Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 303-326

ANTONIO FASANO (*)

Una dimostrazione della convergenza del metodo di Rothe per un problema di tipo parabolico. (**)

§ 1. - Introduzione e posizione del problema.

Consideriamo il seguente problema:

$$
(1)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial u}{\partial t} & (0 < x < 1, \quad t > 0) \\[2ex] \lim\limits_{x \to 0+} u(x,\ t) = \varphi(t), \qquad \lim\limits_{x \to 1-} u(x,\ t) = \psi(t), & (t > 0) \\[2ex] \lim\limits_{t \to 0+} u(x,\ t) = F(x) & (0 < x < 1), \end{cases}
$$

dove: $F(x)$ ha derivate continue fino a quella di quarto ordine inclusa nell'intervallo $[0,\ 1]$, $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ hanno derivate prime e seconde continue per $t \geqslant 0$.

Molti Autori, tra i quali C. CORDUNEANU [1], V. V. BOBKOV e O. A. LISKOVETS [2], [3], hanno trattato il problema di costruire la soluzione di (1) con il metodo di E. ROTHE [4] (1). Però, per quanto mi risulta, questi Autori hanno

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico « Ulisse Dini » (viale Morgagni 67/A), Università, 50134 Firenze, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Raggruppamento di Ricerca Matematica n. 6 del C.N.R. per l'anno 1967-68, presso l'Istituto Matematico « U. Dini » dell'Università di Firenze. — Ricevuto: 2-IX-1968.

(1) Intendiamo qui riferirci al cosiddetto « metodo delle rette trasversali », introdotto appunto da E. ROTHE e successivamente studiato da D. R. HARTREE ed altri [5]. Per le notizie bibliografiche cfr. [6], [7], [8], [9]. Molto recentemente è stato applicato anche ai problemi del tipo di STEFAN [10].

considerato, nel contesto di problemi più generali, il problema (1) nelle condizioni sotto le quali la soluzione presenta una notevole regolarità, quale ad esempio la limitatezza delle derivate rispetto alle variabile t. Questa viene a mancare per esempio nel caso in cui sia verificata una almeno delle condizioni:

$$(2) \qquad \lim_{t\to 0+} \varphi(t) \neq \lim_{x\to 0+} F(x), \qquad \lim_{t\to 0+} \psi(t) \neq \lim_{x\to 1-} F(x) \text{ (}^2\text{)}.$$

È d'altra parte noto che, anche nel caso di dati al contorno discontinui, il problema (1) può essere ricondotto ad un problema in cui non vi sono discontinuità sui dati (al contorno), isolando questo ultimo in un secondo problema per il quale le soluzioni sono, ad esempio, tabulate. Tuttavia un uso diretto del metodo di ROTHE ha interesse, prescindendo dai fini del calcolo numerico, per condurre facilmente una analisi delle proprietà generali delle soluzioni dei problemi di diffusione. Infatti, il metodo riduce un problema alle derivate parziali ad un sistema di equazioni differenziali ordinarie e facilita perciò lo studio delle soluzioni. In questo lavoro ci proponiamo, perciò, di provare la convergenza del metodo di ROTHE per la risoluzione del problema (1) anche nel caso riassunto dalle ipotesi (2) (3).

Come è noto (cfr. [**4**]), il metodo consiste nella seguente approssimazione. Scelto arbitrariamente un «istante» $T > 0$ e diviso l'intervallo $[0, T]$ in n parti di ampiezza $\delta = T/n$, la funzione incognita $u(x, t)$ viene approssimata, per $t = t_s = s\,\delta$ $(s = 0, 1, \dots, n)$, ordinatamente con le funzioni $v_s^{(n)}(x)$ (4) definite dal seguente sistema:

$$(3) \qquad \begin{cases} \delta\, v_s''(x) = v_s(x) = v_{s-1}(x) & (0 \leqslant x \leqslant 1; \quad s = 1, 2, \dots, n) \\ v_s(0) = \varphi(t_s) = \varphi_s\,, \qquad v_s(1) = \psi(t_s) = \psi_s\,, & (s = 1, 2, \dots, n) \\ v_0(x) = F(x) & (0 \leqslant x \leqslant 1), \end{cases}$$

che ammette una ed una sola soluzione $v_s(x)$ $(s = 1, 2, \dots, n)$, dove la singola $v_s(x)$ appartiene alla classe C_{4+2s}.

