Riv. Mat. Univ. Parma (2) **12** (1971), 1-19

SILVIO CINQUINI (*)

Un teorema di Calcolo delle variazioni. (**)

In una Memoria di alcuni anni fa (¹), dedicata agli integrali curvilinei (dello spazio, in forma parametrica, dipendenti dagli elementi differenziali di ordine non superiore al terzo)

$$\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}(3)} = \int_{\mathscr{C}(3)} F(x(s), y(s), z(s);\ x'(s), y'(s), z'(s);\ u_2, v_2, w_2;\ u_3, v_3, w_3)\, ds\,,$$

ove s è la lunghezza dell'arco rettificato, e (essendo R^{-1} la flessione, e λ, μ, ν i coseni direttori della binormale) per brevità di scrittura

$$(1)\qquad \begin{cases} u_2 = \dfrac{\nu}{R} = x'(s)\,y''(s) - x''(s)\,y'(s) \\[2ex] v_2 = \dfrac{\lambda}{R} = y'(s)\,z''(s) - y''(s)\,z'(s) \\[2ex] w_2 = \dfrac{\mu}{R} = z'(s)\,x''(s) - z''(s)\,x'(s)\,, \end{cases}$$

$$(2)\qquad \begin{cases} u_3 = \dfrac{d}{ds}\,\dfrac{\nu}{R} = x'(s)\,y'''(s) - x'''(s)\,y'(s) \\[2ex] v_3 = \dfrac{d}{ds}\,\dfrac{\lambda}{R} = y'(s)\,z'''(s) - y'''(s)\,z'(s) \\[2ex] w_3 = \dfrac{d}{ds}\,\dfrac{\mu}{R} = z'(s)\,x'''(s) - z'''(s)\,x'(s)\,, \end{cases}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Pavia, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo Nazionale per l'Analisi Funzionale e le sue Applicazioni. — Ricevuto: 20-X-1971.

(¹) S. CINQUINI: *Sopra l'esistenza dell'estremo per una classe di integrali curvilinei in forma parametrica,* Ann. Mat. Pura Appl. **49** (1960), 25-72. Nel seguito tale lavoro verrà citato quale Memoria A.

Come allora abbiamo fatto presente, l'impostazione dei problemi in questione è stata fatta in modo da assicurare l'indipendenza dell'integrale curvilineo dal parametro; successivamente la trattazione viene svolta assumendo, per semplicità, come parametro la lunghezza s dell'arco rettificato.

abbiamo stabilito, mediante il metodo diretto di L. TONELLI (dalla scomparsa del quale si compiono 25 anni), teoremi di esistenza del minimo assoluto nell'ipotesi che la funzione F sia inferiormente limitata.

Pur considerando soltanto classi di curve contenute in un campo limitato A_0 dello spazio (x, y, z) (2) e tenuto presente che in ogni caso è

$$x'^2(s) + y'^2(s) + z'^2(s) = 1 ,$$

oltre alle derivate terze anche quelle del secondo ordine possono assumere valori, i cui valori assoluti sono comunque grandi. Pertanto si presenta spontaneo rilevare, nelle presenti righe, un teorema esistenziale relativo al caso, in cui la funzione F non è inferiormente limitata. Analoghe ricerche sono state fatte nel passato per integrali in forma ordinaria (anche doppi); tuttavia sia i risultati allora raggiunti, sia le relative dimostrazioni sono notevolmente diversi da quelli del presente lavoro.

Nell'enunciato del Teorema (n. **2**) figura una costante $h > 0$, la quale è efficacissima per l'applicazione del Teorema stesso, come viene posto in luce mediante qualche esempio (n. **3**, b), c)). Circa la dimostrazione, piuttosto delicata, del Teorema in questione richiamiamo quanto abbiamo già avuto occasione di rilevare (oltre 20 anni fa, nel caso di curve piane): particolare attenzione è richiesta da quelle classi di curve le cui lunghezze hanno limite inferiore nullo, nel qual caso la curva minimante può essere costituita da un solo punto. Infine un ulteriore esempio (n. **4**, c)) prova che la condizione γ) (già introdotta nella Memoria A) è essenziale per la validità del Teorema del n. **2**, nel senso che non sembra possibile attenuarla in alcun modo.

Terminiamo queste righe introduttive, citando sia le ricerche di A. W. J. STODDART (3) per integrali di forma molto generale, dalle quali, come caso particolare, si deducono risultati per integrali dipendenti da derivate di ordine superiore, sia la trattazione di H. S. P. GRÄSSER (4) basata su un'arbitraria metrica di FINSLER.

1. - Generalità.

Per tutte le generalità rinviamo alla Memoria A (5), limitandoci a qualche

(2) Per il caso in cui il campo A dello spazio (x, y, z) non è limitato, nulla aggiungiamo a quanto abbiamo asserito nella Memoria A [vedi (26) a piè di pag. 58].

(3) Vedi, per esempio, *Semicontinuity of integrals*, Trans. Amer. Math. Soc. **122** (1966), 120-135.

(4) *A Monograph on the General Theory of Second Order Parameter-invariant Problems in the Calculus of Variations* (pp. 86), Pretoria 1967.

(5) Vedi Cap. II, § 1, pp. 52-54.

richiamo:

$$F(x, y, z;\ x', y', z';\ u_2, v_2, w_2;\ u_3, v_3, w_3)$$

è una funzione:

1°) definita e continua assieme alle proprie derivate parziali del primo ordine F_{u_3}, F_{v_3}, F_{w_3} in ogni punto (x, y, z) di un campo A_0, che, nel presente lavoro, viene supposto limitato, per ogni terna (x', y', z') con $x'^2 + y'^2 + z'^2 > 0$ e per tutti i valori reali di u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3;

2°) positivamente omogenea di grado 1 rispetto alle variabili x', y', z';

3°) tale che sia $F(x, y, z;\ 0, 0, 0;\ u_2, v_2, w_2;\ u_3, v_3, w_3) = 0$.

Curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$ è ogni curva rettificabile

$$\mathscr{C}^{(3)}: \qquad x = x(s)\,, \qquad y = y(s)\,, \qquad z = z(s)\,, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L)$$

(ove s è la lunghezza dell'arco rettificato), per la quale le funzioni $x(s)$, $y(s)$, $z(s)$ sono assolutamente continue insieme con le loro derivate dei primi due ordini, ogni punto $(x(s), y(s), z(s))$ appartiene al campo A_0, ed esiste finito l'integrale (secondo LEBESGUE) $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$, indicato nelle considerazioni introduttive. Inoltre ogni curva costituita da un solo punto è una curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$.

Infine ricordiamo le seguenti identità:

$$(3) \qquad \frac{1}{R^2} = u_2^2 + v_2^2 + w_2^2 = [x' y'' - x'' y']^2 + [y' z'' - y'' z']^2 + [z' x'' - z'' x']^2 = \\ = x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)\,,$$

$$(4) \qquad \frac{1}{R^2}\,\frac{1}{T^2} + \left[\frac{d}{ds}\,\frac{1}{R}\right]^2 = u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = \\ = [x' y''' - x''' y']^2 + [y' z''' - y''' z']^2 + [z' x''' - z''' x']^2 = \\ = x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s) - [x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)]^2,$$

ove $1/T$ è la torsione.

2. - Teorema.

Sia $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ *un integrale quasi-regolare positivo, sia*

$$(5) \qquad F(x, y, z;\ x', y', z';\ u_2, v_2, w_2;\ u_3, v_3, w_3) \equiv \\ \equiv F_0(x, y, z;\ x', y', z';\ u_2, v_2, w_2;\ u_3, v_3, w_3) - \\ - F_1(x, y, z;\ x', y', z';\ u_2, v_2, w_2;\ u_3, v_3, w_3)\,,$$

esistano due funzioni $\Phi_0(t)$, $\Phi_1(t)$, $(0 \leqslant t < +\infty)$ *continue, non negative, non decrescenti, con* $\Phi_0(t)$ *concava verso l'alto e*

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{\Phi_0(t)}{t} = +\infty, \tag{6}$$

e un numero $t' \geqslant 0$ *in modo che sia*

$$\Phi_0(t) \geqslant \Phi_1(t), \qquad (t' \leqslant t < +\infty), \tag{7}$$

e si possa determinare almeno un numero $h > 0$ *in modo che in tutto il campo* A_0 *per ogni terna normalizzata* (x', y', z') *e per tutti i numeri reali* u_2, v_2, w_2, u_3, v_3, w_3 *sia*

$$F_0 \geqslant \Phi_0\left(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}\right), \qquad F_1 \leqslant \Phi_1\left(h\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}\right). \tag{8}$$

Allora esiste il minimo assoluto di $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ *in ogni classe* $K^{(3)}$, *completa di ordine* 3, *di curve ordinarie* $\mathscr{C}^{(3)}$, *soddisfacente alle seguenti condizioni:*

α) *esiste un numero* $L' > 0$, *in modo che ogni curva di* $K^{(3)}$ *ha lunghezza non superiore a* L';

γ) [6] *esistono due numeri* λ, Γ, *con* $0 < \lambda < 1$, $\Gamma \geqslant 0$, *in modo che su qualunque curva ordinaria* $\mathscr{C}^{(3)}$ *di* $K^{(3)}$ *la disuguaglianza*

$$[x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)]^2 \leqslant \lambda\,[x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)] \tag{9}$$

è verificata per quasi tutti quegli s del rispettivo intervallo di definizione, per i quali è

$$\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} \geqslant \Gamma. \tag{10}$$

Dimostrazione.

a) Infatti sia $\mathscr{C}_0^{(3)}$ una curva di $K^{(3)}$, e sia $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}_0^{(3)}} = M_0$. Escluso il caso ovvio, in cui non esiste alcuna curva di $K^{(3)}$, per la quale è $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} < M_0$ (perchè allora la curva minimante è la stessa $\mathscr{C}_0^{(3)}$), possiamo limitarci a considerare la sottoclasse $K_0^{(3)}$ costituita da quelle curve di $K^{(3)}$, per le quali è

$$\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} \leqslant M_0. \tag{11}$$

---

(6) Il significato geometrico della condizione γ) è già stato rilevato nella Memoria A [vedi (30) a piè di pag. 63].

Inoltre facciamo presente che nella dimostrazione del Teorema enunciato distinguiamo, per chiarezza, i seguenti casi:

1°) Se esiste almeno una curva di $K^{(3)}$, per la quale è $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} < 0$, intendiamo che sia $M_0 < 0$.

2°) È $M_0 > 0$, e le lunghezze delle curve di $K_0^{(3)}$ hanno limite inferiore $\omega > 0$.

3°) È $M_0 > 0$, e il limite inferiore delle lunghezze delle curve di $K_0^{(3)}$ è uguale a zero.

