Riv. Mat. Univ. Parma (2) **11** (1970), 169-174

SALVATORE ANTONUCCI (*)

Equidistribuzione di colori e condizione necessaria di p-cromaticità di un grafo finito. (**)

Diremo *grafo* una coppia (X, U), ove X è un insieme, i cui elementi saranno detti *vertici* e U è un insieme di coppie non ordinate di elementi di X; gli elementi di U si diranno *spigoli*.

Un grafo (X, U) si dirà *finito* se X è un insieme finito. Nel seguito verranno presi in considerazione soltanto grafi finiti.

Dati due insiemi X e W, aventi rispettivamente n e p elementi, con $p \leqslant n$, si dirà che si effettua su X una *distribuzione di colori mediante* W se, detti *colori* gli elementi di W, si associa ad ogni elemento di X un colore, non escludendo nessun colore; un elemento di X, a cui è stato associato il colore w, si dirà *colorato con* w.

Dato un grafo (X, U) ed effettuata su X una distribuzione di colori mediante un insieme W di colori, si dirà che uno spigolo di (X, U) è *accettabile* per la distribuzione considerata, se non è una coppia di elementi di X colorati con lo stesso colore.

Si dirà che un grafo (X, U) è p-cromatico ovvero che ha *numero cromatico* p, se p è il più piccolo intero non nullo tale che, detto W un insieme avente p elementi, esista su X una distribuzione di colori mediante W tale che tutti gli spigoli di (X, U) siano accettabili. Una distribuzione di colori mediante un insieme W, avente p elementi, su un insieme X, avente n elementi, si dirà una *equidistribuzione di colori* se, detti q e r il quoziente ed il resto della divisione di n per p e detti $a_1, a_2, \dots, a_p$ i colori di W, il colore a_i è associato a $q+1$ oppure a q elementi di X a seconda che risulti $1 \leqslant i \leqslant r$, oppure $r < i \leqslant p$. Dato un insieme X ed effettuata su X una distribuzione D di colori mediante

(*) Indirizzo: Via Cilea 56, 80127 Napoli, Italia.
(**) Ricevuto: 15-X-1970.

un insieme W, si dirà *grafo associato a* D il grafo (X, U), i cui spigoli sono tutte le possibili coppie che si possono ottenere associando elementi di X di colore diverso.

Le osservazioni che seguono sono utili per il seguito.

Osservazione 1. Una distribuzione di colori mediante un insieme W, avente p elementi, su un insieme X, avente n elementi, è una equidistribuzione di colori se, detti q e r il quoziente ed il resto della divisione di n per p, nessun colore è associato ad un numero di elementi diverso da q e da $q+1$.

L'Osservazione 1 si acquisisce facilmente ove si osservi che, nelle ipotesi poste, sono r i colori associati ciascuno a $q+1$ elementi di X. Difatti, indicato con x il numero dei colori associati ciascuno a $q+1$ elementi di X, risulta:

$$n = x(q+1) + (p-x)q\,, \qquad \text{cioè} \qquad n = pq + x\,,$$

e dal confronto di questa ultima uguaglianza con quella posta $n = pq + r$ segue, come volevasi, $x = r$.

Osservazione 2. Data una distribuzione di colori mediante un insieme W, avente p elementi, su un insieme X, avente n elementi, e detti q e r il quoziente ed il resto della divisione di n per p, si ha che: se un colore a è associato a s elementi di X, con $s<q$, deve esistere un colore b associato a t elementi di X, con $t \geqslant q+1$, e se un colore b è associato a t elementi di X, con $t > q+1$, deve esistere un colore a associato a s elementi di X, con $s \leqslant q$.

Difatti, prendiamo in primo luogo in considerazione il caso che un colore a sia associato a s elementi di X, con $s<q$. Se nessun colore fosse associato ad un numero di elementi di X maggiore o uguale a $q+1$, risulterebbe:

$$n \leqslant s + (p-1)q < q + pq - q\,,$$

il che è manifestamente assurdo.

Prendiamo, poi, in considerazione l'altro caso, in cui un colore b sia associato a t elementi di X, con $t > q+1$. Se nessun colore fosse associato ad un numero di elementi di X minore o uguale a q, risulterebbe:

$$n \geqslant t + (p-1)(q+1) > (q+1)p\,,$$

il che è ancora assurdo.

Resta con ciò dimostrata l'Osservazione 2.

