Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 97-117

MARCELLO CICCHESE e RAIMONDO VALENTINI (*)

Su vari tipi di distanze generalizzate. (**)

Introduzione.

Nel presente lavoro viene presa in considerazione la classe di tutti gli spazi topologici « metrizzabili in senso lato », tali cioè che in essi si possa introdurre una « distanza » soddisfacente alla sola condizione di essere compatibile, in un senso del tutto naturale, con la topologia esistente.

Dopo aver caratterizzato topologicamente la classe di tali spazi (n. 3), qui denominati *spazi* H, vengono esaminate alcune sottoclassi ottenute imponendo agli assiomi che individuano gli spazi H di essere espressi in modo « uniforme », cioè soltanto per mezzo di simboli relazionali (n. 4).

Degno di nota è il fatto che gli spazi H di tal tipo possono venire riguardati, in un senso ancora più stretto, come naturali generalizzazioni degli ordinari spazi metrici. Si dimostra infatti (n. 5) che in essi, in luogo dell'assioma triangolare, vale una proprietà del seguente tipo: se x, y, z sono punti dello spazio, si ha:

$$d(x, z) \leqslant f(d(x, y), d(y, z)) ,$$

dove f è una qualunque funzione di due variabili reali, soddisfacente a debolissime condizioni (1).

(*) Indirizzo degli Autori: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito, col contributo del C.N.R., nell'ambito del G.N.S.A.G.A. . — Ricevuto: 9-IX-1971.

(1) L'idea di una siffatta generalizzazione dell'assioma triangolare è contenuta, sia pure in forma ancora embrionale, nelle Tesi di laurea, frutto di un lavoro di gruppo, delle dottoresse MIRNA DAVOLI, LIA MONTI, GIANNA PIZZARELLI, laureatesi a Parma nell'anno 1968-1969.

Il seguito del lavoro consiste essenzialmente nello studio dei collegamenti tra le proprietà della funzione f e le proprietà topologiche dei corrispondenti spazi H.

In particolare, vengono date condizioni sufficienti affinchè uno spazio H sia uniformizzabile o metrizzabile (n. 8).

1. - Richiami e premesse.

Sia E un insieme, $P(E)$ l'insieme delle sue parti, $P(P(E))$ l'insieme delle parti di $P(E)$. Consideriamo un'applicazione

$$\mathcal{U}: E \to P(P(E)) . \tag{1.1}$$

Mediante la $\mathcal{U}$ è possibile definire un'applicazione

$$\mathcal{K}: P(E) \to P(E) \tag{1.2}$$

nel modo seguente: per ogni $X \subset E$,

$$\mathcal{K}(X) = \{x \in E: \forall\, U \in \mathcal{U}(x),\ U \cap X \neq \emptyset\} . \tag{1.3}$$

Vale la seguente

Proposizione 1.1. *L'applicazione $\mathcal{K}$ è una chiusura di Kuratowski per l'insieme E se, e solo se, l'applicazione $\mathcal{U}$ soddisfa alle seguenti condizioni: per ogni $x \in E$,*

$$(\mathrm{U}_1) \qquad \forall_{U \in \mathcal{U}(x)} \quad x \in U \ (^2);$$

$$(\mathrm{U}_2) \qquad \forall_{U \in \mathcal{U}(x)} \quad \forall_{V \in \mathcal{U}(x)} \quad \exists_{W \in \mathcal{U}(x)} \quad W \subset U \cap V ;$$

$$(\mathrm{U}_3) \qquad \forall_{U \in \mathcal{U}(x)} \quad \exists_{V \in \mathcal{U}(x)} \quad \forall_{y \in V} \quad \exists_{W \in \mathcal{U}(y)} \quad W \subset U .$$

Omettiamo la dimostrazione, essendo la Proposizione riconducibile a proprietà elementari degli spazi topologici. Facciamo notare infatti che le (U_1), (U_2), (U_3) costituiscono gli assiomi di un sistema fondamentale di intorni di un punto x di uno spazio topologico (cfr., per esempio, [2], p. 40).

---

(2) Porremo indifferentemente al di sotto o a lato dei quantificatori le variabili da quantificare, secondo le convenienze di scrittura.

Possiamo dunque esprimere il contenuto della Proposizione 1.1 dicendo che l'applicazione $\mathcal{K}$ è una chiusura di Kuratowski se e solo se l'applicazione $\mathcal{U}$ individua, per ogni $x \in E$, una famiglia $\mathcal{U}(x)$ soddisfacente agli assiomi dei sistemi fondamentali di intorni.

2. - Definizione di spazio *H*.

Nel seguito denoteremo con $\boldsymbol{R}_+$ l'insieme dei numeri reali non negativi e con $\boldsymbol{R}_+^*$ l'insieme dei numeri reali positivi.

Fissato un qualunque insieme E, consideriamo un'applicazione

$$d\colon\ E \times E \to \boldsymbol{R}_+ . \tag{2.1}$$

Per ogni $x \in E$ e per ogni numero (3) $\varepsilon > 0$ chiameremo *sferoide* di centro x e raggio ε, e lo denoteremo con $\sigma(x, \varepsilon)$, l'insieme così definito:

$$\sigma(x, \varepsilon) = \{y \in E\colon\ d(x, y) < \varepsilon\} .$$

Per ogni $x \in E$ e per ogni $Y \subset E$ poniamo inoltre:

$$d(x, Y) = \inf\{d(x, y)\}_{y \in Y} .$$

L'applicazione d individua un'applicazione $\mathcal{U}$ del tipo (1.1) quando si definisca, per ogni x di E,

$$\mathcal{U}(x) = \{\sigma(x, \varepsilon)\}_{\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+^*} .$$

L'applicazione $\mathcal{K}$ relativa ad $\mathcal{U}$, definita dalla (1.3), nel presente caso è tale che, per ogni $X \subset E$, si ha:

$$\mathcal{K}(X) = \{x \in E\colon\ d(x, X) = 0\} . \tag{2.2}$$

In virtù della Proposizione 1.1, l'applicazione $\mathcal{K}$ caratterizzata dalla (2.2) sarà una chiusura di Kuratowski se e solo se l'applicazione $\mathcal{U}$ soddisfa agli assiomi (U_1), (U_2), (U_3). Chiaramente, l'assioma (U_2) è sempre verificato. Quanto a (U_1) e (U_3), essi sono rispettivamente equivalenti ai seguenti assiomi:

$$(d_1) \qquad \forall_{x \in E} \quad d(x, x) = 0 ;$$

$$(d_2) \qquad \forall_{x \in E} \ \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\eta > 0} \ \forall_{y \in \sigma(x, \eta)} \ \exists_{\xi > 0} \quad \sigma(y, \xi) \subset \sigma(x, \varepsilon) .$$

---

(3) Resta sempre sottinteso, ogni volta che si parla di numeri, che si tratta di numeri reali.