È evidente che non sussistono ulteriori casi da esaminare, e che, per il modo nel quale è stato individuato il 1°) caso, nei casi 2°) e 3°) non esistono curve di $K_0^{(3)}$, per le quali è $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}} < 0$.

b) Rileviamo che in corrispondenza a ogni numero positivo t_0, scelto in modo opportuno, risulta per tutti i $t \geqslant t_0$

$$\Phi_0\left(\sqrt{(1-\lambda)\,\lambda^{-1}}\,t^2\right) - \Phi_1(h\,t) \geqslant H\,t^2, \tag{12}$$

con

$$H = \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\lambda)\,\lambda^{-1}}\;\mathrm{D}^+\Phi_0(h\,t_0) > 0\,. \tag{13}$$

Infatti, in virtù della (7) e delle ipotesi cui soddisfa la funzione $\Phi_0(t)$, esiste un numero t'' con $ht'' \geqslant t'$ in modo che, per tutti i $t \geqslant t''$, valgano entrambe le disuguaglianze

$$\Phi_0(h\,t) \geqslant \Phi_1(h\,t)\,, \tag{14}$$

$$\mathrm{D}^+\Phi_0(h\,t) > 0\,;$$

scegliamo per t_0 un qualunque numero positivo con

$$t_0 \geqslant t'', \qquad t_0 \geqslant \Gamma, \qquad t_0 \geqslant 2\,h\sqrt{\lambda\,(1-\lambda)^{-1}}\,, \tag{15}$$

e inoltre, soltanto nel 2°) caso,

$$t_0 > \sqrt{M_0\,(\omega\,H)^{-1}}\,. \tag{16}$$

Siccome $\Phi_0(t)$ è concava verso l'alto, per ogni $t \geqslant t_0$ risulta

$$\Phi_0\left(\sqrt{(1-\lambda)\,\lambda^{-1}}\,t^2\right) - \Phi_0(h\,t) \geqslant \left[\sqrt{(1-\lambda)\,\lambda^{-1}}\,t^2 - h\,t\right]\mathrm{D}^+\Phi_0(h\,t)\,,$$

e anche, tenuta presente la terza delle (15) e la non decrescenza di $D^+\Phi_0(ht)$,

$$\Phi_0(\sqrt{(1-\lambda)\lambda^{-1}}\,t^2) - \Phi_0(ht) \geqslant [\sqrt{(1-\lambda)\lambda^{-1}} - h\,t_0^{-1}]\,t^2\ D^+\Phi_0(ht) \geqslant$$

$$\geqslant \tfrac{1}{2}\sqrt{(1-\lambda)\lambda^{-1}}\,t^2\ D^+\Phi_0(ht_0);$$

e da questa disuguaglianza, in virtù della (14), segue immediatamente la (12).

c) Nel presente capoverso e nel successivo consideriamo simultaneamente i casi 1°) e 2°), in entrambi i quali possiamo affermare che, per ogni curva $\mathscr{C}^{(3)}$ di $K_0^{(3)}$

$$x = x(s)\,, \qquad y = y(s)\,, \qquad z = z(s)\,, \qquad (0 \leqslant s \leqslant L),$$

esiste almeno un valore s_0 (appartenente al rispettivo intervallo $(0, L)$), per il quale vale la disuguaglianza

$$\sqrt{x''^2(s_0) + y''^2(s_0) + z''^2(s_0)} < t_0\,. \tag{17}$$

Infatti, se esistesse qualche curva di $K_0^{(3)}$ con

$$\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} \geqslant t_0 \tag{18}$$

per tutti gli s di $(0, L)$, in virtù delle (5), (8) e della condizione γ), tenute presenti le (3) e (4), risulterebbe per quasi tutti gli s di $(0, L)$

$$F \geqslant \Phi_0(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) - \Phi_1(h\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}) \geqslant$$

$$\geqslant \Phi_0\big(\sqrt{(1-\lambda)\lambda^{-1}}\,(x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s))\big) - \Phi_1\big(h\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)}\big),$$

e quindi anche, per le (11) e (12),

$$M_0 \geqslant H\int_0^L [x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)]\,ds\,. \tag{19}$$

Siccome il secondo membro è positivo o nullo, nel 1°) caso è immediato che la (19) è impossibile. Nel 2°) caso dalla (19), in virtù delle (18) e (16), segue

$$M_0 > H\,L\,M_0\,(\omega H)^{-1} \geqslant M_0\,,$$

e l'assurdo è pure evidente.

Quanto abbiamo asserito all'inizio del presente capoverso è così provato.

d) Proseguendo l'esame simultaneo dei casi 1°) e 2°) (tra i quali non occorre alcuna ulteriore distinzione), osserviamo che, posto

$$t = \sqrt[4]{\lambda}\,\tau\,,$$

dalla (12) segue

$$\Phi_0(\sqrt{1-\lambda}\,\tau^2) - \Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\,\tau) \geqslant H_0\,\tau^2, \tag{20}$$

con

$$H_0 = H\sqrt{\lambda}\,,$$

per ogni $\tau \geqslant \tau_0$ con

$$\tau_0 = \frac{t_0}{\sqrt[4]{\lambda}}\,. \tag{21}$$

Inoltre in virtù della (6) possiamo fissare un numero $\tau_0' \geqslant \tau_0$ in modo che, per ogni $\tau \geqslant \tau_0'$, sia verificata, assieme alla (20), la disuguaglianza (7)

$$H_0\,\tau \leqslant \Phi_0(\sqrt{\tau^2 - \Gamma^4})\,. \tag{22}$$

Ciò premesso, considerata una curva qualunque $\mathscr{C}^{(3)}$ di $K_0^{(3)}$, decomponiamo il rispettivo intervallo $(0, L)$ in quattro pseudointervalli E_1, E_2, E_3, E_4 nel seguente modo:

in quasi tutto E_1 è

$$\sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)} \geqslant \tau_0'$$

ed è verificata la (10);

in quasi tutto E_2 è

$$\sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)} < \tau_0'$$

ed è ancora verificata la (10);

in quasi tutto E_3 è simultaneamente

$$\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} < \Gamma\,, \qquad \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)} < \tau_0';$$

infine in quasi tutto E_4 è

$$\sqrt{x''^2(s) + y''^2(s) + z''^2(s)} < \Gamma\,, \qquad \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)} \geqslant \tau_0'.$$

---

(7) Ciò è conseguenza ovvia della (6), in virtù della quale esiste un τ^* tale che, per ogni $\tau \geqslant \tau^*$, risulta

$$\sqrt{2}\,H_0\sqrt{\tau^2 - \Gamma^4} \leqslant \Phi_0(\sqrt{\tau^2 - \Gamma^4})\,,$$

dalla quale, per ogni $\tau \geqslant \sqrt{2}\,\Gamma^2$, segue immediatamente la (22); in definitiva basta assumere τ_0' uguale al maggiore dei tre numeri τ_0, τ^*, $\sqrt{2}\,\Gamma^2$.