O s s e r v a z i o n e 3. Sia D una distribuzione di colori mediante un insieme W, avente p elementi, su un insieme X, avente n elementi, e sia q il quoziente della divisione di n per p; siano, inoltre, a un colore associato a s elementi di X e b un colore associato a t elementi di X.

Supponiamo che s e t verifichino le disuguaglianze:

$$s < q\,, \qquad t \geqslant q + 1\,, \tag{1}$$

oppure le disuguaglianze:

$$s \leqslant q\,, \qquad t > q + 1\,, \tag{2}$$

e consideriamo la nuova distribuzione D' di colori mediante W sull'insieme X, la quale differisca dalla distribuzione D soltanto perchè sia stato colorato con a uno degli elementi di X che in D è colorato con b.

Orbene il numero degli spigoli del grafo (X, U') associato a D' è maggiore del numero degli spigoli del grafo (X, U) associato a D.

Infatti, il numero degli spigoli che sono coppie di elementi di X colorati con a e b è, nel grafo (X, U), st e, nel grafo (X, U'), è $(s+1)(t-1)$; orbene risulta:

$$(s+1)(t-1) = st + t - s - 1 > st\,,$$

poichè $t - s - 1$, addizionando o le disuguaglianze (1) o le disuguaglianze (2), è maggiore di zero. Da ciò, osservando che (X, U') differisce da (X, U) solo per gli spigoli che sono coppie di elementi di X colorati con a e b, segue la tesi.

Le osservazioni premesse consentono di dimostrare la seguente

P r o p o s i z i o n e 1. *Il grafo (X, U), associato ad una distribuzione D di colori su X mediante un insieme W di colori, ha il numero massimo di spigoli se D è una equidistribuzione.*

Difatti, sia D_1 una distribuzione di colori mediante un insieme W, avente p elementi, su un insieme X, avente n elementi, e sia q il quoziente della divisione di n per p. Sia, poi, (X, U_1) il grafo associato a D_1.

Se D_1 non è una equidistribuzione di colori, deve esistere, per l'Osservazione 1, un colore a associato ad un numero di vertici diverso da q e da $q+1$ e supponiamo che a sia associato a s vertici, con $s < q$ (la dimostrazione si consegue analogamente, salvo lievi modifiche, nel caso che esista un colore associato ad un numero di vertici maggiore di $q + 1$).

Per l'Osservazione 2, deve esistere un colore b associato ad un numero di vertici t, con $t \geqslant q + 1$.

Consideriamo, allora, su X la distribuzione D_2 di colori mediante W ottenuta da D_1 associando il colore a ad uno dei vertici colorati con il colore b in D_1 e lasciando invariati i colori associati agli altri vertici; sia (X, U_2) il grafo associato a D_2. Si osserva che:

a) per l'Osservazione 3, (X, U_2) ha un numero di spigoli maggiore del numero degli spigoli di (X, U_1);

b) il colore a, in (X, U_2), risulta associato a $s+1$ vertici ed il colore b a $t-1$ vertici, e però risulta:

$$s+1 \leqslant q\,, \qquad t-1 \geqslant q\,.$$

Se è $s+1<q$, il procedimento continua. Precisamente, deve esistere un colore c (eventualmente coincidente con b, se $t-1>q$), associato ad un numero di vertici u, con $u \geqslant q+1$; si considera, allora, la distribuzione D_3 ottenuta da D_2 associando il colore a ad uno dei vertici colorati con il colore c in D_2 e lasciando invariati i colori associati agli altri vertici; si considera il grafo (X, U_3) associato a D_3 e analogamente si osserva:

a′) per l'Osservazione 3, (X, U_3) ha un numero di spigoli maggiore del numero degli spigoli di (X, U_2);

b′) il colore a, in (X, U_3), risulta associato a $s+2$ vertici e il colore c a $u-1$ vertici e però risulta:

$$s+2 \leqslant q\,, \qquad u-1 \geqslant q\,.$$

E così via. Il procedimento va arrestato quando si raggiunge un grafo (X, U_l) in cui il colore a risulta associato a q vertici; è opportuno osservare intanto che, in (X, U_l), ognuno dei colori b, c, ecc. risulta associato, per il modo con cui si è proceduto, ad un numero di vertici maggiore o uguale a q, e che inoltre, per l'Osservazione 3, (X, U_l) ha un numero di spigoli maggiore del numero degli spigoli di (X, U_1).