Dalla Proposizione 1.1 discende quindi la seguente

Proposizione 2.1. *Un'applicazione d del tipo* (2.1) *individua nell'insieme E, mediante la* (2.2), *una chiusura di Kuratowski se e solo se valgono gli assiomi* (d_1), (d_2).

Denoteremo con (E, d) un insieme E in cui sia stata fissata un'applicazione d del tipo (2.1).

Diremo che d è una *distanza* in E se soddisfa a (d_1), (d_2).

Un insieme E in cui sia stata fissata una distanza d prende il nome di *spazio H*.

Sia E uno spazio topologico. Diremo che *E è uno spazio H* se la sua chiusura topologica è ottenibile, mediante la (2.2), da una distanza d.

3. - Alcune caratterizzazioni topologiche degli spazi H.

Proposizione 3.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio topologico E sia uno spazio H è che in esso valga il primo assioma di numerabilità.*

La condizione è evidentemente necessaria. Supponiamo allora che E soddisfi al primo assioma di numerabilità. Per ogni $x \in E$ esiste allora un sistema fondamentale di intorni numerabile, che denotiamo con

$$\mathfrak{U}(x) = \{U_x^n\}_{n \in N^*},$$

dove N^* è l'insieme dei numeri interi positivi. Da $\mathfrak{U}(x)$ possiamo ricavare un altro sistema fondamentale di intorni

$$\mathfrak{V}(x) = \{V_x^n\}_{n \in N^*}$$

ponendo, per ogni $n \in N^*$,

$$V_x^n = U_x^1 \cap U_x^2 \cap \dots \cap U_x^n .$$

$\mathfrak{V}(x)$ è chiaramente equivalente a $\mathfrak{U}(x)$, nel senso che individua la stessa topologia; ed inoltre è tale che, per ogni $n \in N^*$,

$$V_x^{n+1} \subset V_x^n . \tag{3.1}$$

Siano x, y due qualsiasi punti di E, e sia $A(x, y)$ il sottoinsieme di N^* così definito:

$$A(x, y) = \{m \in N^*: \; y \notin V_x^m\} .$$

Se $A(x, y) \neq \emptyset$, poniamo: $n = \min A(x, y)$. Possiamo allora definire un'applicazione $d\colon E \times E \to \boldsymbol{R}_+$ nel seguente modo:

$$A(x, y) = \emptyset \Rightarrow d(x, y) = 0 \ ,$$

$$A(x, y) \neq \emptyset \Rightarrow d(x, y) = 1/n \ .$$

Gli sferoidi relativi a d sono tali che, per ogni $n \in \boldsymbol{N}^*$,

$$1/(n+1) < \varepsilon \leqslant 1/n \Rightarrow \sigma(x, \varepsilon) = V_x^n \ ,$$

$$\varepsilon > 1 \Rightarrow \sigma(x, \varepsilon) = E \ .$$

Si osserva dunque che la famiglia degli sferoidi di centro x costituisce un sistema fondamentale di intorni equivalente a $\mathcal{V}(x)$. L'applicazione d è dunque una distanza e la topologia da essa individuata coincide con quella precedentemente fissata in E.

In vista di successivi sviluppi è opportuno esprimere in un altro modo il contenuto della Proposizione 3.1 facendo ricorso alla nozione di *relazione*. A tale scopo ricordiamo che se E è un insieme qualsiasi e $V \subset E \times E$ è una relazione di E, per ogni $x \in E$ si definisce:

$$V[x] = \{y \in E\colon (x, y) \in V\} \ .$$

Si denota inoltre con Δ la *diagonale* di $E \times E$, che è l'insieme così definito:

$$\Delta = \{(x, y) \in E \times E\colon x = y\} \ .$$

In un insieme (E, d) denoteremo sempre, nel seguito,

$$\forall \varepsilon \geqslant 0 \ , \qquad W_\varepsilon = \{(x, y) \in E \times E\colon d(x, y) = \varepsilon\} \ , \tag{3.2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \qquad V_\varepsilon = \{(x, y) \in E \times E\colon d(x, y) < \varepsilon\} \ . \tag{3.3}$$

Si riconosce subito che:

$$V_\varepsilon = \bigcup_{0 \leqslant \sigma < \varepsilon} W_\sigma \ , \tag{3.4}$$

$$V_\varepsilon[x] = \bigcup_{0 \leqslant \sigma < \varepsilon} W_\sigma[x] = \sigma(x, \varepsilon) \ . \tag{3.5}$$

Definizione 3.2. Sia E uno spazio topologico e $\mathcal{V}=\{V\}$ una famiglia di relazioni di E. Diremo che $\mathcal{V}$ *genera la topologia di* E se per ogni $x\in E$ la famiglia

$$\{V[x]\}_{V\in\mathcal{V}}$$

costituisce un sistema fondamentale di intorni di x in E.

Dalla (3.5) discende la seguente

Osservazione 3.3. Se (E, d) è uno spazio H, la topologia individuata dalla distanza d coincide con quella generata dalla famiglia di relazioni $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.

Ciò premesso, dimostriamo la seguente

Proposizione 3.4. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio topologico E sia uno spazio H è che la sua topologia sia generata da una famiglia numerabile di relazioni.*

La condizione è evidentemente sufficiente in virtù della Proposizione 3.1. Viceversa, se (E, d) è uno spazio H, la famiglia

$$\mathcal{V}=\{V_{1/n}\}_{n\in N^*}$$

(cfr. Osservazione 3.3) genera la topologia di E.

Un'altra caratterizzazione topologica degli spazi H è ottenibile mediante la nozione di *successione di ricoprimenti*. Si dice che una successione di ricoprimenti $\{\Pi_n\}_{n\in N^*}$ di uno spazio topologico E è *monotona* se, qualunque siano due insiemi U, V di Π_{n+1} tali che $U\cap V\neq\emptyset$, esiste un $W\in\Pi_n$ tale che $W\supset U\cap V$. Si dice inoltre che $\{\Pi_n\}_{n\in N^*}$ è *completa* se possiede la proprietà seguente: affinchè un punto x sia aderente a un insieme A è necessario e sufficiente che per ogni $n\in N^*$ esista un $U\in\Pi_n$ tale che $x\in U$ e $U\cap A\neq\emptyset$.

Un teorema di ALEXANDROFF-URYSHON afferma (cfr. [1], p. 75) che uno spazio topologico è pseudometrizzabile se e solo se esiste una successione monotona e completa di ricoprimenti.