Per la (20) e per la condizione γ), tenute presenti le (4) e (3), abbiamo

$$\int_{E_1} \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant H_0^{-1} \int_{E_1} [\Phi_0(\sqrt{1-\lambda}\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2}) - \Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt[4]{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2})]\, ds \leqslant$$

$$\leqslant H_0^{-1} \int_{E_1} [\Phi_0(\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x''^2 + y''^2 + z''^2)^2}) - \Phi_1(h\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2})]\, ds \leqslant$$

$$\leqslant H_0^{-1} \int_{E_1} [\Phi_0(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) - \Phi_1(h\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2})]\, ds\,.$$

Si ha in modo ovvio

$$\int_{E_2} \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\, ds \leqslant \tau_0'\, \mathrm{m}(E_2),$$

e siccome, ancora per la condizione γ), è

$$\int_{E_2} \Phi_1(h\sqrt{x''^2 + y''^2 + z''^2})\, ds \leqslant \int_{E_2} \Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt[4]{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2})\, ds \leqslant \Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{\tau_0'})\, \mathrm{m}(E_2)\,,$$

con evidente artificio risulta

$$\int_{E_2} \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \tau_0' \mathrm{m}(E_2) + H_0^{-1} \int_{E_2} [\Phi_0(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) - \Phi_1(h\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2})]\, ds +$$

$$+ H_0^{-1} \Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{\tau_0'})\, \mathrm{m}(E_2)\,.$$

In modo anche più semplice si ottiene

$$\int_{E_3} \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant \tau_0' \mathrm{m}(E_3) + H_0^{-1} \int_{E_3} [\Phi_0(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) - \Phi_1(h\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2})]\, ds + H_0^{-1} \Phi_1(h\Gamma)\, \mathrm{m}(E_3)\,.$$

Infine, usufruendo della (22) e procedendo in modo analogo, risulta

$$\int_{E_4} \sqrt{x'''^2(s) + y'''^2(s) + z'''^2(s)}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant H_0^{-1} \int_{E_4} \Phi_0(\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - \Gamma^4})\, ds \leqslant$$

$$\leqslant H_0^{-1} \int_{E_4} \Phi_0(\sqrt{x'''^2 + y'''^2 + z'''^2 - (x''^2 + y''^2 + z''^2)^2}\, ds \leqslant$$

$$\leqslant H_0^{-1} \int_{E_4} [\Phi_0(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) - \Phi_1(h\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2})]\, ds + H_0^{-1} \Phi_1(h\Gamma)\, \mathrm{m}(E_4)\,.$$

Sommando membro a membro abbiamo

$$\int_0^L \sqrt{x'''^2(s)+y'''^2(s)+z'''^2(s)}\,\mathrm{d}s \leqslant H_0^{-1}\int_0^L [\Phi_0(\sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2})-\Phi_1(h\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2})]\,\mathrm{d}s+$$

$$+\ \tau_0'[\mathrm{m}(E_2)+\mathrm{m}(E_3)] + H_0^{-1}[\Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{\tau_0'})\,\mathrm{m}(E_2) + \Phi_1(h\Gamma)\,\{\mathrm{m}(E_3)+\mathrm{m}(E_4)\}]\,,$$

e quindi, tenute presenti le (5) e (8), in virtù della (11) e della condizione α) risulta, per qualunque curva di $K_0^{(3)}$,

$$\int_0^L \sqrt{x'''^2(s)+y'''^2(s)+z'''^2(s)}\,\mathrm{d}s \leqslant M_0 H_0^{-1} + N_0 L'\,, \tag{23}$$

con

$$N_0 = \tau_0' + H_0^{-1}[\Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{\tau_0'}) + \Phi_1(h\Gamma)]\,.$$

Essendo, per l'assoluta continuità di $x''(s)$, $y''(s)$, $z''(s)$, per ogni s di $(0, L)$

$$|x''(s)| \leqslant |x''(s_0)| + \int_0^L |x'''(s)|\,\mathrm{d}s\,,$$

$$|y''(s)| \leqslant |y''(s_0)| + \int_0^L |y'''(s)|\,\mathrm{d}s\,,$$

$$|z''(s)| \leqslant |z''(s_0)| + \int_0^L |z'''(s)|\,\mathrm{d}s\,,$$

e anche a maggior ragione

$$\sqrt{x''^2(s)+y''^2(s)+z''^2(s)} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{x''^2(s_0)+y''^2(s_0)+z''^2(s_0)} + \sqrt{[\int_0^L |x'''(s)|\,\mathrm{d}s]^2 + [\int_0^L |y'''(s)|\,\mathrm{d}s]^2 + [\int_0^L |z'''(s)|\,\mathrm{d}s]^2}\,,$$

in virtù di una nota disuguaglianza ([8]) per le (17) e (23) abbiamo

$$\sqrt{x''^2(s)+y''^2(s)+z''^2(s)} < t_0 + \int_0^L \sqrt{x'''^2+y'''^2+z'''^2}\,\mathrm{d}s \leqslant t_0 + M_0 H_0^{-1} + N_0 L'. \tag{24}$$

Allora l'esistenza del minimo assoluto di $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$ nella sottoclasse $K_0^{(3)}$ segue immediatamente da un nostro teorema di esistenza ([9]), perchè, posto

$$\Phi(\sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2}) = \Phi_0(\sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2}) - \Phi_1(h\,[t_0 + M_0 H_0^{-1} + N_0 L'])$$

([8]) Vedi, per esempio, G. H. Hardy, J. E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities* (Cap. VI, teorema 201, pag. 148), Cambridge University Press 1952.