La dimostrazione che verrà data in questo lavoro, e che tiene conto delle ipotesi (2), si basa sui risultati conseguiti da C. PUCCI [**12**], relativi alla compattezza delle successioni di funzioni pseudoequicontinue, risultati che lo stesso

(2) In [**1**] il dominio considerato non è il semplice strato $0 < x < 1$, ma il semispazio $x > 0$. Le difficoltà cui si accenna sono però di ugual natura.

(3) Una prova numerica della convergenza in condizioni simili è stata data per un classico problema di diffusione del calore in un semispazio da D. QUILGHINI [**11**].

(4) Scriveremo semplicemente $v_s(x)$ quando ciò non porti equivoco.

Autore ha applicato ad un problema di tipo parabolico, usando il metodo alle differenze finite [13]. Diversamente, tali risultati verranno qui usati per costruire una successione di funzioni convergente mediante le soluzioni $v_s^{(n)}(x)$ del sistema (3). Precisamente le dimostrazioni date si basano sulle definizioni, poste in [12], di pseudoequicontinuità, di biconvergenza ed in particolare sui teoremi III, VII, XVIII.

Il procedimento seguito si può così sintetizzare: dopo aver osservato ([11]) che $v_1(x) - v_0(x) \to 0$ in qualsiasi intervallo chiuso contenuto in $(0, 1)$, costruiamo l'insieme chiuso R_ϱ, privando il rettangolo $R \equiv \{0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ degli intorni $\{0 \leqslant x < \varrho,\ 0 \leqslant t < \varrho\}$ e $\{1 - \varrho < x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t < \varrho\}$, dove ϱ è un numero positivo minore di $1 - \varrho$ e del resto arbitrario. Indichiamo poi con A_n $(n = 1, 2, \ldots)$ gli insiemi costituiti dai punti comuni ad R_ϱ ed alle rette $t = t_s^{(n)}$, con $s = 0, 1, \ldots, n$, e in ciascuno di essi definiamo la funzione:

$$u^{(n)}(x, t) = v_s^{(n)}(x) \qquad \text{per} \quad t = t_s^{(n)} \quad (s = 0, 1, \ldots, n). \tag{4}$$

Dimostreremo il

Teorema. *Nelle ipotesi fatte su $F(x)$, $\varphi(t)$, $\psi(t)$ la successione $\{u^{(n)}(x, t)\}$ biconverge in R_ϱ ad una funzione $u(x, t)$, ivi soddisfacente il sistema* (1).

Per l'arbitrarietà di ϱ la funzione $u(x, t)$ così definita soddisfa ad (1) in ogni punto interno al rettangolo R.

L'esistenza della funzione limite di $\{u_s^{(n)}(x, t)\}$ è mostrata nel § 2. Nel § 3 si dimostra che essa è soluzione di (1), mentre nel § 4 vengono dimostrati alcuni teoremi semplicemente enunciati nei §§ 2 e 3. Infine nel § 5 si dimostra come possano ridursi le ipotesi assunte sui dati al contorno.

§ 2. - Esistenza della funzione limite.

Il teorema VII di [12] consente di affermare che dalla successione $\{u^{(n)}(x, t)\}$ può estrarsi una sottosuccessione biconvergente in R_ϱ ad una funzione continua $u(x, t)$, qualora venga provato che:

I) la successione di insiemi $\{A_n\}$ converge [5] ad R_ϱ;

II) le funzioni $u^{(n)}(x, t)$ sono equilimitate;

III) le funzioni $u^{(n)}(x, t)$ sono pseudoequicontinue.

Premettiamo, ai fini della dimostrazione della proprietà III, il seguente

[5] Per le definizioni di limite inferiore (Li), limite superiore (Ls) e limite di una successione di insiemi vedasi ad esempio [14], pagg. 241-245.