Un analogo teorema vale per i più generali spazi H. Più precisamente:

Proposizione 3.5. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio topologico E sia uno spazio H è che esista una successione completa di ricoprimenti.*

La condizione di completezza di una successione di ricoprimenti $\{\Pi_n\}_{n\in N^*}$ si può anche esprimere dicendo che per ogni $x\in E$ e per ogni $n\in N^*$ esiste un $U_x^n\in\Pi_n$ tale che la famiglia $\{U_x^n\}_{n\in N^*}$ costituisce un sistema fondamentale di intorni di x. Pertanto, se in uno spazio topologico E esiste una successione completa di ricoprimenti, E è uno spazio H in virtù della Proposizione 3.1. Viceversa, se (E, d) è uno spazio H, la successione di ricoprimenti $\{\Pi_n\}_{n \in N^*}$ tale che $\Pi_n = \{\sigma(x, 1/n)\}_{x \in E}$ è completa.

4. - Alcune classi di spazi H.

Tenuto conto delle (3.2), (3.3), (3.4) e (3.5), l'assioma (d_2) può essere espresso nel seguente modo:

$$\forall_{x \in E} \quad \forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\eta > 0} \quad \forall_{0 \leqslant \sigma < \eta} \quad \forall_{y \in W_\sigma[x]} \quad \exists_{\xi > 0} \quad V_\xi[y] \subset V_\varepsilon[x] . \tag{4.1}$$

Tale assioma può essere «uniformizzato» spostando il primo e il quinto quantificatore (insieme con le variabili quantificate) al penultimo e ultimo posto, ottenendo così:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\eta > 0} \quad \forall_{0 \leqslant \sigma < \eta} \quad \exists_{\xi > 0} \quad \forall_{x \in E} \quad \forall_{y \in W_\sigma[x]} \quad V_\xi[y] \subset V_\varepsilon[x] .$$

Questa relazione può anche essere scritta nel seguente modo:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\eta > 0} \quad \forall_{0 \leqslant \sigma < \eta} \quad \exists_{\xi > 0} \quad W_\sigma \circ V_\xi \subset V_\varepsilon \ \text{(4)} . \tag{β}$$

L'assioma (β) è chiaramente più restrittivo dell'assioma (d_2), e il suo interesse consiste soprattutto nel fatto che in esso i punti compaiono soltanto per il tramite delle loro distanze.

Se poi, con una successiva operazione di uniformizzazione, scambiamo in (β) il terzo e il quarto quantificatore, otteniamo:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\eta > 0} \quad \exists_{\xi > 0} \quad \forall_{0 \leqslant \sigma < \eta} \quad W_\sigma \circ V_\xi \subset V_\varepsilon ,$$

che si può anche scrivere:

$$\forall_{\varepsilon > 0} \quad \exists_{\eta > 0} \quad \exists_{\xi > 0} \quad V_\eta \circ V_\xi \subset V_\varepsilon .$$

---

(4) Col tondino $\circ$ si denota l'ordinaria operazione di composizione tra relazioni.

Ponendo poi $\delta = \min\{\eta, \xi\}$ si ha:

$$(\gamma) \qquad \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\delta > 0} \quad V_\delta \circ V_\delta \subset V_\varepsilon .$$

Tale assioma, che è chiaramente più restrittivo di (β), è significativo perchè esprime una delle condizioni essenziali affinchè la famiglia $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon \in R_+^*}$ costituisca una base per una struttura uniforme (cfr., per esempio [4], p. 177).

In conclusione, possiamo stabilire che in un insieme (E, d) valgono le seguenti implicazioni:

$$(4.2) \qquad (\gamma) \Rightarrow (\beta) \Rightarrow (d_2) .$$

Nel seguito chiameremo *spazio* H_β o *spazio* H_γ uno spazio H soddisfacente rispettivamente a (β) o a (γ).

Più in generale, se $(a_1), (a_2), \ldots, (a_n)$ sono assiomi relativi agli spazi H, chiameremo spazio $H_{a_1 a_2 \ldots a_n}$ uno spazio H soddisfacente ai suddetti assiomi.

5. - Gli spazi H_β.

Per una comprensione più diretta dell'assioma (β), sarà utile esprimerlo nella seguente forma:

$$(5.1) \qquad \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\eta > 0} \ \forall_{0 \leqslant \sigma < \eta} \ \exists_{\xi > 0} \quad \left.\begin{array}{l} d(x, y) = \sigma \\ d(y, z) < \xi \end{array}\right\} \Rightarrow d(x, z) < \varepsilon .$$

Sia $\mathfrak{D}$ la famiglia dei sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$ così definita: $D \in \mathfrak{D}$ se e solo se esiste un $l > 0$ (potendo anche essere $l = +\infty$) e una funzione $h(\sigma)$ definita nell'intervallo reale $[0, l[$ (chiuso a sinistra e aperto a destra), *strettamente positiva*, tale che

$$(5.2) \qquad \forall_{0 \leqslant \sigma < l} \ \forall_{0 \leqslant \xi < h(\sigma)} \quad (\sigma, \xi) \in D .$$

Per ogni $D \in \mathfrak{D}$ denoteremo con $\mathcal{F}_D$ l'insieme delle funzioni $f\colon D \to \boldsymbol{R}_+$ tali che:

$$(5.3) \qquad \forall_{\varepsilon > 0} \ \exists_{\eta > 0} \ \forall_{0 \leqslant \sigma < \eta} \ \exists_{\nu > 0} \ \forall_{0 \leqslant \xi < \nu} \quad f(\sigma, \xi) < \varepsilon \ (^5) .$$

---

(5) Si può osservare che la (5.3) rappresenta una generalizzazione della condizione che f sia infinitesima in $(0, 0)$.

Consideriamo poi, in un qualunque insieme (E, d), l'applicazione

$$g\colon E^3 \to \mathbf{R}_+^2$$

così definita: per ogni $(x, y, z) \in E^3$,

$$g(x, y, z) = \big(d(x, y),\, d(y, z)\big)\,.$$

Consideriamo allora, in (E, d), il seguente assioma:

$$(\alpha) \qquad \underset{D \in \mathfrak{D}}{\exists} \quad \underset{f \in \mathcal{F}_D}{\exists} \quad \underset{(x,y,z) \in g^{-1}(D)}{\forall} \qquad d(x, z) \leqslant f\big(d(x, y),\, d(y, z)\big)\,.$$

Vale la seguente

Proposizione 5.1. *In un insieme (E, d) l'assioma (α) è equivalente all'assioma (β).*

Dimostriamo che (α) implica (β). In corrispondenza a un qualunque $\varepsilon > 0$ esiste, in virtù della (5.3), un $\bar{\eta} > 0$ tale che

$$(5.4) \qquad \underset{0 \leqslant \sigma < \bar{\eta}}{\forall} \quad \underset{\nu > 0}{\exists} \quad \underset{0 \leqslant \bar{\xi} < \nu}{\forall} \qquad f(\sigma, \bar{\xi}) < \varepsilon\,.$$

Posto $\eta = \min\{\bar{\eta}, l\}$, dalla (5.4) segue che a ogni $\sigma \in [0, \eta[$ corrisponde un $\nu > 0$ tale che $f(\sigma, \bar{\xi}) < \varepsilon$ per ogni $\bar{\xi} \in [0, \nu[$. Poniamo $\xi = \min\{\nu, h(\sigma)\}$ e consideriamo tre qualsiasi punti x, y, z di E tali che

$$d(x, y) = \sigma\,, \qquad d(y, z) = \bar{\xi} < \xi\,.$$

Poichè risulta $(x, y, z) \in g^{-1}(D)$, dall'assioma (α) e dalla (5.4) discende

$$d(x, z) \leqslant f\big(d(x, y),\, d(y, z)\big) = f(\sigma, \bar{\xi}) < \varepsilon\,.$$

Abbiamo quindi verificato l'assioma (β), nella formulazione (5.1).