([9]) Vedi Memoria A [n. 34, pag. 58].

e tenuta presente la (3), in virtù delle (5) e (8) e della non decrescenza di $\Phi_1(t)$ risulta

$$F \geqslant \Phi(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) ,$$

ove $\Phi(t)$, che è inferiormente limitata, soddisfa alle ulteriori ipotesi del nostro citato teorema esistenziale, mentre per la (24) è verificata la condizione β) del teorema stesso.

e) Oggetto del presente capoverso e del successivo è il 3°) caso, nel quale possiamo estrarre dalla sottoclasse $K_0^{(3)}$ almeno una successione di curve

$$\mathscr{C}_1^{(3)}, \ \mathscr{C}_2^{(3)}, \ \ldots, \ \mathscr{C}_n^{(3)}, \ \ldots \tag{25}$$

con

$$\mathscr{C}_n^{(3)}: \qquad x = x_n(s) \, , \qquad y = y_n(s) \, , \qquad z = z_n(s) \, , \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_n),$$

tale che sia

$$\lim_{n \to +\infty} L_n = 0 \, ,$$

e che la successione (25) converga verso una curva $\mathscr{C}_\infty^{(3)}$, costituita da un solo punto.

Prima di proseguire, preso ad arbitrio un numero ε con $0 < \varepsilon < 1$, riprendiamo le considerazioni del capoverso b) e dell'inizio di d) scegliendo il numero τ_0, che, nel presente capoverso, per chiarezza indichiamo con τ_1, in modo che, oltre alle disuguaglianze

$$\tau_1 \geqslant \frac{t''}{\sqrt[4]{\lambda}}, \qquad \tau_1 \geqslant \frac{\Gamma}{\sqrt[4]{\lambda}}, \qquad \tau_1 \geqslant 2\,h\,\frac{\sqrt[4]{\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}}$$

(dedotte dalle (15), tenendo presente la (21)), sia verificata anche la

$$\mathrm{D}^+\, \Phi_0(h\sqrt[4]{\lambda}\,\tau_1) \geqslant \frac{4\,M_0}{\varepsilon\sqrt{1-\lambda}} \, . \tag{26}$$

Pertanto per ogni $\tau \geqslant \tau_1$ è

$$\Phi_0(\sqrt{1-\lambda}\,\tau^2) - \Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\,\tau) \geqslant H_1\,\tau^2 \tag{27}$$

con

$$H_1 = \tfrac{1}{2}\sqrt{1-\lambda}\ \mathrm{D}^+\Phi_0(h\sqrt[4]{\lambda}\,\tau_1) \, . \tag{28}$$

Inoltre sia τ_1' un numero non inferiore a τ_1 e tale che, in virtù della (6), per ogni $\tau \geqslant \tau_1'$ sia verificata, assieme alla (27), la disuguaglianza

$$H_1 \tau \leqslant \Phi_0(\sqrt{\tau^2 - \Gamma^4}) \,. \tag{29}$$

Ciò premesso, considerata una curva qualunque $\mathscr{C}_n^{(3)}$ della successione (25), siccome per ogni coppia di valori s_1, s_2, con $s_1 < s_2$, appartenenti all'intervallo $(0, L_n)$, è

$$|x_n''(s_2) - x_n''(s_1)| \leqslant \int_{s_1}^{s_2} |x_n'''(s)| \, \mathrm{d}s \leqslant \int_0^{L_n} \sqrt{x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s)} \, \mathrm{d}s \,,$$

procedendo in modo identico al capoverso d), ma usufruendo delle (27) e (29), risulta

$$|x_n''(s_2) - x_n''(s_1)| \leqslant M_0 H_1^{-1} + N_1 L_n$$

con

$$N_1 = \tau_1' + H_1^{-1}[\Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{\tau_1'}) + \Phi_1(h\Gamma)] \,,$$

e anche, tenute presenti le (28) e (26),

$$|x_n''(s_2) - x_n''(s_1)| \leqslant \tfrac{1}{2}\varepsilon + N_2 L_n \,,$$

con

$$N_2 = \tau_1' + \tfrac{1}{2}\,\varepsilon M_0^{-1}[\Phi_1(h\sqrt[4]{\lambda}\sqrt{\tau_1'}) + \Phi_1(h\Gamma)] \,.$$

Allora, determinato n' in modo che per ogni $n > n'$ sia $L_n < \frac{1}{2}\varepsilon N_2^{-1}$, possiamo concludere che, per ogni coppia s_1, s_2 di $(0, L_n)$ con $n > n'$, valgono le disuguaglianze

$$|x_n''(s_2) - x_n''(s_1)| < \varepsilon \,, \qquad |y_n''(s_2) - y_n''(s_1)| < \varepsilon \,, \qquad |z_n''(s_2) - z_n''(s_1)| < \varepsilon \,. \tag{30}$$

f) D'altra parte, decomposto ogni intervallo $(0, L_n)$ in due pseudointervalli E_n', E_n'', ove in E_n' è

$$\sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)} \geqslant t_0 \,,$$

(con t_0 soddisfacente alle (15)), mentre in E_n'' risulta

$$\sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)} < t_0 \,,$$

in virtù della (12) abbiamo

$$\int_0^{L_n} [x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)] \, \mathrm{d}s \leqslant$$

$$\leqslant H^{-1} \int_{E_n'} [\Phi_0(\sqrt{(1-\lambda)\,\lambda^{-1}}\,(x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2)) - \Phi_1(h\sqrt{x_n''^2 + y_n''^2 + z_n''^2})] \, \mathrm{d}s + t_0^2 \, \mathrm{m}(E_n'') \,,$$

e anche, tenute ancora presenti, assieme alle (3), (4), (5), (8), (11), le ipotesi γ) e α),

$$\int_0^{L_n} [x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)]\, ds \leq$$

