Riv. Mat. Univ. Parma (2) 10 (1969), 165-170

C. FERRERO COTTI (*)

Una condizione di debole commutatività per gli anelli. (**)

1. – Gli anelli che soddisfano ad identità polinomiali generalizzanti quella che esprime la proprietà commutativa sono stati considerati da vari Autori (1).

In questo lavoro vengono esaminati gli anelli nei quali sussiste l'identità

$$\mathscr{C}^2: \qquad (xy)^2 = (yx)^2.$$

Si prova tra l'altro che tali anelli, se il centro C non è propriamente contenuto nell'insieme Δ dei divisori dello zero destri o sinistri, sono *commutativi*, purchè la caratteristica sia zero o prima con due.

Al n. 5 sono invece indicate alcune proprietà degli anelli in cui vale ancora $\mathscr{C}^2$ ma C è contenuto in Δ.

Due esempi al n. 6 mostrano che dall'identità $\mathscr{C}^2$ *non* segue necessariamente la commutatività dell'anello.

Da segnalare infine che *per gli anelli (non necessariamente associativi) di caratteristica zero o dispari, dotati di unità, l'identità $\mathscr{C}^2$ implica la commutatività* (n. 2).

2. - Anelli con unità.

Un primo risultato è il teorema

T_1 .– *Un anello A, non necessariamente associativo, di caratteristica zero o dispari, dotato di unità u e soddisfacente $\mathscr{C}^2$, è commutativo.*

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Programma di Ricerca n. 9 del C. N. R .— Ricevuto: 20-XII-1969.

(1) Vedasi il lavoro [1], i volumi [3], [4] e le bibliografie ivi contenute.

Infatti, per ogni x, $z \in A$, risulta

$$[x(z+u)]^2 = (xz)^2 + (xz)x + x(xz) + x^2 ,$$

$$[(z+u)x]^2 = (zx)^2 + (zx)x + x(zx) + x^2 ,$$

onde, tenuta presente l'identità $\mathscr{C}^2$, segue l'identità

$$(xz)x + x(xz) = (zx)x + x(zx). \tag{1}$$

Posto ora $x = w + u$, utilizzando le identità $\mathscr{C}^2$ ed (1), segue

$$2\,w\,z = 2\,z\,w$$

cioè l'assunto, tenuto conto dell'ipotesi sulla caratteristica.

Di qui in avanti gli anelli in considerazione sono sempre supposti *associativi* (2).

Sussiste il teorema

T_2 .– *In un anello A soddisfacente $\mathscr{C}^2$, ogni elemento idempotente è centrale. In particolare ogni unità sinistra (destra) è unità di A.*

Sia e un elemento idempotente. Si ponga nell'identità $\mathscr{C}^2$ $x = e$ ed $y = z + e$. Sviluppando e tenendo presente ancora $\mathscr{C}^2$ segue $ez = ze$ con z arbitrario in A.

In particolare, apparterranno al centro eventuali unità sinistre (destre) di A e si completa la dimostrazione.

Il teorema T_1 e l'ultima parte del teorema T_2 permettono di restringere le ricerche agli anelli soddisfacenti all'identità $\mathscr{C}^2$ privi di unità destre o sinistre.

3. - Alcune uguaglianze.

Sono utili nel seguito alcune relazioni, che derivano dalla $\mathscr{C}^2$.

Posto $y = w + z$, la $\mathscr{C}^2$ diviene

$$x\,w\,x\,z + x\,z\,x\,w = w\,x\,z\,x + z\,x\,w\,x\,. \tag{3}$$

In particolare, per $w = z$ la (3) diventa

$$2(xz)^2 = 2(zx)^2 ,$$

(2) Per le nozioni fondamentali, vedasi per esempio [4].

onde, se A ha caratteristica zero o dispari, le identità $\mathscr{C}^2$ e (3) risultano *equivalenti*.

