Riv. Mat. Univ. Parma (2) 12 (1971), 83-95

GIOVANNI FERRERO (*)

Sul concetto di moltiplicatore nel senso di Hall. (**)

Introduzione.

È noto che un gruppo di ricerche particolarmente importante nella teoria dei BIB-disegni (cfr. [4], [8]) può essere visto secondo la seguente linea: si costruisce un sistema di differenze (*difference set*) di un gruppo G; lo si utilizza per costruire un BIB-disegno (che risulta simmetrico: in esso è cioè, colle notazioni di [4], $b = v$), indi si cercano moltiplicatori delle strutture così ottenute.

Abbiamo pensato di invertire il procedimento: partire da un gruppo Φ di « moltiplicatori » e costruire o studiare strutture che ammettano Φ come gruppo di moltiplicatori. Per questo abbiamo trovato conveniente ritoccare la definizione di moltiplicatore, in modo che i moltiplicatori abituali risultassero casi particolari di quelli da noi introdotti. Parte dei risultati ottenuti secondo questa linea sono stati comunicati al convegno su *Geometria combinatoria e sue applicazioni* di Perugia, e pubblicati in [7].

Questo lavoro è dedicato ad una prima indagine sul concetto di « moltiplicatore » di cui sopra abbiamo fatto cenno.

Sia dato un insieme S dotato di una struttura, ed S ammetta un gruppo regolare e transitivo N di automorfismi. Fissato un elemento $O \in S$ è naturale aggiungere ad S una struttura di gruppo additivo S^+ tale che S^+ sia isomorfo ad N e O sia l'elemento neutro di S^+. Chiamiamo allora moltiplicatori di (S, N, O) gli automorfismi di S che sono anche automorfismi di S^+.

Tali moltiplicatori formano un gruppo che contiene nel suo centro il gruppo dei moltiplicatori della forma H_n: $x \to nx$, che diremo moltiplicatori di HALL;

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca Matematica del Consiglio Nazionale delle Ricerche. — Ricevuto: 21-XII-1970.

se H_n è un tale moltiplicatore il numero n sarà detto moltiplicatore numerico di (S, N, O).

Se si ripete la costruzione sopra indicata a partire da un altro elemento $O' \in S$ si ottiene, naturalmente, il gruppo dei moltiplicatori di (S, N, O'). Questo risulta isomorfo al precedente; inoltre i moltiplicatori numerici di (S, N, O') sono ancora quelli di (S, N, O).

Per concludere il lavoro si imposta lo studio dei gruppoidi dotati di moltiplicatori (cioè, essenzialmente, dei gruppoidi ammettenti un gruppo regolare e transitivo di automorfismi), giungendo a caratterizzarli in modo assai semplice.

Nelle annotazioni a piè di pagina (1) - per ragioni di brevità - non solo supporremo noti al Lettore i fatti elementari riguardanti BIB-disegni simmetrici, sistemi di differenze e piani proiettivi, ma ritradurremo nel nostro linguaggio e con le nostre notazioni alcuni dei risultati che avremo occasione di citare.

Benchè per lo più non sia necessario, considereremo senz'altro *finiti* tutti gli insiemi in gioco.

1. - Definizioni e prime proprietà.

1. – Sia S un insieme (finito) costituito da v elementi e dotato di una struttura (2); supponiamo che il gruppo dei suoi automorfismi contenga un sottogruppo N che sia regolare e transitivo sugli elementi di S (che possono anche essere chiamati punti). Indichiamo (per ogni $a, b \in S$) con a_b l'unico elemento di N che manda b in a. Fissiamo in modo arbitrario un punto O di S (che chiameremo occasionalmente base). A questo punto possiamo definire entro S un'operazione di somma per mezzo della formula

$$x + y = (y_O \circ x_O)(O)(= y_O(x)) \,. \tag{1}$$

Abbiamo indicato qui con $\circ$ il prodotto definito in N, perchè sia chiaro che tale prodotto va letto da destra a sinistra, con convenzione opposta a quella abituale della teoria dei gruppi.

È chiaro che abbiamo così aggiunto ad S una struttura di gruppo (in un certo senso compatibile con la struttura precedentemente definita in S), rispetto

(1) Specie in quella del n. 6 ed in quelle poste per illustrare il significato dei nostri risultati.

(2) Per esempio dotato di operazioni o di un sistema di sottoinsiemi privilegiati, ecc.. Per precisazioni si vedano, ad esempio, [2] o [9], p. 91. A noi è sufficiente che tra le biiezioni di S su se stesso si possa individuare un gruppo di «automorfismi».

a cui S risulta isomorfo ad N; indicheremo il gruppo così ottenuto con S^+.