$$\leq H^{-1} \int_{E_n'} [\Phi_0(\sqrt{u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}) - \Phi_1(h\sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2})]\, ds + t_0^2\, \mathrm{m}(E_n'') \leq$$

$$\leq H^{-1} \int_0^{L_n} [\Phi_0(\sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2}) - \Phi_1(h\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2})]\, ds + [H^{-1}\Phi_1(h\, t_0) + t_0^2]\, \mathrm{m}(E_n'') \leq N_3\,,$$

ove si è posto

$$N_3 = M_0 H^{-1} + [H^{-1}\Phi_1(h\, t_0) + t_0^2] L'.$$

Allora, siccome per qualunque coppia di valori distinti s_1, s_2, con $s_1 < s_2$, di $(0, L_n)$ risulta in virtù della disuguaglianza di SCHWARZ

$$|x_n'(s_2) - x_n'(s_1)| \leq \int_{s_1}^{s_2} |x_n''(s)|\, ds \leq \sqrt{(s_2 - s_1) \int_{s_1}^{s_2} x_n''^2(s)\, ds} \leq \sqrt{L_n N_3}\,,$$

è evidente che, determinato n'' in modo che, per ogni $n > n''$, sia $L_n < \varepsilon^2 N_3^{-1}$, risulta

$$|x_n'(s_2) - x_n'(s_1)| < \varepsilon\,, \qquad |y_n'(s_2) - y_n'(s_1)| < \varepsilon\,, \qquad |z_n'(s_2) - z_n'(s_1)| < \varepsilon\,.$$

Pertanto, per ogni intero positivo n maggiore di entrambi i numeri n', n'' sono verificate simultaneamente le ultime tre disuguaglianze e anche le (30), vale a dire (10) $\mathscr{C}_\infty^{(3)}$ è una curva di accumulazione della classe $K_0^{(3)}$, e siccome tale classe è completa di ordine 3, $\mathscr{C}_\infty^{(3)}$ appartiene a $K_0^{(3)}$, ed evidentemente, per quanto è stato convenuto nel capoverso a), rende minimo $\mathfrak{J}_{\mathscr{C}^{(3)}}^{(3)}$ nella classe $K^{(3)}$.

3. - Esempi.

Qualche esempio illustra le ipotesi del Teorema del n. **2**, sopra tutto (vedi b), c)) per quanto si riferisce all'efficacia della costante h.

a) Sia

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}[\sqrt{1 + u_3^2 + v_3^2 + w_3^2}\, \log(1 + u_3^2 + v_3^2 + w_3^2) -$$
$$- \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}\, \log(1 + \sqrt{1 + u_2^2 + v_2^2 + w_2^2})]\,.$$

---

(10) Vedi Memoria A [n. 26, pag. 54].

Basta assumere

$$\Phi_0(t) \equiv \sqrt{1+t^2}\,\log(1+t^2)\,, \qquad \Phi_1(t) \equiv \sqrt{1+t^2}\,\log(2+t);$$

la (7) ha luogo per $t \geqslant 2$, mentre la seconda delle (8) è soddisfatta per $h=1$.

b) Sia

$$A_0 \equiv [-1 \leqslant x \leqslant 1,\ \ -1 \leqslant y \leqslant 1,\ \ -1 \leqslant z \leqslant 1]\,,$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,[u_3^2+v_3^2+w_3^2-(2+\sqrt{x^2+y^2+z^2})(u_2^2+v_2^2+w_2^2)]\,.$$

Assumiamo

$$F_0 \equiv \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,(u_3^2+v_3^2+w_3^2)\,,$$

$$F_1 \equiv \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,(2+\sqrt{x^2+y^2+z^2})\,(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\,,$$

$$\Phi_0(t) \equiv t^2, \qquad \Phi_1(t) \equiv \tfrac{1}{4}(2+\sqrt{3})\,t^2;$$

cosicchè la (7) è soddisfatta per $t \geqslant 0$; d'altra parte, essendo

$$F_1 \leqslant (2+\sqrt{3})\,(u_2^2+v_2^2+w_2^2)\,,$$

la seconda delle (8) è verificata per $h=2$.

c) Sia

$$F \equiv \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,[\sqrt{1+u_3^4+v_3^4+w_3^4}-\sqrt{4+u_2^4+v_2^4+w_2^4}\,]\,.$$

Assumiamo

$$\Phi_0(t) \equiv \tfrac{1}{2}(1+t^2)\,, \qquad \Phi_1(t) \equiv 2+\tfrac{1}{4}t^2;$$

in tal modo la (7) è soddisfatta per $t \geqslant \sqrt{6}$.

Inoltre è

$$F_0 \equiv \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\sqrt{1+u_3^4+v_3^4+w_3^4} \geqslant$$
$$\geqslant \tfrac{1}{2}(1+u_3^2+v_3^2+w_3^2) \equiv \Phi_0(\sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2})\,,$$

$$F_1 \equiv \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\sqrt{4+u_2^4+v_2^4+w_2^4} \leqslant$$
$$\leqslant 2+u_2^2+v_2^2+w_2^2 \equiv \Phi_1(h\sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2})$$

per $h=2$.

d) Vogliamo rendere esplicito che le ipotesi dell'enunciato del n. **2** non riducono, in ogni caso, il problema dell'esistenza del minimo assoluto alla considerazione di una sottoclasse di curve, le cui flessioni sono ugualmente limitate. Questa affermazione è posta in piena luce dall'esempio del presente capoverso, nel quale, analogamente a quanto è stato fatto in altri problemi, consideriamo inizialmente una successione di archi di cicloidi.