Teorema 1. *Le funzioni* $u_x^{(n)}(x, t)$, $u_{xx}^{(n)}(x, t)$ (6) ($n = 1, 2, \ldots$) *sono equilimitate.* (Verrà provato nel § 4.)

I) Dimostriamo che $\operatorname{Li}_{n\to\infty} A_n = \operatorname{Ls}_{n\to\infty} A_n = R_\varrho$. Preso infatti un qualunque punto di R_ϱ ed un suo ε-intorno, per $n > T/\varepsilon$, A_n ha certamente punti in quell'intorno, mentre per ogni punto esterno ad R_ϱ esiste un intorno che ha intersezione vuota con tutti gli A_n: dunque $\operatorname{Li}_{n\to\infty} A_n = R_\varrho$ ed inoltre $R_\varrho \supseteq \operatorname{Ls}_{n\to\infty} A_n$. Perciò, essendo $\operatorname{Ls}_{n\to\infty} A_n \supseteq \operatorname{Li}_{n\to\infty} A_n$, segue l'asserto.

II) La equilimitatezza delle funzioni $u^{(n)}(x, t)$ segue immediatamente da quella delle funzioni $v_s^{(n)}(x)$, per le quali si ha:

$$|v_s^{(n)}(x)| \leqslant \max\left(|F(x)|,\ |\varphi(t)|,\ |\psi(t)|\right)$$

$$\text{per } x \in [0, 1],\ t \geqslant 0;\ n = 1, 2, \ldots;\ s = 0, 1, \ldots, n$$

(cfr. [**11**], § 3).

III) Perchè le funzioni $u^{(n)}(x, t)$ siano pseudoequicontinue occorre che, scelto $\varepsilon > 0$ arbitrario, esistano un numero $\delta_\varepsilon > 0$ ed un intero n_ε tali che, presi due punti (x, t), (x', t') in A_n, risulti:

$$|u^{(n)}(x, t) - u^{(n)}(x', t')| < \varepsilon, \qquad \text{per } n > n_\varepsilon \text{ e per } |x - x'| + |t - t'| < \delta_\varepsilon .$$

Tale proprietà segue osservando che, in forza del Teorema 1, si ha:

$$|u^{(n)}(x, t_s) - u^{(n)}(x', t_s)| < M|x - x'|, \tag{5}$$

$$|u^{(n)}(x', t_s) - u^{(n)}(x', t_{s-1})| < N\delta, \tag{6}$$

comunque si considerino in A_n i punti (x, t_s), (x', t_s), (x', t_{s-1}), per $n = 1, 2, \ldots$, $s = 1, 2, \ldots, n$, con M ed N costanti positive indipendenti da n ed s.

Perciò, scelto $\varepsilon > 0$ e del resto arbitrario, e posto $\delta_\varepsilon = \min\left(\dfrac{\varepsilon}{2M}, \dfrac{\varepsilon}{2N}\right)$, qualunque sia la coppia di punti (x, t), (x', t') appartenenti ad un A_n, si ha:

$$|u^{(n)}(x, t) - u^{(n)}(x', t')| < \varepsilon, \qquad \text{per } |x - x'| + |t - t'| < \delta_\varepsilon . \tag{7}$$

Occorre precisare che soltanto per $n \geqslant n_\varepsilon$, con $n_\varepsilon = E(T/\delta_\varepsilon)$ (7), i valori di

---

(6) Le funzioni $u^{(n)}(x, t)$ ammettono derivate rispetto ad x, continue rispetto ad x, fino a quelle di quarto ordine.

(7) Indico con $E(a)$ il massimo intero contenuto in a.

t e t' nella (7) possono essere diversi. Infatti solo in tal caso esistono in A_n linee che distano fra loro meno di δ_ε.

Concludendo, in virtù delle dimostrazioni fatte in questo paragrafo, è lecito affermare che in R_ϱ è definita una funzione continua $u(x, t)$, limite di una opportuna sottosuccessione estratta da $\{u^{(n)}(x, t)\}$.

§ 3. - La funzione limite come soluzione del problema (1).