Ciò posto chiamiamo *moltiplicatore di* (S, N, O) ogni automorfismo di S^+ che risulti essere un automorfismo di S (3).

Ad esempio un automorfismo di una varietà di gruppo $V^\cdot$ (4) può essere interpretato come un moltiplicatore di (V, G, O), ove V è la varietà $V^\cdot$ privata della sua struttura di gruppo, G è il gruppo delle « traslazioni » di V (cioè delle $\varphi_a\colon x \to ax$) e O è l'elemento neutro della varietà stessa.

Chiamiamo *moltiplicatore numerico di* (S, N, O) ogni intero relativo n tale che la corrispondenza

$$H_n\colon \quad x \to nx\ \big(= x_0^{n-1}(x)\big) \ (5)$$

sia un moltiplicatore.

In queste condizioni la H_n stessa verrà detta *moltiplicatore di Hall*, perchè a moltiplicatori siffatti si riferisce il famoso teorema del moltiplicatore, dovuto ad HALL e RYSER (6).

Si osserva subito che *nel caso finito il numero n è un moltiplicatore numerico di (S, N, O) se e solo se*

a) *il numero n è primo con il numero v degli elementi di S,*

b) *la $H_n\colon x \to nx$ conserva la struttura di S* (7),

c) *qualunque siano gli elementi $x, y \in S$ vale la*

$$n(x + y) = nx + ny\,. \tag{2}$$

Se infatti n è moltiplicatore numerico le condizioni b) e c) sono soddisfatte per definizione. D'altra parte se n non fosse primo con v, allora S^+ avrebbe elementi la cui caratteristica (8) dividerebbe n (per il primo teorema di SYLOW), e la H_n non sarebbe biunivoca, e dunque n non sarebbe un moltiplicatore numerico; vale pertanto allora anche la condizione a).

Supponiamo, viceversa, che valgono le condizioni a), b), c). Allora la H_n è un omomorfismo di S^+ in S^+ (per la condizione c)), e tenendo conto della condizione a) si ha subito che H_n è addirittura un automorfismo di S^+; in par-

---

(3) La nostra definizione generalizza quelle classiche di [4], pp. 14, 87 e seguenti, e di [8], p. 132. In [8], p. 136 si trova la quasi ovvia osservazione che ci ha suggerito la presente generalizzazione.

(4) Cfr. la bibliografia indicata in [6].

(5) Perchè nx va interpretato secondo la somma definita dalla (1).

(6) Cfr. anche R. M. FARLAND and H. B. MANN, *On multiplier of difference sets* Canadian J. Math. **17** (1965), 541-542.

(7) È cioè un morfismo di S in S.

(8) In presenza di un gruppo additivo, parliamo di caratteristica di un elemento invece che di ordine.

ticolare la H_n è una corrispondenza biunivoca, e come tale è dotata di inversa K. D'altra parte la condizione b) dice che H_n conserva la struttura di S; ora, tenendo conto dell'ipotesi di finitezza si ha subito che K è una potenza di H_n (nel gruppo delle permutazioni sui punti di S), e che dunque anche K conserva la struttura di S. Pertanto H_n è un automorfismo di S, e dunque n è un moltiplicatore numerico di (S, N, O) (9). L'osservazione è così dimostrata.

Si ha subito che *i moltiplicatori di* (S, N, O) *formano un gruppo* Φ. *Inoltre questo contiene nel suo centro il gruppo* H *dei moltiplicatori di* Hall. Infatti se φ è un qualunque moltiplicatore si ha che, per ogni moltiplicatore numerico n è $\varphi \circ H_n = H_n \circ \varphi$, perchè ambo i membri dell'eguaglianza ora scritta mandano il generico $x \in S$ nell'elemento $n\,\varphi(x) = \varphi(nx)$ (10).

2. – Concludiamo il paragrafo con qualche ulteriore osservazione di inquadramento.

I gruppi additivi in cui vale la (2) sono detti *n-abeliani* (11); tali sono, come abbiamo sopra osservato, i gruppi S^+ che ammettono n come moltiplicatore numerico. Ora è noto tra l'altro che un gruppo n-abeliano è prodotto diretto di un n-gruppo (12), di un $(1-n)$-gruppo e di un gruppo abeliano (cfr. [3], teorema A). Nel caso che n sia un moltiplicatore numerico la condizione a) del numero precedente (secondo cui n è primo con l'ordine v del gruppo S^+) impone che il primo dei fattori sopra indicati si annulli. Di qui l'enunciato:

Sia M *l'insieme dei moltiplicatori numerici di* (S, N, O). *Il gruppo* S^+ *è allora prodotto diretto di un gruppo abeliano e di un d-gruppo, ove d è un divisore di tutti i numeri della forma* $m-1$, *con* $m \in M$.