Se (X, U_l) è associato ad una distribuzione D_l e se D_l non è una equidistribuzione, tutta la procedura ricomincia per un altro colore x che sia associato ad un numero di vertici diverso da q e da $q+1$. Così, allo stesso modo, per altri colori.

Al termine di tutte le suddette procedure si ottiene, come facilmente si deduce, una distribuzione D in cui nessun colore è associato ad un numero di vertici diverso da q e da $q+1$; per l'Osservazione 1, D è una equidistribuzione e, per l'applicazione continuata dell'Osservazione 3, il grafo (X, U) ad essa associato ha un numero massimo di spigoli. Resta con ciò dimostrata la Proposizione 1.

Dimostriamo ora la seguente

Proposizione 2. *Il numero degli spigoli di un grafo (X, U) associato ad una equidistribuzione di colori su X mediante un insieme W avente p elementi è il seguente:*

$$\{n^2 - ((1+q)r + qn)\}/2 ,$$

dove n è il numero dei vertici del grafo e q e r sono il quoziente ed il resto della divisione di n per p.

Difatti, detti $a_1, a_2, \ldots, a_p$ i colori di W, per ogni i tale che sia $1 \leqslant i \leqslant r$, esisteranno $q+1$ vertici colorati con a_i e, per ogni i tale che sia $r < i \leqslant p$, esisteranno q vertici colorati con a_i. Il calcolo del numero degli spigoli di (X, U) si esegue allora addizionando sull'indice i, per $1 \leqslant i \leqslant p-1$, il numero degli spigoli che sono coppie di elementi colorati con a_i e con a_l, con $l > i$, ottenendosi in tal modo:

$$\begin{aligned}&(q+1)\big((r-1)(q+1)+(p-r)q\big)+\\&\quad+(q+1)\big((r-2)(q+1)+(p-r)q\big)+\ldots+(q+1)\big((q+1)+(p-r)q\big)+\\&\qquad+(q+1)(p-r)q+q(p-r-1)q+q(p-r-2)q+\ldots+qq\,.\end{aligned}$$

Con facili calcoli segue allora la tesi.

Dalle Proposizioni 1 e 2 discende la

Proposizione 3. *Condizione necessaria affinchè un grafo (X, U) avente n vertici e m spigoli sia p-cromatico è che, detti q e r il quoziente ed il resto della divisione di n per p, risulti m minore o uguale al numero*

$$\{n^2 - ((1+q)r + qn)\}/2 .$$

Invero, sia (X, U) un grafo p-cromatico e sia m il numero dei suoi spigoli. È allora possibile effettuare su X una distribuzione D di colori mediante un insieme W avente p elementi in modo che tutti gli spigoli di (X, U) siano accettabili per D. Consideriamo ora il grafo (X, U') associato a D. Ovviamente U' contiene U. Diciamo ancora D' una equidistribuzione di colori su X mediante W e sia (X, U'') il grafo associato a D'. In base alla Proposizione 1 il numero degli elementi di U'' è maggiore o uguale al numero degli elementi di U'; da ciò e dalla Proposizione 2, segue la tesi.

La Proposizione 3 può dare qualche indicazione sull'eventuale numero cromatico di un grafo (X, U).

Invero, detti n e m rispettivamente il numero dei vertici e il numero degli spigoli di (X, U), si può calcolare per $p = 1, 2, 3, \ldots$ il numero

$$\{n^2 - ((1+q)r + qn)\}/2 ,$$

ottenendo in tal modo una successione di valori $N_1, N_2, N_3, \ldots$. Evidentemente la successione è crescente e però esiste un l tale che:

$$N_l < m \leqslant N_{l+1} .$$

Da ciò si può allora dedurre, in base alla Proposizione 3, che il grafo (X, U) è $(l+s)$-cromatico, con s maggiore o uguale a uno.

Bibliografia.

[1] C. BERGE, *Théorie des Graphes et ses Applications*, Dunod, Paris 1967.

Sommario.

Dopo brevi richiami di alcune locuzioni della teoria dei grafi, si dànno le definizioni di equidistribuzione di colori e di grafo associato ad una distribuzione di colori; si dimostra, poi, che il numero degli spigoli del grafo associato ad una distribuzione di colori è massimo se la distribuzione è una equidistribuzione. Infine, calcolato tale numero, si dimostra una condizione necessaria di p-cromaticità di un grafo finito.

* * *