Riv. Mat. Univ. Parma (2) **10** (1969), 81-89

MARIO A. PUGLISI (*)

# Intorno alle funzioni reali semicontinue che sono limiti di successioni monotone di funzioni continue. (**)

**Introduzione.**

Gli spazi topologici perfettamente normali, come è noto (cfr. [1], [4] e [5]), vengono caratterizzati dal fatto che in essi ogni funzione reale semicontinua è limite di una successione monotona di funzioni continue.

Ciò induce a porre la questione di riconoscere quali siano le funzioni reali (semicontinue) in uno spazio topologico qualunque che risultino limiti di successioni monotone di funzioni continue. Qui si dà risposta a questa domanda stabilendo che se $f$ è una funzione reale sullo spazio topologico $E$, tale $f$ risulta limite di una successione monotona di funzioni continue se e solo se essa è semicontinua nella topologia definita su $E$ da un « écart » tale che la topologia da questo dedotta su $E$ sia meno fine di quella di $E$.

La caratterizzazione degli spazi perfettamente normali di cui sopra consegue in modo ovvio assieme ad una caratterizzazione degli spazi topologici pseudocompatti secondo HEWITT (cfr. [2] e [5]).

1. – Premettiamo, in una possibile versione, un risultato sostanzialmente noto relativo a successioni di funzioni continue.

Proposizione 1. *Sia* $(E, \mathcal{T})$ *uno spazio topologico e sia* $(f_n)_{n \in N}$ *una successione di funzioni reali continue definite in* $E$. *Allora esiste una semidistanza* $d$

(*) Indirizzo: Istituto di Analisi Matematica, Università, 70100 Bari, Italia.
(**) Lavoro eseguito nell'ambito dei Contratti di Ricerca del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R. per il 1968-69. — Ricevuto: 9-XII-1969.

*su* $E$ (1) *tale che, denotata con* $\mathcal{T}_d$ *la topologia su* $E$ *definita da* $d$, *risulta che*:

1°) *ogni* $f_n$ *è (uniformemente) continua in* $E$ *per* $\mathcal{T}_d$,

2°) $\mathcal{T}_d$ *è meno fine di* $\mathcal{T}$.

Dimostrazione. Posto, per ogni $(x, y) \in E \times E$,

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|},$$

si riconosce facilmente che la funzione reale $d$ così definita è una semidistanza su $E$ (2).

Dopo ciò, per un $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+^*$, sia $\delta = \inf(\varepsilon/2^{n+1}, 1/2^{n+1})$ con $n \in \boldsymbol{N}$ prefissato. Se, allora, $x$ ed $y$ sono elementi di $E$ tali che $d(x, y) < \delta$, risulta

$$\frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} < \delta$$

e, quindi,

$$|f_n(x) - f_n(y)| < 2^n\delta + 2^n\delta\,|f_n(x) - f_n(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{1}{2}\,|f_n(x) - f_n(y)|$$

e, poi, $|f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$.

Si è, così, dimostrato che ogni $f_n$ è (uniformemente) continua in $E$ per $\mathcal{T}_d$.

Inoltre, se $x \in E$ e $r \in \boldsymbol{R}_+^*$, si assuma $p \in \boldsymbol{N}$ tale che per ogni $y \in E$ si abbia

$$\sum_{n=p+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} < \frac{r}{2}.$$

Per la continuità di ogni $f_n$ in $(E, \mathcal{T})$ esiste un intorno $V$ di $x$ in $(E, \mathcal{T})$ tale che per ogni $y \in V$ si abbia

$$\sum_{n=0}^{p} \frac{1}{2^n} \frac{|f_n(x) - f_n(y)|}{1 + |f_n(x) - f_n(y)|} < \frac{r}{2}.$$

---

(1) » Écart « secondo Bourbaki e altri Autori.

(2) Si tenga presente che, denotata con $\varphi$ l'applicazione di $\boldsymbol{R}_+$ in $\boldsymbol{R}$ definita ponendo, per ogni $x \in \boldsymbol{R}_+$, $\varphi(x) = x/(1 + x)$, $\varphi$ verifica le seguenti due condizioni:

$$x, y \in \boldsymbol{R}_+,\ x < y \implies \varphi(x) < \varphi(y), \qquad x, y \in \boldsymbol{R}_+ \implies \varphi(x + y) \leqslant \varphi(x) + \varphi(y).$$

Dunque, per ogni $y \in V$ si ha $d(x, y) < r$, cioè $V$ è contenuto nella sfera aperta di centro $x$ e raggio $r$. Da qui consegue che $\mathcal{T}_d$ è meno fine di $\mathcal{T}$ (3).