Dimostriamo preliminarmente che $u(x, t)$ è derivabile almeno due volte rispetto ad x ed una volta rispetto a t.

Sussiste infatti il seguente teorema, la cui dimostrazione è data nel § 4:

Teorema 2. *Le funzioni* $u^{(n)}_{xxx}(x, t)$ *e* $u^{(n)}_{xxxx}(x, t)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *sono equilimitate.*

Dai teoremi 1 e 2, ragionando come nel paragrafo precedente, si conclude che:

Le funzioni $u^{(n)}_x(x, t)$ *e* $u^{(n)}_{xx}(x, t)$, $(n = 1, 2, \ldots)$, *sono pseudoequicontinue.*

Alle successioni $\{u^{(n)}_x(x, t)\}, \{u^{(n)}_{xx}(x, t)\}$ può essere così applicato il teorema VII di [**12**]: esistono sottosuccessioni $\{u^{(n')}_x(x, t)\}$, $\{u^{(n')}_{xx}(x, t)\}$ [8] biconvergenti in R_ϱ a due funzioni continue $u_1(x, t)$ e $u_2(x, t)$, per le quali dimostriamo il seguente

Teorema. *Le funzioni* $u_1(x, t)$, $u_2(x, t)$ *sono rispettivamente le derivate* $u_x(x, t)$, $u_{xx}(x, t)$ *della funzione limite.*

Poichè la sottosuccessione $\{u^{(n')}(x, t)\}$ biconverge in R_ϱ ad $u(x, t)$, per il teorema III di [**12**], fissato arbitrariamente un numero positivo ε, esistono corrispondentemente due numeri δ'_ε e n'_ε tali che, comunque si prendano:

$$(8) \qquad (x, t),\ (x', t) \in R_\varrho; \qquad (x, t'),\ (x', t') \in A_n, \quad x \neq x',$$

con $n' > n'_\varepsilon$ e $|t - t'| < \delta'_\varepsilon$, si ha:

$$|u(x, t) - u^{(n')}(x, t')| < \varepsilon/3, \qquad |u(x', t) - u^{(n')}(x', t')| < \varepsilon/3.$$

Si ha perciò:

$$|u(x, t) - u(x', t) - [u^{(n')}(x, t') - u^{(n')}(x', t')]| < 2\varepsilon/3,$$

---

[8] È ovvio come tali sottosuccessioni biconvergenti possano ottenersi estraendo dalle successioni di partenza elementi di uguale indice.

ovvero, per la continuità di $u_x^{(n')}(x, t)$:

$$(9) \qquad | u(x, t) - u(x', t) - (x - x') u_x^{(n')}[x - \vartheta \cdot (x - x'), t'] | < 2\varepsilon/3,$$
$$0 < \vartheta < 1.$$

In forza del teorema III di [**12**], applicato alla successione $\{u_x^{(n')}(x, t)\}$, biconvergente in R_ϱ ad $u_1(x, t)$, esistono due numeri δ_ε'' e n_ε'' tali che, se $n' > n_\varepsilon''$ e $| t - t' | < \delta_\varepsilon''$, è:

$$(10) \qquad | x - x' | \, | u_x^{(n')}[x - \vartheta \cdot (x - x'), t'] - u_1[x - \vartheta \cdot (x - x'), t] | <$$
$$< | u_x^{(n')}[x - \vartheta \cdot (x - x'), t'] - u_1[x - \vartheta \cdot (x - x'), t] | < \varepsilon/3.$$

Sia dunque $n' > \max(n_\varepsilon', n_\varepsilon'')$ e $| t - t' | < \min(\delta_\varepsilon', \delta_\varepsilon'')$; dalle (8), (9) e (10) si ottiene:

$$| u(x, t) - u(x', t) - (x - x') u_1[x - \vartheta \cdot (x - x'), t] | < \varepsilon,$$

cioè

$$(11) \qquad \frac{u(x, t) - u(x', t)}{x - x'} = u_1[x - \vartheta \cdot (x - x'), t],$$

che per la continuità di $u_1(x, t)$ comporta l'esistenza di $u_x(x, t)$ in R_ϱ e l'uguaglianza:

$$(12) \qquad u_x(x, t) = u_1(x, t).$$

Ripetendo ora il ragionamento per $\{u_{xx}^{(n')}(x, t)\}$, si dimostra che:

$$(13) \qquad u_{xx}(x, t) = u_2(x, t) \qquad \text{in } R_\varrho ,$$

e quindi il teorema.