Dimostriamo che (β) implica (α). Per ogni $\varepsilon > 0$ e per ogni $\sigma \geqslant 0$ poniamo:

$$(5.5) \qquad B_{\varepsilon,\sigma} = \{\xi > 0\colon\ W_\sigma \circ V_\xi \subset V_\varepsilon\}\,,$$

$$(5.6) \qquad L_\varepsilon = \{\eta > 0\colon\ (\forall \sigma \in [0, \eta[,\quad B_{\varepsilon,\sigma} \neq \emptyset)\}\,.$$

L'assioma (β) può essere scritto allora nel seguente modo:

$$(5.7) \qquad \forall \varepsilon > 0\,, \qquad L_\varepsilon \neq \emptyset\,.$$

Se poniamo

$$b_{\varepsilon,\sigma} = \sup B_{\varepsilon,\sigma}\,, \qquad l_\varepsilon = \sup L_\varepsilon\,,$$

$$h(\sigma) = \sup\{b_{\varepsilon,\sigma}\}_{\varepsilon>0}\,, \qquad l = \sup\{l_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}\,,$$

come conseguenza della (5.7) si ha:

$$\forall \varepsilon > 0\,, \qquad l_\varepsilon > 0\,, \tag{5.8}$$

e quindi

$$l > 0\,. \tag{5.9}$$

Inoltre, se ξ appartiene a $B_{\varepsilon,\sigma}$ (o a L_ε), a tale insieme appartengono anche tutti i reali positivi minori di ξ. Ne discende che:

$$0 < \xi < b_{\varepsilon,\sigma} \Rightarrow \xi \in B_{\varepsilon,\sigma}\,, \tag{5.10}$$

$$0 < \eta < l_\varepsilon \quad \Rightarrow \eta \in L_\varepsilon\,. \tag{5.11}$$

Per ogni σ tale che $0 \leqslant \sigma < l_\varepsilon$, consideriamo un η per cui si abbia: $\sigma < \eta < l_\varepsilon$. Per la (5.11) si ha $\eta \in L_\varepsilon$, e quindi, per la (5.6), $B_{\varepsilon,\sigma} \neq \emptyset$. Possiamo scrivere pertanto:

$$0 \leqslant \sigma < l_\varepsilon \Rightarrow b_{\varepsilon,\sigma} > 0\,. \tag{5.12}$$

Se σ è tale che $0 \leqslant \sigma < l$, esiste un $\varepsilon > 0$ per cui si ha $\sigma < l_\varepsilon \leqslant l$. Dalla (5.12) discende allora $b_{\varepsilon,\sigma} > 0$. Possiamo scrivere pertanto:

$$0 \leqslant \sigma < l \Rightarrow h(\sigma) > 0\,. \tag{5.13}$$

Fissato un qualunque ν tale che $0 < \nu < h(\sigma)$, esiste un $\varepsilon > 0$ per cui si ha $\nu < b_{\varepsilon,\sigma} \leqslant h(\sigma)$. Dalla (5.10) discende allora $\nu \in B_{\varepsilon,\sigma}$. Possiamo dunque scrivere:

$$0 < \nu < h(\sigma) \Rightarrow \underset{\varepsilon>0}{\exists} \quad \nu \in B_{\varepsilon,\sigma}\,. \tag{5.14}$$

Sia $D \subset \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$ l'insieme così definito:

$$D = \{(\sigma, \xi) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \colon \sigma \in [0, l[\text{ e } \xi \in [0, h(\sigma)[\}\,.$$

Risulta chiaro, per le (5.9) e (5.13), che D appartiene alla famiglia $\mathfrak{D}$ precedentemente definita.

Per ogni $\sigma \in \boldsymbol{R}_+$ e per ogni $\xi \in \boldsymbol{R}_+$ poniamo:

$$A_\xi = \{\nu > 0 \colon \xi < \nu\},$$

$$K_{\sigma,\xi} = \{\varepsilon > 0 \colon B_{\varepsilon,\sigma} \cap A_\xi \neq \emptyset\}. \tag{5.15}$$

Si verifica che

$$(\sigma, \xi) \in D \Rightarrow K_{\sigma,\xi} \neq \emptyset. \tag{5.16}$$

Basta infatti scegliere un qualunque ν tale che $\xi < \nu < h(\sigma)$, e tener conto della (5.14).

Sia $f \colon D \to \boldsymbol{R}_+$ la funzione così definita: per ogni $(\sigma, \xi) \in D$,

$$f(\sigma, \xi) = \inf K_{\sigma,\xi}. \tag{5.17}$$

La funzione f soddisfa alla (5.3). Fissato infatti un qualunque $\varepsilon > 0$, scegliamo un ε' tale che $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Dalla (5.7) discende che esiste un $\eta \in L_{\varepsilon'}$. Per ogni $\sigma \in [0, \eta[$ esiste quindi, in virtù della (5.6), un $\nu \in B_{\varepsilon',\sigma}$. La (5.15) mostra infine che per ogni $\xi \in [0, \nu[$ si ha $\varepsilon' \in K_{\sigma,\xi}$; e quindi:

$$f(\sigma, \xi) \leqslant \varepsilon' < \varepsilon.$$

Abbiamo dunque dimostrato che $f \in \mathcal{F}_D$. Verifichiamo ora che con tale f vale l'assioma (a). Considerato un qualunque punto $(x, y, z) \in g^{-1}(D)$, poniamo

$$d(x, y) = \sigma, \qquad d(y, z) = \xi.$$

È chiaro che $(\sigma, \xi) \in D$. Per definizione un insieme $B_{\varepsilon,\sigma}$ è tale che

$$\nu \in B_{\varepsilon,\sigma} \Leftrightarrow W_\sigma \circ V_\nu \subset V_\varepsilon. \tag{5.18}$$

Dalle (5.15), (5.18) e (5.1) discende:

$$\varepsilon \in K_{\sigma,\xi} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\nu > \xi}{\exists} \quad \nu \in B_{\varepsilon,\sigma} \quad \Leftrightarrow \quad \underset{\nu > \xi}{\exists} \quad W_\sigma \circ V_\nu \subset V_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad d(x, z) < \varepsilon.$$

La distanza $d(x, z)$ è dunque minore di ogni $\varepsilon \in K_{\sigma,\xi}$, e pertanto:

$$d(x, z) \leqslant f(\sigma, \xi) = f(d(x, y), d(y, z)),$$

come dovevasi dimostrare.