È di particolare utilità la successiva

Proposizione 2. *Sia $H$ un sottospazio vettoriale dello spazio vettoriale $\mathcal{F}(E, \boldsymbol{R})$ delle funzioni reali sull'insieme $E$ chiuso per la topologia della convergenza uniforme su $E$ e sia $(f_n)_{n \in N}$ una successione monotona crescente di elementi di $H$ avente $f \in \mathcal{F}(E, \boldsymbol{R})$ come limite e verificante la condizione seguente:*

$$(*) \qquad \exists\, M \in \boldsymbol{R}_+^* \ni' \forall\, n \in \boldsymbol{N}: \qquad f_{n+1} - f_n \leqslant M \cdot 1_E \,.$$

*Allora, esiste una successione monotona crescente $(g_n)_{n \in N}$ di elementi di $H$ avente ancora $f$ come suo limite e verificante le condizioni seguenti:*

1) $\forall\, n \in \boldsymbol{N}$: $f_n \leqslant g_n$ ,

2) $\nu \in \boldsymbol{N},\ g_\nu = f_\nu \implies \forall\, n \in \boldsymbol{N},\ \nu \leqslant n$: $f_n = f$.

Dimostrazione. Sia $(e_n)_{n \in N}$ una successione monotona decrescente di numeri reali positivi e non maggiori di 1, tale che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} e_n$ sia convergente.

La serie $\sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot (f_{n+k+1} - f_{n+k})$, essendo $e_k \cdot (f_{n+k+1} - f_{n+k}) \leqslant e_k\, M \cdot 1_E$ per ogni $k \in \boldsymbol{N}$, è uniformemente convergente. Pertanto posto, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$,

$$(1) \qquad f_n^* = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot (f_{n+k+1} - f_{n+k}) \,,$$

a causa delle ipotesi fatte su $H$, risulta $f_n^* \in H$. È, inoltre,

$$0_E \leqslant f_n^* = \sum_{k=n}^{\infty} e_{k-n} \cdot (f_{k+1} - f_k) \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} (f_{k+1} - f_k)$$

donde, essendo convergente la serie $\sum_{k=0}^{\infty} (f_{k+1} - f_k)$, risulta

$$\lim_{n \to \infty} f_n^* = 0_E \,.$$

---

(3) Si noti che il risultato precedente, con dimostrazione consimile, sussiste nel caso più generale in cui ciascuna $f_n$ assuma valori in uno spazio semimetrico $(E_n, d_n)$. Basterà assumere in tal caso, per ogni $(x, y) \in E \times E$,

$$d(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{d_n(f_n(x), f_n(y))}{1 + d_n(f_n(x), f_n(y))} \,.$$

Una siffatta presentazione consente, ad esempio, di riconoscere la metrizzabilità dello spazio prodotto di una successione di spazi semimetrici.

Pongasi, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$, $g_n = f_n + f_n^*$. Evidentemente, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ è $g_n \in H$ e anche, a causa di (2) e delle ipotesi, $\lim_{n \to \infty} g_n = f$ e $f_n \leqslant g_n$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$. È, inoltre, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$,

$$g_n = f_n + \sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot (f_{n+k+1} - f_{n+k}) \leqslant$$

$$\leqslant f_n + e_0 \cdot (f_{n+1} - f_n) + \sum_{k=1}^{\infty} e_k \cdot (f_{n+k+1} - f_{n+k}) \leqslant f_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} e_{k+1} \cdot (f_{(n+1)+k+1} - f_{(n+1)+k})$$

$$\leqslant f_{n+1} + \sum_{k=0}^{\infty} e_k \cdot (f_{(n+1)+k+1} - f_{(n+1)+k}) = f_{n+1} + f_{n+1}^* = g_{n+1}\,.$$

Dunque, la $(g_n)_{n \in N}$ è monotona crescente.

Da ultimo, sia $\nu \in \boldsymbol{N}$ tale che $g_\nu = f_\nu$. È, allora, $f_\nu^* = 0_E$ e, quindi, a causa di (1), $f_{\nu+k+1} = f_{\nu+k}$ per ogni $k \in \boldsymbol{N}$. Pertanto $f_n = f_\nu$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ tale che $\nu \leqslant n$ e, quindi, $f = f_n$ per $\nu \leqslant n$.