Infine, con dimostrazione analoga a quella del teorema XVIII di [**12**], si conclude, con modifiche esclusivamente formali, che se dalla successione

$$(14) \qquad \left\{ \frac{u^{(n)}(x, t) - u^{(n)}(x, t - \delta)}{\delta} \right\}$$

può estrarsi una sottosuccessione biconvergente in R_ϱ, il limite di quest'ultima è $u_t(x, t)$. D'altra parte per la definizione (4) di $u^{(n)}(x, t)$ e per la (3_1) la (14) coincide con $\{u_{xx}^{(n)}(x, t)\}$ e dunque, per quanto precedentemente dimostrato,

$u_t(x, t)$ esiste e soddisfa l'equazione:

$$u_t(x, t) = u_{xx}(x, t) \tag{15}$$

in tutti i punti di R_ϱ.

Il dominio di definizione della funzione $u(x, t)$ può essere esteso, sfruttando l'arbitrarietà di ϱ, a tutti i punti interni ad R. Se infatti, per un dato ϱ, un punto (x_0, t_0) interno ad R non appartiene ad R_ϱ, scelto un numero positivo $\varrho' < \varrho$, tale che $(x_0, t_0) \in R_{\varrho'}$, è possibile estrarre dalla successione $\{u^{(n')}(x, t)\}$, biconvergente in R_ϱ, una nuova sottosuccessione $\{u^{(n'')}(x, t)\}$, biconvergente in $R_{\varrho'}$, la cui funzione limite coincide con $u(x, t)$ ovunque in R_ϱ e ne rappresenta quindi l'estensione in $R_{\varrho'} - R_\varrho$.

Inoltre la semplice definizione di biconvergenza in un punto e la continuità delle funzioni $\varphi(t)$ e $\psi(t)$ portano ad affermare che la funzione $u(x, t)$ soddisfa, per ogni $t > 0$, le condizioni imposte per $x = 0$ e $x = 1$. Essendo poi $v_0(x) = F(x)$ e richiamando nuovamente la definizione di biconvergenza, si ha che $u(x, t)$ verifica la condizione iniziale per ogni x diverso da 0 e da 1.

È dunque accertato che tale funzione risolve il problema (1).

La dimostrazione del teorema di convergenza, enunciato nel § **1**, va infine perfezionata, mostrando che la sottosuccessione $\{u^{(n')}(x, t)\}$, per la quale sono state stabilite le dette proprietà di convergenza, può essere identificata con $\{u^{(n)}(x, t)\}$. Tale identificazione è immediata se si fa riferimento alla unicità (9) della soluzione del problema di partenza, come è osservato in [**13**].

§ 4. - Dimostrazioue del Teorema 1.

Poichè, in forza della equilimitatezza delle funzioni $u_{xx}^{(n)}(x, t)$ in A_n, la equilimitatezza di $u_x^{(n)}(x, t)$ segue dalla formula di TAYLOR:

$$u^{(n)}(x', t) = u^{(n)}(x, t) + (x' - x)\, u_x^{(n)}(x, t) + \tfrac{1}{2}(x' - x)^2\, u_{xx}^{(n)}[x + \vartheta \cdot (x' - x)],$$
$$0 < \vartheta < 1,$$

valida ovunque in A_n, il teorema sarà provato se si dimostra la equilimitatezza delle funzioni $u_{xx}^{(n)}(x, t)$.

(9) Il classico teorema di unicità della soluzione dei problemi del tipo (1) ([**15**], pag 35), è sicuramente valido per la classe, includente la $u(x, t)$, delle funzioni limitate per $x \in (0, 1)$, $t \in (0, T]$ e che hanno ivi derivata prima rispetto a t e prima e seconda rispetto ad x continue.

