Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 123-129

BIANCA MANFREDI (*)

Su l'esistenza e le proprietà di certi moti periodici (Parte I). (**)

1. - Introduzione.

In questa « Parte I », movendo dal concetto di « progressione di aritmeticità » e dal conseguente concetto di « trans-accumulazione » (v. [**11**]$_1$ e [**11**]$_3$), si cerca di stabilire delle basi per un ampio studio su l'esistenza e le proprietà di certi moti periodici: precisamente, moti corrispondenti a soluzioni periodiche di una certa classe di equazioni differenziali non lineari, $E^{(n)}$, d'ordine $n \geqslant 2$ e con un termine forzante periodico di periodo positivo non nullo (v. n. **2**).

Partendo da una progressione di aritmeticità avente per generatrice una soluzione $x^*(t)$ (di $E^{(n)}$) limitata insieme alle sue prime $n-1$ derivate, e per ragione τ, qui si precisano e si completano le affermazioni seguenti [**11**]:

1°) Le trans-accumulazioni (v. n. **4**), sempre esistenti (v. n. **3**), di tale progressione di aritmeticità, sono tutte soluzioni di $E^{(n)}$.

2°) Queste trans-accumulazioni quando sono in numero finito m ($\geqslant 1$), *e soltanto in tale caso*, sono tutte periodiche ed hanno lo stesso periodo minimo $m\tau$.

3°) Le precedenti trans-accumulazioni periodiche risultano limiti di altrettante progressioni di aritmeticità, di generatrici ordinatamente $x^*(t)$, $x^*(t+\tau)$, ..., $x^*(t+(m-1)\tau)$ e tutte con la stessa ragione $m\tau$.

Considerando i moti corrispondenti alle sopraddette trans-accumulazioni periodiche, che diremo « moti periodici di $E^{(n)}$ », si ha quindi:

Un moto periodico di $E^{(n)}$ è sempre approssimato da infiniti moti di $E^{(n)}$ formanti una progressione di aritmeticità avente per generatrice una delle precedenti funzioni $x^*(t)$, $x^*(t+\tau)$, ..., $x^*(t+(m-1)\tau)$ e la ragione $m\tau$.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 1 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1969-70. — Ricevuto il 12-XI-1969.

Poichè l'intero positivo m, definito in 2°), dipenderà, in generale, dalla particolare soluzione $x^*(t)$ scelta, si conclude (come in [**12**]$_2$):

Un'equazione differenziale $E^{(n)}$ può avere contemporaneamente dei *moti armonici* (caso $m = 1$) e dei *moti subarmonici* di diversi periodi minimi (in corrispondenza a distinti valori di $m > 1$).

2. - Il considerato problema di Meccanica.

Si abbia un'equazione differenziale, di ordine $n \geqslant 2$, della forma

$$E^{(n)}: \qquad x^{(n)}(t) + f(x(t),\ x^{(1)}(t)\ , \ldots,\ x^{(n-1)}(t)) = \varphi(t), \qquad t \in (t_0\ ,\ +\infty),$$

dove:

1°) Le funzioni

$$x(t), \qquad x^{(1)}(t)\ , \qquad \ldots, \qquad x^{(n-1)}(t)\ , \qquad x^{(n)}(t)$$

sono ordinatamente la funzione incognita e le sue prime n derivate.

2°) Le funzioni

$$f(u_0\ ,\ u_1\ , \ldots,\ u_{n-1}) \qquad \text{con } u_r \in (-\infty\ ,\ +\infty) \qquad (r = 0,\ 1,\ \ldots,\ n-1),$$

$$\varphi(t) \qquad \text{con } t \in (t_0\ ,\ +\infty)$$

sono date funzioni che si suppongono *univoche* e *reali*, *continue* e *lipschitziane*, ed ancora $\varphi(t)$ si suppone *periodica* e di *periodo minimo* $\tau\ (>0)$.

Inoltre, nell'istante iniziale t_0, fissato nello spazio totalmente illimitato $(u_0\ ,\ u_1\ , \ldots,\ u_{n-1})$ un punto $A_0 \equiv (a_{00},\ a_{01},\ \ldots,\ a_{0,n-1})$, e, in corrispondenza, fissate per la funzione incognita $x(t)$ *le condizioni iniziali*

$$(0) \qquad x(t_0) = a_{00}\ , \qquad x^{(1)}(t_0) = a_{01}\ , \qquad \ldots, \qquad x^{(n-1)}(t_0) = a_{0,n-1}\ ,$$

si suppone che *la data funzione* $f(u_0\ ,\ u_1\ , \ldots,\ u_{n-1})$ *sia tale che il problema individuato analiticamente dall'equazione* $E^{(n)}$ *e dalle condizioni iniziali* (0) *abbia in* $(t_0, +\infty)$ *una ed una sola soluzione dipendente in modo continuo dai dati iniziali.*

3. - Le progressioni di aritmeticità dell'equazione $E^{(n)}$.