Per $w = x$ dalla (3) segue

$$x^2 (xz - zx) = -(xz - zx) x^2. \tag{4}$$

Se *c è un elemento del centro C* di A, ponendo nella (3) $z = c$, risulta

$$(x^2 w - w x^2) c = 0. \tag{5}$$

La (5) per $w = xz - zx$, diviene

$$x^2 (xz - zx) c = (xz - zx) x^2 c.$$

Confrontando con la (4), segue

$$2x^2 (xz - zx) c = 0. \tag{6}$$

D'altra parte, dalla (5), posto $w = xz$, si ha

$$(x^2 x z - x z x^2) c = 0 \tag{7}$$

e, sottraendo dalla (6) la (7) moltiplicata per 2, segue

$$2(x z x^2 - x^2 z x) c = 0. \tag{8}$$

Infine, posto nella (8) $x = y + c$ e tenute presenti le identità (5), (8) si perviene alla *relazione*

$$2(yz - zy) c^3 = 0 \tag{9}$$

con y, z arbitrari in A e c appartenente al centro C di A.

Conviene segnalare anche le seguenti identità.

Dalla $\mathscr{C}^2$, moltiplicando a destra per x, si ha subito $x (yx)^2 = (yx)^2 x$, da cui, ancora per la $\mathscr{C}^2$, segue

$$x (yx)^2 = (xy)^2 x. \tag{10}$$

Sempre dalla identità $\mathscr{C}^2$, posto $x = z^2 - z$ e tenuto conto della (10), si ottiene

$$z y z^2 y = y z^2 y z. \tag{11}$$

Posto invece $x = zw - w$, $y = zw$ e tenuto conto delle (10), (11), si ha

$$2(zw)^3 w = 2(wz)^3 w \,, \tag{12}$$

onde, per la $\mathscr{C}^2$, si perviene alla *relazione*

$$2(zw)^2 (zw - wz) w = 0 \tag{13}$$

con z, w arbitrari in A.

4. - Teorema di commutatività.

Siamo ora in grado di dimostrare un *teorema di commutatività*.

Indicato con C il centro di A e con Δ l'insieme dei divisori dello zero, destri o sinistri, sussiste il teorema:

T$_3$.– *Un anello A, di caratteristica zero o dispari, soddisfacente la $\mathscr{C}^2$ e con centro non propriamente contenuto in Δ, è commutativo.*

Si consideri dapprima il caso $C \not\subset \Delta$.

Esiste allora almeno un elemento $c \in C$, non appartenente a Δ, e la dimostrazione del teorema segue subito dalla (9) del n. **3**, non appena si ricordi che A ha caratteristica zero o dispari.

Nel caso $C = \Delta$ può accadere $\Delta = \{0\}$ ovvero $\Delta \neq \{0\}$.

Nella prima eventualità, A non contiene divisori dello zero non nulli. Dalla (13) segue facilmente che $A = \{0\}$, onde A riesce commutativo.

Resta da considerare la seconda eventualità, cioè $\Delta \neq \{0\}$.

Si osservi anzitutto che C è un *ideale primo* di A. Invero il prodotto di un qualunque elemento di A per un qualunque elemento di $C = \Delta$ risulta un elemento di Δ e quindi di C; dunque C è un *ideale* di A. Per giungere all'asserto basta provare che A/C non ha divisori dello zero propri. Ora, se in A/C esistessero due laterali $C + x$, $C + y$, diversi entrambi da C e tali che

$$(C + x)(C + y) = C + xy = C \,,$$

xy sarebbe un elemento di C, cioè un divisore dello zero di A e in definitiva x, y sarebbero divisori dello zero di A, contro il supposto.

Si stabilisce ora che $A = C$, cioè che, per ogni x, y di A risulta $xy = yx$. Se x o y appartengono a C oppure è $x = y$ la relazione è ovviamente verificata. Se invece $x \neq y$ e x, y non appartengono al centro, poichè C è primo, anche

xy non appartiene a C e neppure $(xy)^p$ con p arbitrario in N. Di conseguenza x, y, $(xy)^p$ non sono divisori dello zero di A. Dalla (13) del n. 3, però, segue ancora $xy = yx$ e pertanto è provato l'asserto.

5. -

Il teorema T_3 suggerisce lo studio degli *anelli A soddisfacenti all'identità $\mathscr{C}^2$ e con centro C propriamente contenuto nell'insieme Δ.*

In quest'ordine d'idee va considerato il teorema T_4 del seguito.