Osservazione 1. Nelle ipotesi e con le notazioni della Proposizione precedente, se, di più, esistono $\alpha \in \boldsymbol{R}$ e $\beta \in \boldsymbol{R}$ tali che

$$\forall\, x \in E: \quad \alpha < f(x) < \beta, \qquad \forall\, n \in \boldsymbol{N}: \quad \alpha \cdot 1_E \leqslant f_n \leqslant \beta \cdot 1_E\,,$$

allora si ha anche che

$$\forall\, n \in \boldsymbol{N},\ \forall\, x \in E: \quad \alpha < \psi_n(x) < \beta.$$

Una conseguenza della Proposizione precedente viene indicata nel successivo

Corollario 1. *Se $E$ è uno spazio topologico, affinchè ogni funzione reale semicontinua inferiormente in $E$ sia limite di una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$, occorre e basta che ciò accada per le funzioni reali semicontinue inferiormente che sono limitate inferiormente in $E$.*

Dimostrazione. La necessità è ovvia. Proviamo la sufficienza. Sia $f$ una funzione reale semicontinua inferiormente in $E$ e sia $g = \varphi \circ f$, dove $\varphi$: $\boldsymbol{R} \to ]-1, 1[$ è definita nel modo seguente

$$\forall\, x \in \boldsymbol{R}: \quad \varphi(x) = \frac{x}{1 + |x|}\,.$$

La $\varphi$ ha come inversa la $\psi$: $]-1, 1[ \to \boldsymbol{R}$ definita nel modo seguente

$$\forall x \in ]-1, 1[: \quad \psi(x) = \frac{x}{1 - |x|}.$$

La $g$, al pari di $f$, è semicontinua inferiormente in $E$ e per ogni $x \in E$ risulta $-1 < g(x) < 1$. A causa delle ipotesi, esiste, allora, una successione monotona crescente $(g_n)_{n \in N}$ di funzioni reali continue in $E$ che ha $g$ come suo limite e supponiamo, come è lecito, che per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ risulti $-1_E \leqslant g_n \leqslant 1_E$.

Per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ risulta, allora, $g_{n+1} - g_n \leqslant 2 \cdot 1_E$. A causa del risultato della Proposizione 2, $\mathscr{C}(E, \boldsymbol{R})$, insieme delle funzioni reali continue in $E$, essendo chiuso per la topologia della convergenza uniforme, esiste una successione monotona crescente $(h_n)_{n \in N}$ di funzioni reali continue in $E$ tale che $\lim\limits_{n \to \infty} h_n = g$ e $g_n \leqslant h_n$ per ogni $n \in \boldsymbol{N}$. Evidentemente, per quanto è stato notato nell'Osservazione 1, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ e per ogni $x \in E$ risulta $-1 < h_n(x) < 1$. Dopo ciò, posto, come è lecito, $f_n = \psi \circ h_n$, la $(f_n)_{n \in N}$ è una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$ convergente ad $f$.

Sussiste l'ulteriore risultato dovuto a R. BAIRE:

P r o p o s i z i o n e 3 (R. BAIRE). *Sia $d$ una semidistanza su un insieme $E$, sia $A$ una parte di $E$ e sia $f$: $A \to \boldsymbol{R}$ una funzione reale definita in $A$, ivi semicontinua inferiormente e limitata inferiormente da un numero reale $M$. Allora esiste una successione monotona crescente $(\varphi_n)_{n \in N}$ di funzioni reali definite in $E$ verificante le condizioni seguenti*:

1°) $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $M \cdot 1_E \leqslant \varphi_n$,

2°) $\forall (x, y) \in E \times E$, $\forall n \in \boldsymbol{N}$: $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leqslant n\, d(x, y)$,

3°) $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n |_A = f$.