Le progressioni di aritmeticità già studiate in generale nel lavoro [**11**]$_1$, avranno qui per « generatrice » una soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale $E^{(n)}$ e per « ragione » il numero τ [>0, periodo minimo del secondo membro $\varphi(t)$ di $E^{(n)}$], cioè saranno della forma:

$$(x)_\tau: \qquad x(t)\ , \quad x(t+\tau)\ , \quad x(t+2\tau)\ , \quad \ldots, \quad x(t+\nu\tau)\ , \quad \ldots .$$

Tali successioni si diranno brevemente *le progressioni di aritmeticità della equazione* $E^{(n)}$.

(Nel seguito la frase « progressione di aritmeticità » verrà abbreviata scrivendo: pr. di ar.).

Si nota subito che le *varie funzioni di* $(x)_\tau$ *sono tutte soluzioni di* $E^{(n)}$ *e quindi le varie pr. di ar. di* $E^{(n)}$ *sono dei particolari insiemi di soluzioni di* $E^{(n)}$.

Vale in primo luogo il teorema seguente (cfr. [**11**]$_1$, p. 152):

Teorema (α). « Se la soluzione $x(t)$ di $E^{(n)}$ è limitata e uniformemente continua nell'intervallo $(t_0, +\infty)$, allora la pr. di ar. $(x)_\tau$ di $E^{(n)}$ ha almeno un'accumulazione (continua) in qualunque intervallo limitato (t_0, T) con $t_0 < T < +\infty$. »

4. - Le trans-accumulazioni di una pr. di ar. di $E^{(n)}$.

Dal precedente Teorema (α) discende facilmente la seguente

Osservazione. *Detti T, T' due istanti, con $t_0 < T < T'$, la pr. di ar. $(x)_\tau$ ha nell'intervallo (t_0, T) almeno un'accumulazione che prolungata convenientemente per continuità dà un'accumulazione nell'intervallo più ampio (t_0, T').*

Invero, detta « $\lambda(t)$, $t \in (t_0, T')$ » un'accumulazione di $(x)_\tau$ in (t_0, T'), se ne consideri la sottofunzione « $\lambda(t)$, $t \in (t_0, T)$ »: quest'ultima è certamente accumulazione per $(x)_\tau$ in (t_0, T) e si prolunga con continuità in (t_0, T') nell'accumulazione considerata inizialmente.

L'osservazione ora fatta ed altre ragioni, che si comprenderanno nel seguito, inducono a porre (v. [**11**]$_3$, p. 60) la seguente

Definizione. Dato un insieme $\mathscr{I}$ di funzioni, di una variabile t, univoche e reali in un intervallo $(t_0, +\infty)$, una funzione « $\lambda(t)$, $t \in (t_0, +\infty)$ », appartenente o no ad $\mathscr{I}$, si dirà una « trans-accumulazione dell'insieme $\mathscr{I}$ » quando ogni sua sottofunzione « $\lambda(t)$, $t \in (t_0, T)$ », con $t_0 < T < +\infty$, è accumulazione di $\mathscr{I}$. (Naturalmente, al diagramma di una trans-accumulazione spetterà pure il nome di trans-accumulazione.)

Il precedente Teorema (α) si può, quindi, presentare nella forma seguente:

Teorema $(\alpha)'$. « Se la soluzione $x(t)$ di $E^{(n)}$ è limitata e uniformemente continua nell'intervallo $(t_0, +\infty)$, allora la pr. di ar. $(x)_\tau$ di $E^{(n)}$ ha in $(t_0, +\infty)$ almeno una trans-accumulazione (continua). »

È bene qui tenere subito presente che una trans-accumulazione può essere, e anche non essere, un'accumulazione in $(t_0, +\infty)$ (2).

(2) A questo proposito sono espressivi i due esempi indicati in [**11**]$_3$ (pp. 60-61).

Con il concetto di trans-accumulazione il teorema V di [**11**]$_1$ (p. 157) si enuncia allora così:

Teorema (β). « Affinchè la pr. di ar. $(x)_\tau$ abbia in $(t_0, +\infty)$ un numero complessivo finito m ($\geqslant 1$) di trans-accumulazioni distinte, è necessario e sufficiente che $(x)_\tau$ abbia una trans-accumulazione periodica di periodo $m\tau$ e, quando è $m > 1$, non di periodi τ, 2τ, ..., $(m-1)\tau$. »

5. - Ricerca delle soluzioni periodiche dell'equazione $E^{(n)}$.