Si noti anzitutto che ad ogni $x \in A$ si può associare il *semigruppo* $S_x = \{x, x^2, x^3, \ldots\}$ delle sue potenze con esponente intero positivo (semigruppo ciclico generato da x). Se S_x è *finito* ed m indica il *periodo* di x, l'elemento x^m è idempotente ([3]). Ciò premesso, sussiste il teorema

T_4 .– *Sia A un anello soddisfacente $\mathscr{C}^2$, con centro C contenuto in Δ. Allora ogni elemento x di A per cui il semigruppo S_x è finito è un divisore dello zero destro e sinistro di A. In particolare, se $C = \{0\}$, x è nilpotente.*

Infatti, come si è accennato, l'ipotesi su S_x implica che x^m è idempotente. Allora, in virtù del teorema T_2, x^m è un elemento centrale e, poichè $C \subset \Delta$, un divisore dello zero (destro e sinistro). Segue che x è anch'esso un divisore dello zero (destro e sinistro) e cioè l'asserto. In particolare, se $C = \{0\}$, si ha $x^m = 0$, cioè x è nilpotente.

Il teorema T_4 è così dimostrato.

6. - Esempi.

È bene concludere il lavoro con degli esempi.

1°) Sia A l'insieme delle terne (a, b, c) di elementi di un campo K. Definite somma e prodotto in A mediante le formule

$$(a, b, c) + (a', b', c') = (a + a', b + b', c + c'),$$

$$(a, b, c)(a', b', c') = (0, 0, ab'),$$

è immediato verificare che A è un anello (anzi addirittura un'algebra su K), non commutativo in cui vale $\mathscr{C}^2$. Si osserva che gli elementi di A sono tutti divisori dello zero e che il prodotto di due qualunque elementi sta nel centro ([4]).

([3]) Vedasi per esempio [2], p. 20.

([4]) Si confronti questo lavoro coi lavori [3], [5] nei quali è considerata la condizione che $x^{n(x)}$ appartiene al centro, con $n(x)$ intero conveniente.

2°) Sia $R[x]$ l'anello dei polinomi, nell'indeterminata x, a coefficienti in un anello commutativo R. Sia poi $R'[x]$ il sottoanello di $R[x]$ costituito dai polinomi privi di termine noto. Si consideri l'insieme A delle quaterne:

$$(a_i x^i,\ r_2\,,\ r_3\,,\ b_i x^i), \qquad a_i\, x^i\,,\ b_i\, x^i \in R'[x], \qquad r_2\,,\ r_3 \in R\,.$$

Definite, in A, somma e prodotto nel modo seguente:

$$(a_i\, x^i\,,\ r_2\,,\ r_3\,,\ b_j\, x^j) + (a_i' x^i\,,\ r_2',\ r_3',\ b_j' x^j) =$$

$$= [(a_i + a_i')\, x^i\,,\ r_2 + r_2',\ r_3 + r_3',\ (b_j + b_j') x^j]\,,$$

$$(a_i\, x^i\,,\ r_2\,,\ r_3\,,\ b_j\, x^j)\,(a_i' x^i\,,\ r_2',\ r_3',\ b_j'\, x^j) =$$

$$= [(a_i\, x^i)(a_i' x^i),\ b_1\, a_1',\ b_1\, a_2' + r_2\, a_1',\ (b_j\, x^j)(b_j' x^j)]\,,$$

è immediato verificare che A è un anello non commutativo in cui vale $\mathscr{C}^2$. Gli elementi di A sono divisori dello zero, però i quadrati degli elementi di A non sono tutti centrali, in quanto, per esempio, il quadrato di $(x, 0, 0, 0)$ non è permutabile con $(0, 0, 0, x)$.

Bibliografia.

[1] A. H. Boers, *A note on a theorem on commutativity of rings*, Indag. Math. **31**. (1969), 121-122.

[2] A. H. Clifford and G. B. Preston, *The Algebraic Theory of Semigroups*, Math. Surveys **7**, Amer. Math. Soc., Providence 1961.

[3] I. N. Herstein, *Noncommutative Rings*, Publ. Math. Assoc. America, Wiley and Sons, 1968.

[4] N. Jacobson, *Lectures in Abstract Algebra*, Volumi **1**, **2**, **3**, Van Nostrand, New York 1958.

[5] N. Jacobson, *Structure of Rings*, Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol. **32**, Providence 1964.

Summary.

Some properties are proved, about rings subject to the condition $(x\,y)^2 = (yx)^2$; one of such properties holds also for non associative rings. Condition $(xy)^2 = (yx)^2$ is shown not to imply commutativity.

* * *