Sia $\mathfrak{D}'$ la famiglia di sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$ così definita: $D \in \mathfrak{D}'$ se e solo se esiste un $l > 0$ (potendo anche essere $l = +\infty$) e una funzione $h(\sigma)$ definita nell'intervallo reale aperto $]0, l[$, *strettamente positiva*, tale che

$$\forall_{0<\sigma<l} \quad \forall_{0<\xi<h(\sigma)} \quad (\sigma, \xi) \in D . \tag{5.19}$$

Paragonando la (5.19) con la (5.2) si osserva che

$$\mathfrak{D} \subset \mathfrak{D}'. \tag{5.20}$$

Per ogni $D \in \mathfrak{D}'$ denoteremo con $\mathcal{F}'_D$ l'insieme delle funzioni $f: D \to \boldsymbol{R}_+$ tali che:

$$\forall_{\varepsilon>0} \quad \exists_{\eta>0} \quad \forall_{0<\sigma<\eta} \quad \exists_{\nu>0} \quad \forall_{0<\xi<\nu} \quad f(\sigma, \xi) < \varepsilon . \tag{5.21}$$

Paragonando la (5.21) con la (5.3) si rileva che, per ogni $D \in \mathfrak{D}$,

$$\mathcal{F}_D \subset \mathcal{F}'_D . \tag{5.22}$$

In un insieme (E, d) consideriamo allora il seguente assioma

$$\exists_{D\in\mathfrak{D}'} \quad \exists_{f\in\mathcal{F}'_D} \quad \forall_{(x,y,z)\in g^{-1}(D)} \quad d(x, z) \leq f(d(x, y), d(y, z)) . \tag{a'}$$

Le (5.20) e (5.22) mostrano che

$$(a) \Rightarrow (a') . \tag{5.23}$$

Se in (E, d) consideriamo inoltre il seguente assioma

$$\forall (x, y) \in E \times E , \qquad d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y , \tag{α}$$

vale la seguente

Proposizione 5.2. *In un insieme (E, d) soddisfacente all'assioma (α), l'assioma (a') è equivalente all'assioma (β).*

È chiaro che (β) implica (a'), in virtù della Proposizione 5.1 e della (5.23). Dimostriamo che (a') implica (β). In corrispondenza a un qualunque $\varepsilon > 0$ esiste, in virtù della (5.21), un $\bar{\eta} > 0$ tale che

$$\forall_{0<\sigma<\bar{\eta}} \quad \exists_{\nu>0} \quad \forall_{0<\bar{\xi}<\nu} \quad f(\sigma, \bar{\xi}) < \varepsilon . \tag{5.24}$$

Posto $\eta = \min\{\bar{\eta}, l, \varepsilon\}$, consideriamo un qualunque $\sigma \in [0, \eta[$. Se $\sigma \neq 0$, ad esso corrisponde, per la (5.24), un opportuno $\nu > 0$. Poniamo allora: $\xi = \min\{h(\sigma), \nu\}$; mentre poniamo $\xi = \varepsilon$ se $\sigma = 0$. Siano x, y, z tre qualsiasi punti di E tali che

$$d(x, y) = \sigma \,, \qquad d(y, z) = \bar{\xi} < \xi \,.$$

Se σ e $\bar{\xi}$ sono entrambi diversi da zero, si ha:

$$(x, y, z) \in g^{-1}(D) \,.$$

Dall'assioma (a') e dalla (5.24) discende allora:

$$d(x, z) \leqslant f(d(x, y), d(y, z)) = f(\sigma, \bar{\xi}) < \varepsilon \,.$$

Se $\sigma = 0$, per l'assioma (α) si ha $x = y$. Ne discende

$$d(x, z) = d(y, z) < \xi = \varepsilon \,.$$

Se $\bar{\xi} = 0$ si ha, sempre per l'assioma (α), $y = z$. Pertanto:

$$d(x, z) = d(x, y) = \sigma < \eta \leqslant \varepsilon \,.$$

Resta così verificato l'assioma (β).

6. - Alcuni esempi di spazi H_β.

Un insieme (E, d) si dice *spazio metrico* se soddisfa ad (α) e ai due seguenti assiomi:

$$(\sigma) \qquad \forall (x, y) \in E^2, \qquad d(x, y) = d(y, x) \,;$$

$$(\tau) \qquad \forall (x, y, z) \in E^3, \qquad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z) \,.$$

Si può osservare che l'assioma (τ) è una particolarizzazione dell'assioma (a): basta infatti porre $D = E^2$, $f(\sigma, \xi) = \sigma + \xi$. Gli spazi metrici sono dunque una classe molto particolare di spazi H_β, e più precisamente di spazi $H_{\alpha\sigma\beta}$.

Sia (E, d) uno spazio metrico illimitato. Introduciamo in E una nuova distanza $\bar{d}$ così definita: per ogni $(x, y) \in E \times E$,

$$(6.1) \qquad \begin{aligned} x = y &\Rightarrow \bar{d}(x, y) = 0 \,, \\ x \neq y &\Rightarrow \bar{d}(x, y) = 1/d(x, y) \,. \end{aligned}$$

L'insieme $(E, \bar{d})$ soddisfa evidentemente agli assiomi (α) e (σ). Faremo vedere che verifica anche l'assioma (β). Sia D il seguente insieme:

$$D = \{(\sigma, \xi) \in \boldsymbol{R}_+^* \times \boldsymbol{R}_+^*: \quad \sigma \neq \xi\} .$$

È chiaro che $D \in \mathfrak{D}'$: basta infatti porre, nella (5.19), $l = +\infty$, $h(\sigma) = \sigma$. Sia $f: D \to \boldsymbol{R}_+$ la funzione così definita:

$$\forall (\sigma, \xi) \in D: \quad f(\sigma, \xi) = \xi / |\sigma - \xi| .$$

Osservando che, per ogni $\sigma > 0$, $\lim\limits_{\xi \to 0} f(\sigma, \xi) = 0$, si riconosce facilmente che la f soddisfa alla (5.21). Dunque: $f \in \mathcal{F}'_D$. Siano x, y, z punti di E tali che $(\bar{d}(x, y), \bar{d}(y, z)) \in D$. Tenuto conto che in $(E, \bar{d})$ vale l'assioma (α), risulta:

$$x \neq y , \qquad y \neq z , \qquad \bar{d}(x, y) \neq \bar{d}(y, z) . \tag{6.2}$$

