si chiamerà connessione *G-semisimmetrica* una connessione con torsione

$$T = g\big(\varepsilon(\omega \otimes I)\big)\,, \tag{3.1}$$

dove g è un elemento di G ed ω una 1-forma su M. Poichè g può pensarsi come elemento di D_1^1, può scriversi

$$T = \varepsilon(\omega \otimes g)\,. \tag{3.2}$$

Queste connessioni sono *G-invarianti*, nel senso che, se T è del tipo (3.1) per ogni $g' \in G$, $g'(T)$ è ancora la torsione di una connessione G-semisimmetrica.

Sia ora Ω un *omomorfismo idempotente* di A_2^1 in sè, cioè un omomorfismo idempotente di D_2^1 che commuti con ε.

Si dirà *Ω-connessione* ogni connessione lineare su M del tipo:

$$\nabla = \Gamma + \Omega(E)\,, \tag{3.3}$$

dove Γ è un'arbitraria connessione simmetrica ed E un arbitrario campo tensoriale di A_2^1. La classe delle Ω-connessioni si dirà G-invariante se per ogni $E \in A_2^1$ e per ogni $g \in G$, esiste un $E' \in A_2^1$ tale che risulti

$$\Omega(E') = g\big(\Omega(E)\big)\,. \tag{3.4}$$

Ciò premesso sussiste il

Teorema (3.1). *La classe delle Ω-connessioni è G-invariante se e solo se, per ogni $g \in G$, risulta*

$$g\,\Omega = \Omega\, g\, \Omega\,. \tag{3.5}$$

Un noto risultato generale sugli omomorfismi di un A-modulo ([14]), utilizzato ora per l'F-modulo A_2^1, assicura che l'equazione (3.4) nell'incognita E' ammette soluzione se e solo se risulta $g(\Omega(E)) = \Omega\big(g(\Omega(E))\big)$.

Poichè E è un elemento arbitrario di A_2^1, segue subito l'asserto.

Si noti che, in particolare, se Ω commuta con ogni $g \in G$, la condizione (3.5) è sempre verificata e quindi la classe delle Ω-connessioni riesce G-invariante. Questo è precisamente il caso delle connessioni μ, ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 assumendo come gruppo G il gruppo degli automorfismi J_φ.

Bibliografia.

[1] N. Bourbaki, *Algebre* 8, Hermann, Paris 1958.

[2] S. Helgason, *Differential geometry and symmetric spaces*, Academic Press, New York 1900.

[3] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Interscience, London 1963.

[4] V. Mangione, *Su alcune classi di connessioni su di una varietà quasi complessa*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **9** (1968), 139-153.

([14]) N. Bourbaki [1], pag. 7.

[5] E. Martinelli, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa,* C.I.M.E., Cremonese, Roma 1956.

[6] E. Martinelli, *Sulle varietà a struttura complessa,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **43** (1957), 313-324.

[7] G. B. Rizza, *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **68** (1965), 233-254.

[8] G. B. Rizza, *Teoremi di rappresentazione per alcune classi di connessioni su di una varietà quasi complessa,* Rend. Ist. Mat. Univ. Trieste (1) **1** (1969), 9-25.

Summary.

On an almost complex manifold M are defined the J_φ-semisymmetric connections that generalises the classic semisymmetric and J-semisymmetric connections, and these are specially studied in the case in wich the field J is parallel, and in relation with the μ, ϱ_+, ϱ_- and ϱ_0 connections.

Then we note some remarks about the methods to construct the preceding connections.

* * *