Questo si giustifica quasi immediatamente ragionando ad esempio per induzione sugli elementi di M ridotti modulo v (cioè sulle classi di resti modulo v rappresentate dagli elementi di M).

L'enunciato precedente rende abbastanza conto della relativa rarità di strutture S con moltiplicatori di Hall non banali (diversi cioè dall'identità (13))

---

(9) Ricordiamo che, secondo quanto suggerito dalla annotazione (2), i termini di morfismo e di automorfismo vanno intesi in armonia con [9], p. 3.

(10) Si ricordi che il moltiplicatore φ conserva (per definizione) la somma inizialmente introdotta per mezzo della (1). Che il prodotto di due moltiplicatori di Hall sia ancora un moltiplicatore di Hall è del tutto ovvio.

(11) Cfr., per esempio [3], [5].

(12) Un n-gruppo è un gruppo i cui elementi hanno ordine primo con tutti i numeri primi con n. Questa definizione generalizza quella di p-gruppo.

(13) È chiaro che H_n è l'identità se e solo se le caratteristiche di tutti gli elementi di S^+ dividono $n-1$.

tali che S^+ non sia abeliano [14], tanto più se si ricorda che il prodotto di due moltiplicatori numerici è ancora un moltiplicatore numerico.

Ci interesseremo in successivi lavori specialmente di strutture *che ammettono tutti i possibili moltiplicatori di Hall*, cioè di strutture (S, N, O) di v punti tali che tutti i numeri primi con v siano moltiplicatori numerici. *In esse il gruppo additivo S^+ è sempre abeliano.* Basta anzi sapere che uno qualunque dei numeri -1, 2 è un moltiplicatore numerico per asserire che S^+ è abeliano. Infatti se -1 è un moltiplicatore numerico $\forall x, y \in S$ è $-(x+y) = -x-y$ e dunque $-y-x = -x-y$ [15]. D'altra parte se 2 è un moltiplicatore numerico è $2(x+y) = 2x+2y$ e dunque $x+y+x+y = x+x+y+y$.

2. - Osservazioni preliminari.

3. – Osservazione 1. *L'automorfismo φ di S è un moltiplicatore di (S, N, O) se e solo se trasforma in sè tanto O che N* [16].

È chiaro intanto che se φ è un tale moltiplicatore, esso tiene necessariamente fermo O, in quanto automorfismo di S^+. Mostriamo che φ è permutabile con N. Per ipotesi si ha intanto che $\varphi(x)+\varphi(y) = \varphi(x+y)$. Ora, per le definizioni date, qualunque siano gli elementi $x, y \in S$ è anche $\varphi(x)+\varphi(y) = (\varphi(y)_o \circ \varphi)(x)$ e $\varphi(x+y) = \varphi(y_o(x)) = (\varphi \circ y_o)(x)$ [17]. Pertanto è $\varphi(y)_o \circ \varphi = \varphi \circ y_o$, dunque

$$\varphi \circ y_o \circ \varphi^{-1} = \varphi(y)_o\,, \tag{3}$$

e quindi φ transforma elementi di N in elementi di N. È così dimostrata una parte dell'enunciato.

D'altra parte, se φ tiene fermo O ed è permutabile con N, allora $\varphi \circ y_o \circ \varphi^{-1}$ è un elemento di N, diciamo w. Esso inoltre, come è ovvio, manda O in $\varphi(y)$, e dunque vale la (3). Poichè i passaggi che portano dall'ipotesi che φ sia moltiplicatore alla detta (3) sono tutti invertibili, l'enunciato è ora completamente dimostrato.

---

(14) Cfr. in proposito [5], [11]. Su ciò si veda anche il recente lavoro J. L. Alperin, *A classification of n-abelian groups*, Canadian J. Math. **21** (1969), 1238-1244.

(15) Si noti che -1 è moltiplicatore numerico per BIB-disegni costruiti a partire da un sistema di differenze ciclico soltanto in casi banali. Cfr. per esempio [13].

(16) Indichiamo così (per ragioni di compattezza) il fatto che O è fisso per φ e che, insieme, N è permutabile con φ (come sottogruppo del gruppo delle permutazioni sui punti di S).

(17) Si ricordi sempre la (1).