In (E, d) vale l'assioma (τ); da esso si ricava:

$$|d(x, y) - d(y, z)| \leqslant d(x, z) . \tag{6.3}$$

Dalla (6.2) segue che il primo membro della (6.3) è positivo, e quindi tale è anche il secondo. Dalla (6.3) si deduce allora:

$$\frac{1}{d(x, z)} \leqslant \frac{1}{|d(x, y) - d(y, z)|} \leqslant \frac{d(y, z)}{|d(x, y) - d(y, z)|} .$$

Si ottiene quindi: $\bar{d}(x, z) \leqslant f(\bar{d}(x, y), \bar{d}(y, z))$. Ciò mostra che in $(E, \bar{d})$ vale l'assioma (α'), e pertanto, in virtù della Proposizione 5.2, l'assioma (β).

Resta dunque dimostrato che gli insiemi $(E, \bar{d})$ ottenuti col suddetto procedimento da spazi metrici illimitati (6) sono spazi $H_{\alpha\sigma\beta}$. L'interesse di tali spazi sta soprattutto nel fatto che, come si vedrà in seguito, costituiscono degli esempi di spazi H non uniformizzabili.

7. - Gli spazi H_γ.

Denotiamo con $\mathfrak{D}^1$ la famiglia di sottoinsiemi di $\boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$ così definita: $D \in \mathfrak{D}^1$ se e solo se il punto $(0, 0)$ è punto *interno* di D.

---

(6) Se lo spazio (E, d) fosse limitato, la topologia di $(E, \bar{d})$ risulterebbe essere quella discreta.

Per ogni $D \in \mathfrak{D}^1$ denotiamo con $\mathcal{F}_D^1$ la famiglia delle funzioni $f: D \to \boldsymbol{R}_+$ che siano *infinitesime* in $(0, 0)$. È facile verificare che:

$$\mathfrak{D}^1 \subset \mathfrak{D} \,, \tag{7.1}$$

$$\forall D \in \mathfrak{D}^1, \qquad \mathcal{F}_D^1 \subset \mathcal{F}_D \,. \tag{7.2}$$

In un insieme (E, d) consideriamo il seguente assioma:

$$\underset{D \in \mathfrak{D}^1}{\exists} \quad \underset{f \in \mathcal{F}_D^1}{\exists} \quad \underset{(x,y,z) \in g^{-1}(D)}{\forall} \qquad d(x, z) \leqslant f(d(x, y), d(y, z)) \,. \tag{a_1}$$

Si può osservare che, in virtù delle (7.1) e (7.2), si ha:

$$(a_1) \Rightarrow (a) \,. \tag{7.3}$$

Ci proponiamo di dimostrare che:

Proposizione 7.1. *In un insieme (E, d), l'assioma (a_1) è equivalente all'assioma (γ).*

Per dimostrare che (a_1) implica (γ), esprimiamo (γ) nel modo seguente:

$$\underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\delta > 0}{\exists} \quad \left.\begin{array}{l} d(x, y) < \delta \\ d(y, z) < \delta \end{array}\right\} \Rightarrow d(x, z) < \varepsilon \,. \tag{7.4}$$

Osserviamo poi che $\mathfrak{D}^1$ e $\mathcal{F}_D^1$ possono essere caratterizzati dalle seguenti relazioni:

$$D \in \mathfrak{D}^1 \Leftrightarrow \underset{l > 0}{\exists} \quad \underset{0 \leqslant \sigma < l}{\forall} \quad \underset{0 \leqslant \xi < l}{\forall} \qquad (\sigma, \xi) \in D \,, \tag{7.5}$$

$$f \in \mathcal{F}_D^1 \Leftrightarrow \underset{\varepsilon > 0}{\forall} \quad \underset{\eta > 0}{\exists} \quad \underset{\nu > 0}{\exists} \quad \underset{0 \leqslant \sigma < \eta}{\forall} \quad \underset{0 \leqslant \xi < \nu}{\forall} \qquad f(\sigma, \xi) < \varepsilon \,. \tag{7.6}$$

Poichè per ipotesi vale (a_1), in corrispondenza ad un qualunque $\varepsilon > 0$ consideriamo i valori l, η, ν che intervengono nelle (7.5) e (7.6) e poniamo:

$$\delta = \min\{l, \eta, \nu\} \,.$$

Considerati tre qualsiasi punti x, y, z di E tali che

$$d(x, y) = \sigma < \delta \,, \qquad d(y, z) = \xi < \delta \,,$$

poichè risulta $(x, y, z) \in g^{-1}(D)$ (cfr. n. 5), dall'assioma (a_1) e dalla (7.6) discende

$$d(x, z) \leqslant f(d(x, y), d(y, z)) = f(\sigma, \xi) < \varepsilon .$$

Resta dunque dimostrato l'assioma (γ), come espresso nella (7.4).

Per dimostrare che (γ) implica (a_1) poniamo anzitutto, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$L_\varepsilon = \{(\eta, \nu) \in \boldsymbol{R}_+^* \times \boldsymbol{R}_+^* \colon V_\eta \circ V_\nu \subset V_\varepsilon \} .$$

In virtù di tale definizione, anche l'assioma (γ) è esprimibile mediante la (5.7). Se poniamo

$$C = \bigcup_{\varepsilon > 0} L_\varepsilon ,$$

la (5.7) mostra che $C \neq \emptyset$. Inoltre, se $(\eta, \nu) \in C$ si ha:

$$\text{(7.7)} \qquad \left.\begin{array}{l} 0 < \eta' \leqslant \eta \\ 0 < \nu' \leqslant \nu \end{array}\right\} \Rightarrow (\eta', \nu') \in C .$$

Consideriamo ora i seguenti insiemi: per ogni $(\sigma, \xi) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$,

$$\text{(7.8)} \qquad A_{\sigma, \xi} = \{(\eta, \nu) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \colon \sigma < \eta \text{ e } \xi < \nu\} ,$$

$$\text{(7.9)} \qquad D = \{(\sigma, \xi) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+ \colon A_{\sigma, \xi} \cap C \neq \emptyset\} .$$

Dalle (5.7), (7.7), (7.8) e (7.9) si deduce anzitutto che $D \neq \emptyset$. Inoltre, se $(\sigma, \xi) \in D$ si ha:

$$\text{(7.10)} \qquad \left.\begin{array}{l} 0 \leqslant \sigma' \leqslant \sigma \\ 0 \leqslant \xi' \leqslant \xi \end{array}\right\} \Rightarrow (\sigma', \xi') \in D .$$

Da ciò discende che $D \in \mathfrak{D}^1$. Per ogni $(\sigma, \xi) \in \boldsymbol{R}_+ \times \boldsymbol{R}_+$ poniamo:

$$\text{(7.11)} \qquad K_{\sigma, \xi} = \{\varepsilon > 0 \colon L_\varepsilon \cap A_{\sigma, \xi} \neq \emptyset\} .$$

Vale allora, con i nuovi significati qui introdotti, la (5.16). Infatti, se $(\sigma, \xi) \in D$ esiste un $(\eta, \nu) \in A_{\sigma, \xi} \cap C$; di conseguenza esiste un $\varepsilon > 0$ tale che $(\eta, \nu) \in$ $\in A_{\sigma, \xi} \cap L_\varepsilon$, e quindi tale che $\varepsilon \in K_{\sigma, \xi}$.