Sia

$$\mathscr{C}_1^{(3)},\ \mathscr{C}_2^{(3)},\ \dots,\ \mathscr{C}_n^{(3)},\ \dots \tag{31}$$

con

$$\mathscr{C}_n^{(3)}:\quad \begin{cases} x = x_n(s) \equiv \dfrac{2}{n}\arccos\left(1-\frac14 ns\right) - \frac12\left(1-\frac14 ns\right)\sqrt{\dfrac{8}{n}s - s^2} \\ y = y_n(s) \equiv s - \dfrac{1}{8}ns^2 \\ z = z_n(s) \equiv 0\,, \end{cases} \qquad (s_n' \leqslant s \leqslant s_n''),$$

ove $\quad s_n' = \dfrac{3}{n}, \qquad s_n'' = \dfrac{3}{n} + \dfrac{1}{2n^5}, \qquad$ e

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\left[u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 - \frac{1}{1100}\left(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2\right)\right].$$

Ogni curva della successione (31) è definita da funzioni continue assieme alle proprie derivate dei primi tre ordini, con

$$x_n'(s) = \frac14 n\sqrt{\frac{8}{n}s - s^2}\,, \qquad y_n'(s) = 1 - \frac14 ns\,, \qquad z_n'(s) = 0\,,$$

vale a dire il parametro s rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato. Risulta

$$x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s) = \left(\frac{8}{n}s - s^2\right)^{-1},$$

e siccome la funzione

$$g(s) = \frac{8}{n}s - s^2\,, \qquad (s_n' \leqslant s \leqslant s_n'') \tag{32}$$

è crescente, la flessione è compresa tra

$$\frac{n}{\sqrt{15 + n^{-4} - \frac{1}{4}n^{-8}}} \quad \text{e} \quad \frac{n}{\sqrt{15}};$$

$$x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s) = 16\, n^{-2} \left(\frac{8}{n}\, s - s^2\right)^{-3},$$

$$u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = \left(\frac{4}{n} - s\right)^2 \left(\frac{8}{n}\, s - s^2\right)^{-3}.$$

Tenuta presente la crescenza della funzione $g(s)$, si constata elementarmente che la condizione γ) è verificata per $\Gamma = 0$, $\lambda = 63/64$. È pure evidente che sono soddisfatte le ulteriori condizioni dell'enunciato del n. **2**, assumendo

$$\Phi_0(t) \equiv t^2, \qquad \Phi_1(t) \equiv \frac{1}{1100}\, t^2, \qquad t' = 0, \qquad h = 1.$$

Abbiamo

$$\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}_n^{(3)}} = J_{n,1} - J_{n,2}$$

con

$$J_{n,1} = \int_{s_n'}^{s_n''} \left(\frac{4}{n} - s\right)^2 \left(\frac{8}{n}\, s - s^2\right)^{-3} ds\,, \qquad J_{n,2} = \frac{1}{1100} \int_{s_n'}^{s_n''} \left(\frac{8}{n}\, s - s^2\right)^{-1} ds\,.$$

Per quanto abbiamo rilevato poco sopra, risulta

$$J_{n,2} \leqslant \frac{1}{1100}\, \frac{1}{2\, n^5}\, \frac{n^2}{15} = \frac{1}{33000}\, \frac{1}{n^3}\,.$$

D'altra parte, siccome la funzione integranda di $J_{n,1}$ è decrescente ([11]), tenuto presente che per ogni intero positivo n è

$$\frac{1}{2n}\left(1 - \frac{1}{2\, n^4}\right)^2 \left(15 + \frac{1}{n^4} - \frac{1}{4\, n^8}\right)^{-3} \geqslant \frac{1}{2n}\, \frac{1}{2^2} \left(15 + 1 - \frac{1}{4}\right)^{-3} = \frac{1}{2n}\, \frac{4^2}{63^3},$$

([11]) Posta tale funzione sotto la forma $\frac{1}{4} g'^2(s) g^{-3}(s)$ (ove $g(s)$ è la funzione (32)), la sua derivata prima

$$\tfrac{1}{4}\,\{2g(s)\, g'(s)\, g''(s) - 3\, g'^3(s)\}\, g^{-4}(s)$$

è negativa in (s_n', s_n''), essendo $g(s) > 0$, $g'(s) > 0$, $g''(s) < 0$.

con calcoli elementari si verifica la doppia disuguaglianza

$$\frac{8}{63^3}\,\frac{1}{n} \leqslant J_{n,1} \leqslant \frac{1}{2\cdot 15^3}\,\frac{1}{n}\,.$$

Vale a dire, siccome $J_{n,1} > J_{n,2}$, $(n=1, 2, \dots)$, è $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}_n} > 0$; d'altra parte è evidente che

$$\lim_{n\to+\infty} \mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}_n} = 0\,.$$

Pertanto, se consideriamo assieme alle curve della successione (31) la curva $\mathscr{C}^{(3)}_0$ costituita dal punto $(0, 0, 0)$, otteniamo una classe di curve ordinarie $\mathscr{C}^{(3)}$, la quale risulta completa di ordine 3, e nella quale $\mathscr{C}^{(3)}_0$ rende minimo l'integrale considerato.

4. - Osservazioni.

a) È intuitivo che l'ipotesi α) è essenziale per la validità del Teorema del n. 2. Ciò si verifica immediatamente, considerando la funzione

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\,[u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 - \sqrt{u_2^2 + v_2^2 + w_2^2}\,]\,,$$

e la classe, completa di ordine 3, di curve ordinarie

$$\mathscr{C}^{(3)}_n:\quad \begin{cases} x = \dfrac{n+1}{n}\cos\left(\dfrac{n}{n+1}\,s\right) \\[2ex] y = \dfrac{n+1}{n}\,\mathrm{sen}\left(\dfrac{n}{n+1}\,s\right) \\[2ex] z = \dfrac{1}{n}\,, \end{cases} \qquad (0 \leqslant s \leqslant 2\pi(n+1)),$$

che si ottiene per $n = 1, 2, \dots$.