Osservazione 2. *Sia Φ il gruppo dei moltiplicatori di (S, N, O). Entro il gruppo prodotto $N\Phi$ il gruppo Φ è lo stabilizzante di O* (18); *il normalizzante $N(\Phi)$ è transitivo sui punti fissi per Φ. Inoltre nessun elemento non identico di Φ centralizza N, ed il prodotto $N\Phi$ è semidiretto.*

Abbiamo già visto infatti nel n. 1 che Φ è un gruppo. Sia $\alpha = n \circ \varphi$ $(n \in N,\ \varphi \in \Phi)$ un elemento che stabilizza O. Allora $O = \alpha(O) = n \circ \varphi(O) = n(O)$, e dunque (poichè N è regolare) n risulta essere l'identità di N e dunque $\alpha = \varphi$. Poichè $N\Phi$ è transitivo (essendolo N), si ha di qui subito che $N(\Phi)$ è transitivo sui punti tenuti fissi da Φ(19). Si ha ancora, d'altra parte, che se $\varphi \in \Phi$ centralizza N tiene fermi tutti gli elementi di S (20), e dunque è l'identità su S.

Ricordata l'Osservazione 1 e la prima parte dell'Osservazione 2 (che assicura che $N \cap \Phi = E$) (21) si ha di qui subito che $N\Phi$ è un prodotto semidiretto.

4. – Come esempio di applicazione possiamo osservare che *se $N\Phi$ è doppiamente transitivo, allora N è abeliano elementare*. Questo è infatti conseguenza immediata di un noto enunciato (22).

Sia ora Φ il gruppo dei moltiplicatori di (S, N, O). Sia A il gruppo degli automorfismi di S^+. Consideriamo il prodotto NA. Esso è un gruppo perchè N è permutabile con tutti gli elementi di A (23). Inoltre A è lo stabilizzante di O in NA (24).

Ovviamente poi Φ è un sottogruppo di A. Di conseguenza (25) le orbite del normalizzante di Φ in NA contenute nell'insieme dei punti di S tenuti

---

(18) Cioè l'insieme degli elementi che tengono fermo O.

(19) Si ricordi (cfr. [12], p. 7) che in un gruppo transitivo il normalizzante dello stabilizzante di un punto è transitivo sui punti tenuti fissi da quest'ultimo. Osserviamo, inoltre, che evidentemente $N(\Phi)$ è prodotto diretto di Φ e del gruppo degli elementi di N tenuti fissi dagli automorfismi interni indotti dagli elementi di Φ.

(20) Sia infatti $x \in S$. Si scelga l'elemento $n = O_x$ di N. È allora

$$\varphi(x) = (n^{-1} \circ \varphi \circ n)(x) = (n^{-1} \circ \varphi)(O) = x_0(O) = x\,.$$

(21) Ove, naturalmente, $E = \{0\}$.

(22) Un sottogruppo normale regolare e transitivo di un gruppo doppiamente transitivo è abeliano elementare (cfr. [12], p. 28; ivi si trovano anche ulteriori dettagli).

(23) Siano infatti $a \in A$, $n = \alpha_0 \in N$. Per ogni $x \in S$ è allora

$$(a \circ n \circ a^{-1})(x) = a\big(\alpha_0(a^{-1}(x))\big) = a\big(a^{-1}(x) + \alpha\big) = x + a(\alpha) = a(\alpha)_0(x)\,,$$

se si ricorda la (1) e il fatto che $a \in A$ è un automorfismo di S^+.

(24) Perchè a stabilizza lo O, e ogni $n \circ a$ $(n \in N,\ a \in A)$ manda O in $n(O)$.

(25) Cfr. [12]: Sia G un gruppo transitivo sull'insieme S. Sia $O \in S$ e sia Φ un sottogruppo dello stabilizzante A di O. Sia S' l'insieme degli elementi di S tenuti fissi da Φ. I coniugati (in G) di Φ che sono contenuti in A formino k classi di sottogruppi coniugati in A. Allora il normalizzante $N(\Phi)$ di Φ in G ha, in S', esattamente k traiettorie.

fissi da Φ sono tante quante le classi di sottogruppi coniugati (in A) formate da sottogruppi coniugati (in NA) di Φ. Pertanto, ricordando l'Osservazione 2 ([26]) e osservando che il normalizzante di Φ in A contiene il normalizzante di Φ in $N\Phi$ si ha che *due sottogruppi di A che siano coniugati con Φ in NA sono addirittura coniugati in A stesso.*

3. - Questioni di invarianza.

5. – Veniamo ora agli enunciati più importanti del presente lavoro.