Sia $f \colon D \to \boldsymbol{R}_+$ la funzione definita dalla (5.17). Verifichiamo che $f \in \mathcal{F}_D^1$. In corrispondenza a un qualunque $\varepsilon > 0$ scegliamo un ε' tale che $0 < \varepsilon' < \varepsilon$. Dalla (5.7) discende che esiste un $(\eta, \nu) \in L_{\varepsilon'}$. Scelti ad arbitrio σ e ξ in modo tale che $0 \leqslant \sigma < \eta$, $0 \leqslant \xi < \nu$, si ha: $(\eta, \nu) \in L_{\varepsilon'} \cap A_{\sigma, \xi}$, e quindi, per la (7.11),

$\varepsilon' \in K_{\sigma,\xi}$. Risulta pertanto: $f(\sigma,\xi) \leqslant \varepsilon' < \varepsilon$. Abbiamo dunque dimostrato il secondo membro della (7.6). Sia ora $(x, y, z) \in g^{-1}(D)$. Ponendo $d(x, y) = \sigma$, $d(y, z) = \xi$, si ha ovviamente $(\sigma, \xi) \in D$. Dalla (5.16) risulta allora $K_{\sigma,\xi} \neq \emptyset$. Dalla (7.11) si ricava:

$$\varepsilon \in K_{\sigma,\xi} \Leftrightarrow \underset{\eta > \sigma}{\exists} \ \underset{\nu > \xi}{\exists} \ V_\eta \circ V_\nu \subset V_\varepsilon \Rightarrow d(x, z) < \varepsilon .$$

Il valore $d(x, z)$ è dunque minore di ogni $\varepsilon \in K_{\sigma,\xi}$, e pertanto:

$$d(x, z) \leqslant f(\sigma, \xi) = f\big(d(x, y), d(y, z)\big) .$$

Resta dunque dimostrato l'assioma (a_1).

8. - Proprietà topologiche degli spazi H_γ.

Se in un insieme (E, d) poniamo, per ogni $\varepsilon > 0$,

$$L_\varepsilon = \{\delta > 0 \colon \ V_\delta \circ V_\delta \subset V_\varepsilon\} , \tag{8.1}$$

l'assioma (γ) può essere espresso mediante la (5.7). Inoltre è chiaro che se $\delta \in L_\varepsilon$ si ha:

$$0 < \delta' \leqslant \delta \quad \Rightarrow \quad \delta' \in L_\varepsilon . \tag{8.2}$$

Ciò premesso, dimostriamo la seguente (cfr. Proposizione 3.4)

Proposizione 8.1. *Condizione necessaria e sufficiente affinchè uno spazio topologico E sia uno spazio H_γ è che la sua topologia sia generata da una famiglia numerabile $\mathcal{V} = \{V^n\}_{n \in N^*}$ di relazioni tali che, per ogni $n \in N^*$,*

$$V^{n+1} \circ V^{n+1} \subset V^n . \tag{8.3}$$

Per dimostrare che la condizione è necessaria consideriamo una successione di numeri reali positivi $\{\varepsilon_n\}_{n \in N^*}$ tale che, per ogni $n \in N^*$,

$$0 < \varepsilon_n \leqslant 1/n , \tag{8.4}$$

$$\varepsilon_{n+1} \in L_{\varepsilon_n} . \tag{8.5}$$

Una siffatta successione esisterà certamente, in virtù delle (5.7) e (8.2). Se poniamo $V^n = V_\varepsilon$ (cfr. (3.3)), la famiglia $\mathcal{V} = \{V^n\}_{n\in N^*}$ genera la topologia di E, in virtù della (8.4). Dalle (8.5) e (8.1) segue inoltre che $\mathcal{V}$ soddisfa alla (8.3).

Per dimostrare che la condizione è sufficiente osserviamo anzitutto che se la famiglia $\mathcal{V} = \{V^n\}_{n\in N^*}$ genera la topologia di E si ha, per ogni $n\in \boldsymbol{N}^*$ e per ogni $x\in E$, $x\in V^n[x]$, il che può essere espresso dicendo che si ha, per ogni $n\in \boldsymbol{N}^*$,

$$\Delta \subset V^n. \tag{8.6}$$

Dalle (8.6) e (8.3) discende allora, per ogni $n\subset \boldsymbol{N}^*$,

$$V^{n+1} = V^{n+1}\circ \Delta \subset V^{n+1}\circ V^{n+1}\subset V^n.$$

Da ciò segue che se poniamo, per ogni $x\in E$, $V^n[x] = V^n_x$, la famiglia $\{V^n_x\}_{n\in N^*}$ soddisfa alla (3.1). Ragionando allora come nella dimostrazione della Proposizione 3.1 si arriva a definire un'applicazione $d\colon E\times E \to \boldsymbol{R}_+$ che individua una topologia coincidente con quella precedentemente assegnata su E. Dimostriamo che vale l'assioma (γ). La distanza d è tale che, per ogni $n\in \boldsymbol{N}^*$,

$$(x, y)\in V^n \Leftrightarrow d(x, y) < 1/n .$$

Ciò significa che $V^n = V_{1/n}$. Fissato un qualunque $\varepsilon > 0$, sia $n\in \boldsymbol{N}^*$ tale che $1/n < \varepsilon$. Posto $\delta = 1/(n+1)$, abbiamo:

$$V_\delta \circ V_\delta = V^{n+1}\circ V^{n+1}\subset V^n = V_{1/n}\subset V_\varepsilon .$$

Le condizioni affinchè la famiglia $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ sia una base di una struttura uniforme possono essere scritte nel seguente modo (cfr. [4], p. 177):

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \quad \Delta \subset V_\varepsilon , \tag{8.7}$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \quad V_\delta^{-1}\subset V_\varepsilon , \tag{8.8}$$

$$\underset{\varepsilon>0}{\forall} \ \underset{\delta>0}{\exists} \quad V_\delta \circ V_\delta \subset V_\varepsilon . \tag{8.9}$$

Definizione 8.2. Un insieme (E, d) si dice *a distanza uniformizzante* se la famiglia $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ costituisce una base di una struttura uniforme.