Premetto il seguente

Teorema I. « Se esistono delle soluzioni periodiche per l'equazione differenziale $E^{(n)}$, i periodi (positivi) minimi di tali soluzioni appartengono necessariamente alla successione

$$\tau, \qquad 2\tau, \qquad 3\tau, \quad \ldots .$$

Inoltre, se $\bar{x}(t)$, $t \in (t_0, +\infty)$ è una soluzione periodica di periodo minimo $m\tau$, con l'intero $m > 1$, le m funzioni

$$\bar{x}(t), \quad \bar{x}(t+\tau), \quad \bar{x}(t+2\tau), \; \ldots, \quad \bar{x}(t+(m-1)\tau)$$

sono tutte soluzioni distinte e periodiche di $E^{(n)}$. »

Per la dimostrazione rimando a [**11**]$_3$ (p. 62).

Nel seguito indicherò con

$$x^*(t), \qquad\qquad t \in (t_0, +\infty)$$

una soluzione (eventuale) dell'equazione differenziale $E^{(n)}$, soddisfacente alla proprietà di essere « limitata in $(t_0, +\infty)$ insieme alle sue $n-1$ prime derivate ». Dirò *condizione* $\mathscr{C}^*$ una tale proprietà.

Teorema II. « Le trans-accumulazioni (sempre esistenti) di una pr. di ar.

$$(x^*)_\tau: \qquad x^*(t), \qquad x^*(t+\tau), \qquad x^*(t+2\tau), \quad \ldots$$

sono tutte soluzioni, in $(t_0, +\infty)$, dell'equazione differenziale $E^{(n)}$ e soddisfano la condizione $\mathscr{C}^*$. »

La dimostrazione di questa affermazione è data in [**11**]$_3$.

Associando al Teorema II il precedente Teorema (β) si ottiene facilmente il seguente

Teorema III. « Affinchè un'equazione differenziale $E^{(n)}$ abbia delle soluzioni periodiche è necessario e sufficiente che esista una pr. di ar. $(x^*)_\tau$ di $E^{(n)}$ con un numero complessivo finito di trans-accumulazioni distinte. »

Dal Teorema III, tenendo presente il Teorema I, si ha il

Teorema IV. « Se esiste una pr. di ar. $(x^*)_\tau$ dell'equazione differenziale $E^{(n)}$ con un numero complessivo finito $m\,(\geqslant 1)$ di trans-accumulazioni distinte, e se $\xi^*(t)$ (³) è una di queste trans-accumulazioni, allora le m trans-accumulazioni distinte sono

$$\xi^*(t), \qquad \xi^*(t+\tau), \qquad \ldots, \qquad \xi^*(t+(m-1)\tau);$$

esse sono tutte soluzioni periodiche di $E^{(n)}$ ed hanno lo stesso periodo minimo $m\tau$. »

Osservazione. Quando l'equazione differenziale $E^{(n)}$ ha più soluzioni soddisfacenti l'ipotesi del Teorema IV, e gli interi positivi m corrispondenti sono fra loro diversi, allora, si possono avere contemporaneamente, per l'equazione differenziale $E^{(n)}$ soluzioni armoniche (di periodo τ) e soluzioni subarmoniche (di periodo minimo un multiplo di τ). Ciò è convalidato dagli interessanti esempi dati da J. L. MASSERA in [**12**].

A complemento del Teorema IV si può aggiungere:

Nella ipotesi del Teorema IV, *le m successioni*

$$\begin{array}{llll}
x^*(t), & x^*(t+m\tau), & x^*(t+2m\tau), & \ldots, \\
x^*(t+\tau), & x^*(t+(m+1)\tau), & x^*(t+(2m+1)\tau), & \ldots, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \\
x^*(t+(m-1)\tau), & x^*(t+(2m-1)\tau), & x^*(t+(3m-1)\tau), & \ldots
\end{array}$$

[che sono tutte pr. di ar. aventi per generatrici ordinatamente le funzioni: $x^*(t)$, $x^*(t+\tau)$, ..., $x^*(t+(m-1)\tau)$ e aventi tutti la stessa ragione $m\tau$] *sono convergenti, ed i limiti sono proprio le m soluzioni periodiche distinte aventi lo stesso periodo minimo $m\tau$.*

(³) Una trans-accumulazione di $(x^*)_\tau$, in quanto è una funzione che soddisfa la condizione $\mathscr{C}^*$ (cfr. Teorema II), è pure contrassegnata con asterisco.

Ciò discende dalla dimostrazione del precedente Teorema (β) [cioè da quella del teorema V di $[1]_1$ (p. 157)].