Teorema 3. *Il gruppo dei moltiplicatori di (S, N, O) è isomorfo (anzi, simile) a quello di (S, N, O') per ogni $O, O' \in S$.*

Si può anzi dire addirittura che se Φ è il gruppo dei moltiplicatori di (S, N, O) e Φ' quello di (S, N, O'), allora in $N\Phi$ il gruppo Φ' è il trasformato di Φ mediante l'elemento $x \in N$ che manda O in O'. Per la dimostrazione basta evidentemente vedere che ogni trasformato di un elemento di Φ mediante $x = O'_o$ è un elemento di Φ'. Ora $\varphi' = x \circ \varphi \circ x^{-1}$ è chiaramente un elemento che tiene fermo tanto N che O'.

Per avere ulteriori informazioni sui rapporti tra i moltiplicatori di (S, N, O) e di (S, N, O') vediamo più da vicino cosa succede ripetendo la costruzione del n. **1** a partire da un altro elemento base O'. Si ottiene, naturalmente, una nuova operazione che chiameremo ancora somma, ma indicheremo col segno « $\dot{+}$ », definita dalla formula, analoga alla (1),

$$x \dot{+} y = (y_{o'} \circ x_{o'})(O') = y_{o'}(x) .$$

Ricordando le convenzioni iniziali ([27]) si ha subito che $y_{o'} = y_o \circ O_{o'}$. Pertanto (indicando con O^0 l'unico elemento di N tale che $O_{o'} = O^0_o$) si ha:

$$x \dot{+} y = y_{o'}(x) = (y_o \circ O_{o'})(x) = O_{o'}(x) + y = x + O^0 + y \text{ ([28])} . \tag{4}$$

Ciò posto, avendo già dal n. **1** indicato con nx la potenza n-esima di x nel gruppo additivo S^+, possiamo chiamare $\dot{n}x$ la potenza n-esima di x nel gruppo $S^{\dot{+}}$. Ponendo ora, nella (4), $y = x$ e ragionando per induzione si ha subito che

$$\dot{n}x = x + (n-1)(O^0 + x) . \tag{5}$$

([26]) Da cui risulta che il normalizzante di Φ in $N\Phi$ è transitivo sui punti fissi per Φ.

([27]) Giustificate dal fatto che N è transitivo e regolare.

([28]) Si ricordi la (1), ed il fatto che S^+ è un gruppo (dunque un semigruppo).

Abbiamo ora gli strumenti per dimostrare il

Teorema 4. *Se n è un moltiplicatore numerico di (S, N, O), esso lo è anche di (S, N, O') per ogni $O, O' \in S$.*

Per la dimostrazione terremo conto delle considerazioni che seguono immediatamente la definizione di moltiplicatore numerico. Più precisamente (essendo n primo col numero v degli elementi di S, perchè moltiplicatore numerico di (S, N, O)), ci basterà dimostrare che $H_{\dot n} : x \to \dot n x$ conserva la struttura definita in S, e che inoltre

$$\dot n (x + y) = \dot n x + \dot n y \,.$$

Cominciamo dall'ultima parte. Sia dunque n un moltiplicatore numerico di (S, N, O). Ricordando la (5) e poi la (4) si ha che

$$\dot n x + \dot n y = \big(x + (n-1)(O^0 + x)\big) + \big(y + (n-1)(O^0 + y)\big) =$$

$$= x + (n-1)(O^0 + x) + O^0 + y + (n-1)(O^0 + y)\,.$$

D'altra parte, ancora dalla (5) e dalla (4) si ha

$$\dot n(x + y) = (x + y) + (n-1)(O^0 + x + O^0 + y)\,.$$

Pertanto la $\dot n (x + y) = \dot n x + \dot n y$ equivale [29] alla

$$(1-n)(O^0 + y) + (1-n)(O^0 + x) = (1-n)(O^0 + y + O^0 + x) \;[30]\,, \tag{6}$$

che vale per tutti gli $x, y \in S$ se e solo se S^+ è $(1-n)$-abeliano [31].

Ma abbiamo osservato nel n. 2 che S^+ (se, come è per ipotesi, n è un moltiplicatore numerico di (S, N, O)) è un gruppo n-abeliano. Ora un gruppo n-abeliano è anche $(1-n)$-abeliano, per uno dei semplici risultati preliminari richiamati all'inizio di [3]. Pertanto la (6), *che abbiamo visto essere equivalente alla $\dot n (x + y) = \dot n x + n y$ è allora valida*, ed una parte della dimostrazione è terminata.

Mostriamo ora *che la $H_{\dot n} : x \to \dot n x$ conserva la struttura di S.*

---

(29) Se si ricorda che S^+ è un gruppo e si eseguono facili calcoli.