Proposizione 8.3. *Un insieme (E, d) a distanza uniformizzante è uno spazio H_γ, e la sua topologia coincide con quella individuata dalla struttura uniforme.*

Le (8.7) e (3.5) mostrano infatti che per d vale l'assioma (d_1), mentre la (8.9) coincide con l'assioma (γ). (E, d) è dunque uno spazio H_γ. Inoltre, per l'Osservazione 3.3, la topologia di (E, d) coincide con quella generata dalla famiglia $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$, e quest'ultima coincide con quella individuata dalla struttura uniforme.

Proposizione 8.4. *Uno spazio $H_{\sigma\gamma}$ è a distanza uniformizzante.*

Basta notare infatti che dagli assiomi (d_1), (σ) e (γ) si deducono immediatamente, nell'ordine, le (8.7), (8.8) e (8.9).

Dalle Proposizioni 8.3 e 8.4 discendono i seguenti corollari:

Corollario 8.5. *Uno spazio H_σ è uno spazio $H_{\sigma\gamma}$ se e solo se è a distanza uniformizzante.*

Corollario 8.6. *Uno spazio $H_{\sigma\gamma}$ è uniformizzabile, e la sua struttura uniforme ammette come base la famiglia $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$.*

È utile osservare che per uno spazio H la condizione di essere a distanza uniformizzante non coincide necessariamente con quella di uniformizzabilità, non potendosi escludere che esistano spazi H uniformizzabili la cui distanza d non sia uniformizzante.

Ricordiamo il seguente importante teorema sugli spazi uniformi (cfr. [4], p. 186):

Teorema di metrizzazione. Uno spazio uniforme è pseudometrizzabile se e solo se la sua struttura uniforme ha una base numerabile.

Dal Corollario 8.6 e dal Teorema di metrizzazione segue:

Proposizione 8.7. *Uno spazio $H_{\sigma\gamma}$ è pseudometrizzabile.*

Basta infatti notare che la famiglia $\{V_{1/n}\}_{n\in N^*}$ costituisce una base della struttura uniforme dello spazio.

Infine, tenuto presente l'assioma (α) (cfr. n. **5**), si ha:

Proposizione 8.8. *Uno spazio $H_{\alpha\sigma\gamma}$ è metrizzabile.*

9. - Esempi e osservazioni sugli spazi H_β e H_γ.

Sia (E, d) uno spazio metrico illimitato e sia $\bar{d}$ la distanza definita in E dalla (6.1). Abbiamo visto (cfr. n. **6**) che $(E, \bar{d})$ è uno spazio $H_{\alpha\sigma\beta}$. Ci proponiamo di studiare la topologia $\mathcal{T}$ introdotta in E da $\bar{d}$.

Sia A un sottoinsieme di E, e $\bar{A}$ la sua chiusura in $\mathcal{C}$. Ricordando la (2.2) si riconosce che

$$\bar{A} = \{x \in E\colon\ d(x, A) = 0\}\,. \tag{9.1}$$

Ponendo $S(x, A) = \sup\{d(x, a)\}_{a \in A}$, dalla (6.1) discende:

$$\forall x \notin A\,, \qquad \bar{d}(x, A) = 1/S(x, A)\,. \tag{9.2}$$

Le (9.1) e (9.2) mostrano dunque che

$$\forall x \notin A\,, \qquad x \in \bar{A} \Leftrightarrow S(x, A) = +\infty\,. \tag{9.3}$$

Poichè in (E, d) vale l'assioma (τ) (cfr. n. **6**), fissati un qualunque $x \notin A$ e un qualunque $y \in A$ si ha:

$$\forall a \in A\,, \qquad d(y, a) - d(x, y) \leqslant d(x, a) \leqslant d(x, y) + d(y, a)\,.$$

Da ciò segue:

$$S(y, A) - d(x, y) \leqslant S(x, A) \leqslant d(x, y) + S(y, A)\,,$$

e quindi:

$$S(x, A) = +\infty \Leftrightarrow S(y, A) = +\infty\,. \tag{9.4}$$

Poichè abbiamo scelto $y \in A$, si ha $S(y, A) = +\infty$ se e solo se A è illimitato in (E, d). Dalle (9.3) e (9.4) discende dunque:

$$\forall x \notin A\,, \qquad x \in \bar{A} \Leftrightarrow A \text{ illimitato in } (E, d)\,.$$

Da ciò segue, in conclusione:

$$A \text{ limitato in } (E, d) \ \Rightarrow \bar{A} = A\,,$$

$$A \text{ illimitato in } (E, d) \Rightarrow \bar{A} = E\,.$$

Si osserva dunque che in $\mathcal{C}$ gli insiemi chiusi diversi da E sono tutti e soli quelli limitati in (E, d).

Siano U, V due qualsiasi aperti non vuoti di $\mathcal{T}$; necessariamente si ha $U \cap V \neq \emptyset$. In caso contrario si avrebbe infatti:

$$\complement(U \cap V) = \complement U \cup \complement V = E \text{ (7)},$$

e quindi (E, d), come unione di due insiemi limitati, risulterebbe limitato, contro l'ipotesi fatta all'inizio.

$(E, \bar{d})$ non è dunque uno spazio di HAUSDORFF, e neppure è uno spazio regolare o normale. Di conseguenza esso non è uniformizzabile (cfr. [**5**], p. 179). In $(E, \bar{d})$ non vale dunque (cfr. Corollario 8.6) l'assioma (γ).

In conclusione, gli insiemi $(E, \bar{d})$ costituiscono una classe di spazi H_β non soddisfacenti all'assioma (γ) e non uniformizzabili. Resta pertanto dimostrato che l'assioma (β) è effettivamente più generale dell'assioma (γ).

Bibliografia

[1] A. APPERT et KY-FAN, *Espaces Topologiques Intermédiaires*, Hermann, Paris 1951.

[2] V. CHECCUCCI, A. TOGNOLI e E. VESENTINI, *Lezioni di Topologia Generale*, Feltrinelli, Milano 1968.

[3] S. CIAMPA, *Distanze non necessariamente triangolari*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **2** (1963), 125-137.

[4] J. L. KELLEY, *General Topology*, Van Nostrand, Princeton 1955.

[5] W. J. PERVIN, *Foundations of General Topology*, Academic Press, New York 1964.

Summary.

Various types of generalized metrizable spaces are presented. Particularly, some generalizations of triangle inequalities are introduced and examined.

* * *

(7) Con $\complement$ intendiamo il passaggio all'« insieme complementare ».