D i m o s t r a z i o n e. Pongasi, per ogni $n \in \boldsymbol{N}$ e per ogni $x \in E$,

$$\varphi_n(x) = \inf_{z \in A} \big(f(z) + n\, d(x, z)\big).$$

Evidentemente si ha che

$$\forall x \in E: \ M \leqslant \varphi_n(x) \leqslant \varphi_{n+1}(x).$$

Sia $(x, y) \in E \times E$ e sia $n \in \boldsymbol{N}$. Per ogni $z \in A$ risulta

$$f(z) + n\, d(x, z) \leqslant f(z) + n\, d(y, z) + n\, d(x, y)$$

e, quindi,

$$\varphi_n(x) \leqslant \varphi_n(y) + n\, d(x,\, y)\,.$$

Analogamente, risulta

$$\varphi_n(y) \leqslant \varphi_n(x) + n\, d(x,\, y)$$

e, quindi, $|\varphi_n(x) - \varphi_n(y)| \leqslant n\, d(x,\, y)$.

Restano così provate 1°) e 2°). Al fine di riconoscere la 3°) osserviamo, in primo luogo, che

$$\forall\, z \in A,\ \forall\, n \in \boldsymbol{N}: \quad \varphi_n(z) \leqslant f(z).$$

Sia, ora, $z \in A$ e sia $\varepsilon \in \boldsymbol{R}_+^*$. Essendo $f$ semicontinua inferiormente in $z$, esiste un $\delta \in \boldsymbol{R}_+^*$ tale che per ogni $x \in A$, con $d(x,\, z) < \delta$, risulti $f(z) - (\varepsilon/2) < f(x)$. Sia $\nu \in \boldsymbol{N}$ tale che

$$\frac{f(z) - (\varepsilon/2) - M}{\delta} < \nu$$

e sia $\nu \leqslant n$. Se $x$ è un arbitrario elemento di $A$ ed è $\delta \leqslant d(x,\, z)$, risulta

$$f(z) - (\varepsilon/2) < M + n\,\delta \leqslant f(x) + n\,\delta \leqslant f(x) + n\, d(x,\, z)\,,$$

mentre, se è $d(x,\, z) < \delta$, risulta

$$f(z) - (\varepsilon/2) < f(x) \leqslant f(x) + n\, d(x,\, z)\,.$$

In ogni caso è, allora, $f(z) - (\varepsilon/2) < f(x) + n\, d(x, z)$ e anche, a causa dell'arbitrarietà di $x$, $f(z) - \varepsilon < \varphi_n(z)$. Questa, assieme alla (1), prova l'asserto.

Corollario 2. *Se $d\colon E \times E \to \boldsymbol{R}$ è una semidistanza sull'insieme $E$ ed $f$ è una funzione reale semicontinua inferiormente in $E$, esiste una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$ convergente ad $f$.*

Dimostrazione. È ovvia conseguenza del risultato del Corollario 1 e della Proposizione 3.

Osservazione 2. Scambiando $f$ in $-f$ e semicontinuità inferiore con semicontinuità superiore, il Corollario 2 può enunciarsi sostituendo semicontinuità inferiore con semicontinuità superiore, crescenza della successione ivi prevista con decrescenza della stessa.

2. – Abbiamo, ora, i mezzi per dimostrare il

Teorema. *Se $f$ è una funzione reale sullo spazio topologico $(E, \mathcal{T})$, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) *$f$ è limite di una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$ (e, quindi, $f$ è semicontinua inferiormente in $E$ per $\mathcal{T}$);*

b) *esiste una semidistanza $d$ su $E$ tale che, detta $\mathcal{T}_d$ la topologia su $E$ dedotta da $d$, $\mathcal{T}_d$ risulta meno fine della topologia $\mathcal{T}$ di $E$ ed $f$ è semicontinua inferiormente in $E$ per $\mathcal{T}_d$.*

Dimostrazione. a) $\Longrightarrow$ b). Consegue dalla Proposizione 1.

b) $\Longrightarrow$ a). È ovvia conseguenza del Corollario 2 non appena si tenga presente che, essendo $\mathcal{T}_d$ meno fine di $\mathcal{T}$, $f$, che è limite di una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$ per $\mathcal{T}_d$, è limite di una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$ per $\mathcal{T}$.

Osservazione 3. Scambiando $f$ con $-f$, anche il risultato del Teorema precedente può enunciarsi sostituendo semicontinuità inferiore con semicontinuità superiore, crescenza con decrescenza.