(30) Per vederlo — confrontate le due formule precedenti — abbiamo semplificato a sinistra per $x + O^0$, a destra per y; abbiamo poi raccolto in altro modo i termini rimanenti.

(31) Cfr. la definizione ricordata nella annotazione (11). Si osservi inoltre che $y + O^0$ e $x + O^0$ assumono, al variare di $x, y \in S$ tutti i possibili valori in S^+.

Poichè S^+ è un gruppo isomorfo ad N e, come osservato poco sopra, è un gruppo $(1-n)$-abeliano, si può scrivere, sempre con le notazioni del n. **1**, che

$$(x_o \circ O_{o'})^{1-n} = x_o^{1-n} \circ O_{o'}^{1-n} .$$

Prendendo l'inverso di ambo i membri della formula ora scritta si ha che

$$(x_o \circ O_{o'})^{n-1} = O_{o'}^{n-1} \circ x_o^{n-1}.$$

Ora la $H_{\dot{n}}$ manda il generico $x \in S$ (32) nell'elemento

$$x_{o'}^{n-1}(x) = (x_o \circ O_{o'})^{n-1}(x) = (O_{o'}^{n-1} \circ x_o^{n-1})(x);$$

pertanto la $H_{\dot{n}}$ è prodotto della H_n: $x \to nx = x_o^{n-1}(x)$ e della α: $x \to O_{o'}^{n-1}(x)$ (chiaramente $\alpha \in N$). Ora tanto la H_n che la α conservano la struttura di S, la prima per le ipotesi su n, la seconda per quelle su N.

Poichè il prodotto di due funzioni che conservano la struttura di S conserva la struttura di S (33) l'asserto è dimostrato.

6. – *Discutiamo ora per un istante la possibilità di avere risultati indipendenti da N.*

Siano S un insieme di v elementi e dotato di una struttura, G il gruppo dei suoi automorfismi, N un gruppo regolare e transitivo di automorfismi di S. Siano inoltre O un elemento di S, G_o lo stabilizzante di O in G.

Si ha subito (34) che l'ordine di G è uguale al prodotto di v per l'ordine di G_0. Inoltre (come nella dimostrazione dell'Osservazione 2) si vede che $N \cap G_o = E$. Pertanto, per ragioni aritmetiche, $NG_o = G$, e dunque N è un complemento di G_o in G. Poichè O era un elemento qualunque di S (ed anche N era generico) possiamo asserire che: *I gruppi regolari e transitivi di automorfismi per una struttura S sono, nell'automorfo G di S, complementi per tutti gli stabilizzanti degli elementi di S.*

Poichè gli stabilizzanti in questione sono tutti coniugati (dal momento che G è transitivo, contenendo N, che è transitivo) (35) tali gruppi risultano

(32) Se si ricorda la definizione di moltiplicatori di HALL, così come è stata data nel n. **1**.

(33) Cfr. l'annotazione (9). In effetti la H_n e la α, essendo biunivoche e «conservando la struttura di S» non sono altro che elementi dell'automorfo di S.

(34) Cfr. [12], p. 5.

(35) Cfr. [12], p. 5: Se due elementi $a, b \in S$ appartengono alla stessa traiettoria rispetto ad un gruppo G di permutazioni, allora i loro stabilizzanti in G sono coniugati. D'altra parte, il coniugato di uno stabilizzante è evidentemente ancora uno stabilizzante.

subito esaurire una classe di sottogruppi coniugati. Di qui sorge naturalmente il

Problema. *Vedere sotto quali condizioni tutti i complementi comuni di un sistema di sottogruppi coniugati risultano coniugati tra loro.*

La soluzione di tale problema preciserebbe quando e quanto i risultati sui gruppi costruiti nel n. **1** e sui moltiplicatori relativi dipendano essenzialmente soltanto dalla struttura di S.

Per indicare la difficoltà di tale Problema ricordiamo una classe di strutture individuata da Zappa.

Sia S un piano grafico desarguesiano finito, di rango (36) $n = p^t$, con $n \equiv 1 \pmod 3$, e $v = n^2 + n + 1 = 3q$, con q numero primo. Tale piano, per il teorema di Singer ammette un gruppo C ciclico regolare e transitivo sui punti e sulle rette di S (37). Per il teorema del moltiplicatore (38) il numero p risulta essere un moltiplicatore numerico di (S, C, O) $(O \in S)$; il relativo moltiplicatore di Hall H_p non è evidentemente banale.