Risulta

$$\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}_n} = \int_0^{2\pi(n+1)} -\frac{n}{n+1}\,ds = -2\pi n\,,$$

il cui limite inferiore è $-\infty$.

b) L'ipotesi γ) ha un ruolo fondamentale nella dimostrazione del Teorema del n. **2**, la cui validità può venire a mancare, se tale ipotesi non è soddisfatta, come si verifica immediatamente, usufruendo della funzione indicata in a) e di una classe di curve già considerata ([12]), per la quale è $\lambda = 1$.

c) Vogliamo approfondire quanto abbiamo osservato in b), facendo presente che la condizione γ) non può nemmeno essere attenuata, come risulta dal seguente esempio.

Sia

$$A_0 \equiv [0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \quad 0 \leqslant z \leqslant 1],$$

$$F \equiv \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}\left[u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 - \frac{4}{9}(u_2^2 + v_2^2 + w_2^2)\right],$$

e consideriamo la successione di archi di eliche circolari, che si ha per $n=1, 2, \ldots$,

$$\mathscr{C}_n^{(3)}: \quad \begin{cases} x = x_n(s) \equiv r_n \cos \dfrac{a_n}{r_n} s \\[2ex] y = y_n(s) \equiv r_n \operatorname{sen} \dfrac{a_n}{r_n} s \\[2ex] z = z_n(s) \equiv b_n s, \end{cases} \qquad (0 \leqslant s \leqslant L_n),$$

ove

$$a_n = \cos \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad b_n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(n+1)}, \quad r_n = \sqrt{\operatorname{sen} \frac{\pi}{2(n+1)}}, \quad L_n = \operatorname{sen} \frac{\pi}{2(n+1)};$$

è evidente che il parametro s rappresenta la lunghezza dell'arco rettificato e che le curve considerate hanno lunghezza non superiore a $1/\sqrt{2}$.

Le funzioni, dalle quali è definita ogni curva $\mathscr{C}_n^{(3)}$, sono continue insieme con le loro derivate dei primi tre ordini, quindi ogni curva $\mathscr{C}_n^{(3)}$ è una curva ordinaria $\mathscr{C}^{(3)}$. Inoltre le curve considerate, le cui lunghezze per $n \to +\infty$ tendono a zero, costituiscono una classe completa di ordine 3: infatti la curva costituita dal punto $(0, 0, 0)$ non è curva di accumulazione

([12]) Vedi Memoria A [n. 34, Osservazione II, pag. 61].

di ordine 3 (13) per la classe considerata, essendo (come si verifica elementarmente)

$$y_n''(L_n) - y_n''(0) = -\frac{a_n^2}{r_n}\,\mathrm{sen}\left(\frac{a_n}{r_n}L_n\right) =$$

$$= -\cos^3\frac{\pi}{2(n+1)}\;\frac{\mathrm{sen}\left[\cos\dfrac{\pi}{2(n+1)}\;\sqrt{\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{2(n+1)}}\right]}{\cos\dfrac{\pi}{2(n+1)}\;\sqrt{\mathrm{sen}\dfrac{\pi}{2(n+1)}}},$$

il cui limite per $n \to +\infty$ è -1.

È

$$x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s) = \frac{a_n^4}{r_n^2}, \qquad x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s) = \frac{a_n^6}{r_n^4},$$

$$u_3^2 + v_3^2 + w_3^2 = \frac{a_n^6(1-a_n^2)}{r_n^4} = \frac{a_n^6 b_n^2}{r_n^4},$$

mentre

$$[x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)]^2 = a_n^2[x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s)];$$

pertanto in corrispondenza a ogni curva della classe considerata esiste un numero $\lambda_n = \cos^2(\pi/2\,(n+1)) < 1$, per il quale risulta

$$[x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)]^2 = \lambda_n\,[x_n'''^2(s) + y_n'''^2(s) + z_n'''^2(s)]\,.$$

Però, tenuto presente che è

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt{x_n''^2(s) + y_n''^2(s) + z_n''^2(s)} = \lim_{n\to+\infty}\left[\cos^2\frac{\pi}{2(n+1)}\;\left(\sqrt{\mathrm{sen}\frac{\pi}{2(n+1)}}\right)^{-1}\right] = +\infty,$$

$$\lim_{n\to+\infty}\lambda_n = \lim_{n\to+\infty}a_n^2 = 1\,,$$

non esiste alcuna coppia di numeri $\Gamma \geq 0$, $0 < \lambda < 1$, in modo che sia verificata la condizione γ).

D'altra parte è ovvio che la funzione F soddisfa a tutte le condizioni dell'enunciato del n. **2**, assumendo

$$\Phi_0(t) \equiv t^2, \qquad \Phi_1(t) \equiv \frac{4}{9}t^2, \qquad t' = 0, \qquad h = 1.$$

(13) Vedi loc. cit. in (10).

Tuttavia nella classe considerata non esiste il minimo di $\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}^{(3)}}$, essendo per ogni intero positivo n

$$\mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}_n^{(3)}} = \int_0^{L_n} \left[\frac{a_n^6 b_n^2}{r_n^4} - \frac{4}{9} \frac{a_n^4}{r_n^2} \right] ds =$$

$$= \cos^4 \frac{\pi}{2(n+1)} \left[\operatorname{sen} \frac{\pi}{2(n+1)} \cos^2 \frac{\pi}{2(n+1)} - \frac{4}{9} \right] > - \frac{4}{9},$$

con

$$\liminf \mathfrak{J}^{(3)}_{\mathscr{C}_n^{(3)}} = - \frac{4}{9}.$$

Résumé.

Il s'agit d'un théorème d'existence du minimum absolu pour les intégrales, portant sur des courbes de l'espace données en forme paramètrique, et qui dépendent des dérivées des trois premiers ordres, dans l'hypothèse que la fonction sous le signe d'intégrale ne soit pas inférieurement bornée. Les conditions de validité du Théorème sont éclairées par des exemples.

* * *