Dal Teorema precedente, in riferimento a spazi topologici perfettamente normali, consegue una possibile dimostrazione di un risultato ben noto che caratterizza la perfetta normalità (cfr. [7]; oppure [1], p. 299):

Corollario 3. *Se $E$ è uno spazio topologico, le seguenti due proprietà sono equivalenti:*

a) *$E$ è perfettamente normale,*

b) *ogni funzione reale semicontinua inferiormente in $E$ è limite di una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$.*

Dimostrazione. a) $\Longrightarrow$ b). Sia $f$ una funzione reale semicontinua inferiormente in $E$ e sia $B$ una parte numerabile ovunque densa della retta numerica. Per ogni $b \in B$ sia

$$U_b = \overset{-1}{f}(]\, b, \rightarrow [) .$$

Poichè $f$ è semicontinua inferiormente in $E$, $U_b$ è aperto in $E$ e, quindi, a causa di a), esiste una funzione reale $\varphi_b$ continua in $E$ assumente valori in $[0, 1]$

tale che $\overset{-1}{\varphi_b}(1) = \complement_E(U_b)$, cioè $\overset{-1}{\varphi_b}(\complement_R(\{1\})) = U_b$. A causa della Proposizione 1, esiste una topologia $\mathcal{T}_d$ di spazio semimetrico su $E$ meno fine della topologia $\mathcal{T}$ di $E$ per la quale ogni $\varphi_b$ è (uniformemente) continua. Da ciò segue che ogni $U_b$ è aperto in $E$ per $\mathcal{T}_d$.

Ora, se $a$ è un qualunque numero reale, essendo $B$ ovunque denso in $\boldsymbol{R}$, risulta

$$\overset{-1}{f}(]\, a, \rightarrow [) = \bigcup_{b \in B \cap ]a, \rightarrow[} U_b$$

e, quindi, $\overset{-1}{f}(]\, a, \rightarrow [)$ è aperto in $E$ per $\mathcal{T}_d$ il che, a causa della arbitratierà di $a$, prova che $f$ è semicontinua inferiormente in $E$ per $\mathcal{T}_d$ e, allora, la b) consegue dall'implicazione b) $\Longrightarrow$ a) del Teorema.

b) $\Longrightarrow$ a). Sia $G$ un arbitrario insieme aperto in $E$. A causa di b) esiste, allora, una successione monotona crescente di funzioni reali continue in $E$, che si può sempre supporre assumano valori in $[0, 1]$, convergente a $\varphi_G$. Ciò, notoriamente (cfr. ad esempio [1], Prop. III), equivale alla perfetta normalità di $E$.

Un'ulteriore conseguenza del Teorema viene indicata nel successivo, già noto,

Corollario 4. *Se* $(E, \mathcal{T})$ *è uno spazio topologico pseudocompatto secondo E. Hewitt* (4) *ed* $f$ *è una funzione reale definita in* $E$ *limite di una successione monotona crescente (decrescente) di funzioni reali continue in* $E$, $f$ *è dotata di minimo (massimo) valore in* $E$.

Dimostrazione. Consegue da a) $\Longrightarrow$ b) del Teorema se si osserva che, $E$ essendo pseudocompatto, $(E, \mathcal{T}_d)$ lo è del pari poichè $i_E \colon (E, \mathcal{T}) \rightarrow (E, \mathcal{T}_d)$ è continua. Ulteriormente, uno spazio semimetrico pseudocompatto è (numerabilmente) compatto e, da ciò, la tesi.

## Bibliografia.

[1] G. Aquaro: *Intorno alle funzioni della prima classe di Baire ecc.*, Atti e Rel. Accad. Pugl. Sc. **12** (1954).

[2] G. Aquaro: *Ricovrimenti aperti e strutture uniformi sopra uno spazio topologico*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **47** (1959), 319-390.

---

(4) Cioè verifica la condizione seguente: *Ogni funzione reale continua in E ha massimo (o, equivalentemente, minimo) valore in E.*

[3] N. BOURBAKI: *Théorie des Ensembles* (*Fasc. des résultats*) Livre I, 4.ème éd., Hermann, Paris 1958.

[4] N. BOURBAKI: *Topologie Générale* (Chap. 1 et 2), Livre III, 4.ème éd., Hermann, Paris 1966.

[5] E. HEWITT: *Rings of real valued continuous functions*, I, Trans. Ann. Math. Soc. **64** (1948), 45-89.

[6] H. TONG: *Some characterization of normal and perfectly normal space*, Duke Math. J. **19** (1952), 289-292.

## Summary.

*Conditions are given characterizing real functions on topological spaces which are limits of monotone sequences of continuous functions.*

* * *