Ora tale piano (cfr. [14], n. 4) ammette anche un gruppo N *non ciclico* di collineazioni (sempre regolare e transitivo sui punti e sulle rette di S). Tuttavia *il numero p non è necessariamente un moltiplicatore numerico di* (S, N, O). Così, nel primo dei casi numerici trattati in [14] (n. **5**) si osserva che per $n=4$ (dunque $p = 2$) il gruppo N di Zappa non è abeliano; pertanto 2 non può essere un moltiplicatore numerico di (S, N, O), dal momento che S^+, isomorfo ad N, non è commutativo (39).

4. - Gruppoidi.

7. – Accenniamo ora allo studio dei gruppoidi dotati di moltiplicatori (40), anche allo scopo di sottolineare la possibilità di applicare le considerazioni precedenti anche al di fuori della geometria combinatoria.

---

(36) Il rango $n = k - \lambda$ di un BIB-disegno è, nel caso dei *piani* (in cui $\lambda = 1$), il numero dei punti di ciascuna retta diminuito di uno.

(37) Cfr. [14] o [8], p. 129. Se si prendono gli iperpiani di $PG(n, p^m)$ come blocchi e i suoi punti come elementi di una struttura di incidenza S, si ottiene un BIB-disegno simmetrico che ammette un gruppo ciclico di automorfismi regolare e transitivo tanto sui punti che sugli iperpiani; come tale, il disegno in questione può essere costruito a partire da un sistema di differenze (cfr. [8], p. 121).

(38) Cfr. [8], p. 132: Sia S un BIB-disegno costruito a partire da un sistema di differenze su un gruppo ciclico additivo $\mathfrak{C}$. Sia p un numero primo che divide $n = k - \lambda$, ma non divide v. Se p è maggiore di λ, allora p è un moltiplicatore numerico di (S, C, O).

(39) Si ricordino le osservazioni che concludono il paragrafo 1. Cfr. anche L. A. Rosati, *Piani proiettivi desarguesiani non ciclici*, Boll. Un. Mat. Ital. (3) **12** (1957), 230-240.

(40) Tra essi si trovano quelli studiati recentemente, con un altro spirito, in [10], ove si individuano le strutture algebriche in cui ogni permutazione è un automorfismo.

Osservazione 5. *Sia N un gruppo regolare e transitivo di permutazioni sull'insieme S. Si definisca in S un'operazione di somma come nel* n. 1. *I gruppoidi che hanno S come sostegno e per cui N è un gruppo di automorfismi sono tutti e soli quelli in cui si può scrivere*

$$\forall\, a, b \in S\,, \qquad ab = f(b - a) + a \quad (41) \tag{7}$$

ove f è una funzione da S ad S.

Cominciamo intanto a mostrare che, se un gruppoide S ammette N come gruppo regolare e transitivo di automorfismi, esiste una funzione $f\colon S \to S$ per cui vale la (7).

Il fatto che l'elemento x_0 di N è un automorfismo del gruppoide S equivale, per la (1), alla

$$\forall\, a, x, c \in S\,, \qquad (a + x)(c + x) = ac + x\,. \tag{8}$$

Ponendo, nella (8), $a = O$ se ne ricava la $x(c - x) = Ox + x$. Ricordando che S^+ è un gruppo e ponendo ora $x = a$, $c + x = b$, si ottiene

$$ab = a\big((b - c) + a\big) = O(b - a) + a\,.$$

Questo dimostra che la *funzione $f\colon x \to Ox$ permette*, attraverso la (7), *di individuare il prodotto definito in S*, ed indica la validità di una parte dell'enunciato.

L'altra parte si dimostra, ancora più semplicemente, osservando che il prodotto definito dalla (7) soddisfa comunque (42) alla condizione richiesta. Da tale formula si ha infatti che

$$(a + x)(c + x) = f(c - a) + a + x = ac + x \qquad (\forall\, a, c, x \in S)\,.$$

Osservazione 6. *I moltiplicatori delle strutture (S, N, O) dell'Osservazione 5 sono gli automorfismi φ di S^+ che sono permutabili con la funzione f* (43).

Se infatti φ è un moltiplicatore di (S, N, O) deve essere $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ $(\forall\, a, b \in S)$. Calcolando ambo i membri di questa eguaglianza per mezzo della

---

(41) Qui l'operazione del gruppoide è indicata come prodotto. Come spesso si usa, ove non ci sia possibilità di equivoci, indichiamo con la stessa lettera una struttura ed il suo sostegno. La somma è definità, al solito, dalla (1).

(42) Qualunque sia cioè la funzione $f\colon S \to S$.

(43) Nel semigruppo delle funzioni di S in S. Indichiamo ancora con $\circ$ il prodotto in tale semigruppo.