È utile sottolineare che dalla conclusione precedente risulta:

Un eventuale moto periodico di $E^{(n)}$ *è sempre approssimato da infiniti moti, della stessa* $E^{(n)}$, *formanti una progressione di aritmeticità avente per generatrice una delle precedenti funzioni* $x^*(t)$, $x^*(t+\tau), \dots, x^*(t+(m-1)\tau)$ *e per ragione* $m\tau$.

Bibliografia.

[1] L. CAPRIOLI, *Su alcuni sistemi non lineari retti da equazioni del terzo e quinto ordine*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 15-33.

[2] L. CESARI, *Asymptotic behavior and stability problems in ordinary differential equations*, Springer, Berlin 1963.

[3] G. COLOMBO, *Sopra il fenomeno dell'azione asincrona*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **24** (1955), 353-395. *Sulle oscillazioni non-lineari di combinazione*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **27** (1957), 162-175.

[4] C. H. COOKE and R. A. STRUBLE, *On the existence of periodic solutions and normal mode vibrations of nonlinear systems*, Quart. Appl. Math. **24** (1966), 177-193.

[5] L. G. DEYSACH and G. R. SELL, *On the existence of almost periodic motions*, Michigan Math. J. **12** (1965), 87-95.

[6] J. O. C. EZEILO and H. O. TEJUMOLA, *Boundedness and periodicity of solutions of a certain system of third-order non-linear differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **74** (1966), 283-316.

[7] N. FORBAT et A. HUAUX, *Sur les solutions périodiques d'équations différentielles non linéaires: I. Existence et construction*, Bul. Inst. Politehn. Iasi **13** (**17**) (1967), 47-54. *II. Stabilité asymptotique*, Bul. Inst. Politehn. Iasi **13** (**17**) (1967), 67-70.

[8] D. GRAFFI, *Forced oscillations for several nonlinear circuits*, Ann. of Math. **54** (1951), 262-271. *Sulle oscillazioni forzate nei sistemi non lineari a due gradi di libertà*, Rend. Acc. Naz. Lincei (8) **16** (1954), 176-180.

[9] P. E. W. GRENSTED, *Some solutions of a nonlinear differential equation of high order*, Quart. Appl. Math. **24** (1966), 225-238.

[10] W. HAHN, *Stability of Motion*, Springer-Verlag, Berlin 1967.

[11] B. MANFREDI, *Su le progressioni di aritmeticità aventi funzioni di accumulazione periodiche*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 149-159. *Esistenza e non esistenza di soluzioni periodiche in un problema di Meccanica non lineare*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **6** (1967), 309-316. *Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des solutions périodiques de certaines équations différentielles non linéaires, d'ordre* $n \geqslant 2$, Colloque de Mons 1969, pp. 58-70.

[12] J. L. MASSERA, *The number of subharmonic solutions of non-linear differential equations of the second order*, Ann. of Math. **50** (1949), 118-126. *The existence of periodic solutions of systems of differential equations*, Duke Math. J. **17** (1950), 457-475.

[13] R. REISSIG, G. SANSONE und R. CONTI, *Qualitative Theorie nichtlinear Differentialgleichungen*, Cremonese, Roma 1963.

[14] G. R. SELL, *Periodic solutions and asymptotic stability*, J. Differential Equations **2** (1966), 143-157.

[15] H.O. TEJUMOLA, *Boundedness and periodicity of solutions of certain fourth-order differential equations*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **80** (1968), 177-196.

[16] G. VILLARI, *Criteri di esistenza di soluzioni periodiche per particolari classi di equazioni differenziali del terz'ordine non lineari*, Le Matematiche **19** (1964), 70-86. *Soluzioni periodiche di una classe di equazioni differenziali del terz'ordine quasi lineari*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **83** (1966), 103-110.

Summary.

Moving from the concept of «progression of arithmeticity» (abbrev. pr. of ar.) and from the one of «trans-accumulation», we are studying the pr. of ar. $(x^*)_\tau$ *generated from a solution* $x^*(t)$ *limited (together with its first* $n-1$ *derivatives) of a n-order nonlinear differential equation* $E^{(n)}$. *Here we want to precise and complete the following results we have obtained in* [11]:

i) *The surely existing trans-accumulations of such pr. of ar. are all* $E^{(n)}$ *solutions.*

ii) *These trans-accumulations, if in m-finite number* ($m>1$)*, and only in this case, are all periodic solutions and besides they all have the same minimum period* $m\tau$.

iii) *The m-periodic trans-accumulations are the limits of m-pr. of ar. having as generatrix respectively:* $x^*(t)$, $x^*(t+\tau)$, ..., $x^*(t+(m-1)\tau)$, *and having all the same* $m\tau$ *reason.*

* * *