(7) e ricordando che φ è un automorfismo del gruppo S^+ si ha che

$$\varphi(a)\,\varphi(b) = f\big(\varphi(b) - \varphi(a)\big) + \varphi(a) = (f \circ \varphi)(b - a) + \varphi(a)\,,$$

$$\varphi(ab) = \varphi\big(f(b - a) + a\big) = (\varphi \circ f)(b - a) + \varphi(a)\,.$$

La $\varphi(a)\varphi(b) = \varphi(ab)$ equivale pertanto alla $(f \circ \varphi)(b - a) = (\varphi \circ f)(b - a)$. Osservato che $b - a$ può essere un qualunque elemento di S, si ha subito che $f \circ \varphi = \varphi \circ f$, il che dimostra l'enunciato.

Viceversa, se φ è un automorfismo di S^+ permutabile con f, è sufficiente invertire i precedenti passi per accorgersi che φ è un moltiplicatore di (S, N, O).

Di qui, in particolare, si osserva che *i moltiplicatori numerici n di S sono gli interi per cui $nf(x) = f(nx)$, per ogni $x \in S$.*

Un esempio di gruppoide con moltiplicatori non banali può essere ottenuto a partire da un gruppo additivo qualunque S^+ e un automorfismo φ di S^+. Basta poi definire su S (44) un'operazione di prodotto mediante la (7), dopo aver indicato con f una potenza di φ (45). Detto N il Cayleiano destro di S^+ e O l'elemento neutro di S^+, ovviamente φ risulta un moltiplicatore di (S, N, O).

Si nota pure che, quando f è l'identità oppure manda tutti gli elementi nell'elemento neutro di S^+, tutti gli automorfismi di S^+ sono moltiplicatori. Questi casi si ritrovano in [10] e sono i casi in cui il gruppoide ha unità destra o sinistra.

Bibliografia.

[1] J. L. ALPERIN, *On a theorem of Manning*, Math. Z. **88** (1965), 434-435.

[2] P. ANTOINE, *Étude élémentaire des catégories d'ensembles structurés* (I), Bull. Soc. Math. Belg. **18** (1966), 142-164.

[3] R. BAER, *Factorisation of n-soluble and n-nilpotent groups*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1953), 15-26.

[4] P. DEMBOWSKI, *Finite Geometrie*, Springer, Berlin 1968.

[5] J. R. DURBIN, *Commutativity and n-abelian groups*, Math. Z. **98** (1967), 89-92.

[6] G. FERRERO, *Sui gruppi algebrici unidimensionali*, Period. Mat. (4) **43** (1965), 375-394.

[7] G. FERRERO, *Sul concetto di moltiplicatore (nel senso di Hall) e sui disegni ricchi di moltiplicatori*, Atti Conv. Geom. Comb. Appl., Perugia 1970, 233–238.

(44) Il sostegno di S^+.

(45) O, più in generale, un elemento del normalizzante di φ nell'automorfo di S^+.

[8] M. HALL (Jr.), *Combinatorial Theories*, Blaisdell P. C., Waltham 1967.

[9] H. SCHUBERTH, *Kategorien* (I), Springer, Berlin 1970.

[10] J. SICHLER, *Concerning endomorphisms of finite algebra*, Comm. Math. Univ. Carolinae 8 (1967), 405-414.

[11] H. F. TROTTER, *Groups in which raising to a power is an automorphism*, Canad. Math. Bull. 8 (1965), 825-827.

[12] H. WIELANDT, *Finite permutation groups*, Academic Press, New York 1964.

[13] D. L. YATES, *Another proof of a theorem on difference set*. Proc. Cambridge Philos. Soc. **63** (1967), 595-596.

[14] G. ZAPPA, *Sui piani grafici finiti transitivi e quasi transitivi*, Ric. Mat. **2** (1953), 274-287.

Riassunto.

Il concetto di moltiplicatore di un sistema di differenze conduce in modo naturale alla definizione di un gruppo di «moltiplicatori» di (S, N, O), *ove* S *è un insieme dotato di struttura,* N *è un gruppo regolare e transitivo di automorfismi di* S *ed ove* $O \in S$.

Una prima indagine su tale concetto e qualche osservazione sui gruppoidi dotati di moltiplicatore servono a preparare ed inquadrare lavori di prossima pubblicazione su certe strutture di incidenza.

Summary.

The notion of a multiplier of a difference set leads in natural way to the definition of a group of «multipliers» for (S, N, O), *where* S *is a set together with a structure on it,* N *is a regular group of automorphisms of* S *and* $O \in S$.

A first research on the concept of multiplier and some remarks about the grupoids with multipliers constitute the content of the present paper, which serves as a general setting for future works about some incidence structures.

* * *