A questo scopo dimostreremo che:

a) *le funzioni* $u_{xx}^{(n)}(x, t)$ *sono equilimitate in* $A_n \cap R'$, *con* $R' \equiv \{\varrho \leqslant x \leqslant \leqslant 1 - \varrho;\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$; b) *le funzioni* $u_{xx}^{(n)}(x, t)$ *sono equilimitate nella rimanente parte di* A_n.

a) La soluzione dell'equazione

$$\delta\, v_1''(x) = v_1(x) - v_0(x), \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1; \quad v_1(0) = \varphi_1\,,\ v_1(1) = \psi_1 \tag{16}$$

è:

$$\begin{aligned} v_1(x) = \frac{1}{D}\Big\{\varphi_1\Big[\exp\Big(\frac{x}{\sqrt{\delta}}\Big) - \exp\Big(-\frac{2-x}{\sqrt{\delta}}\Big)\Big] + \\ + \psi_1\Big[\exp\Big(-\frac{1-x}{\sqrt{\delta}}\Big) - \exp\Big(-\frac{1+x}{\sqrt{\delta}}\Big)\Big]\Big\} + \\ + \frac{1}{D}\int_0^1 \frac{v_0(\xi)}{2\sqrt{\delta}}\Big\{\exp\Big(-\frac{|\xi - x|}{\sqrt{\delta}}\Big) - \exp\Big(-\frac{\xi + x}{\sqrt{\delta}}\Big) + \exp\Big(-\frac{2 - |\xi - x|}{\sqrt{\delta}}\Big) - \\ - \exp\Big(-\frac{2 - (\xi + x)}{\sqrt{\delta}}\Big)\Big\}\, d\xi\,, \end{aligned} \tag{17}$$

dove

$$D = 1 - \exp(-2/\sqrt{\delta}).$$

Per $\varrho \leqslant x \leqslant 1 - \varrho$, quando $\delta \to 0$ tutti i termini della (17) tendono a zero esponenzialmente, ad eccezione di

$$\frac{1}{D}\int_0^1 \frac{v_0(\xi)}{2\sqrt{\delta}} \exp\Big(-\frac{|\xi - x|}{\sqrt{\delta}}\Big)\, d\xi\,. \tag{18}$$

Isoliamo il punto x con un intorno $(x - \sigma,\ x + \sigma)$ interamente contenuto nell'intervallo di integrazione. Tenuto conto che $D \to 1$ esponenzialmente per $\delta \to 0$ e che il contributo dell'integrale sopra scritto negli intervalli $(0,\ x - \sigma)$ e $(x + \sigma,\ 1)$ tende a zero esponenzialmente per $\delta \to 0$, resta da valutare il comportamento di

$$\int_{x-\sigma}^{x+\sigma} \frac{v_0(\xi)}{2\sqrt{\delta}} \exp\Big(-\frac{|\xi - x|}{\sqrt{\delta}}\Big)\, d\xi \tag{19}$$

per $\delta \to 0$.

Si ha

$$v_0(\xi) = v_0(x) + (\xi - x)\, v_0'(x) + \tfrac{1}{2}(\xi - x)\, v_0''[x + \vartheta\cdot(\xi - x)], \qquad 0 < \vartheta < 1. \tag{20}$$

Il contributo del primo termine del secondo membro della (20) nell'integrale (19) è:

$$r_0(x)\left[1-\exp\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{\delta}}\right)\right],$$

il contributo del secondo termine è nullo, mentre quello del terzo è in valore assoluto maggiorato dall'espressione

$$\delta\, L\left[1-\exp\left(-\frac{\sigma}{\sqrt{\delta}}\right)\left(1+\frac{\sigma}{\sqrt{\delta}}+\tfrac{1}{2}\frac{\sigma^2}{\delta}\right)\right],$$

essendo $|v_0''(x)|<L$ in $[0,\ 1]$.

Dalla (16) discende infine:

$$\text{(21)}\qquad |v_1^{(n)''}(x)| = \frac{1}{\delta}\,|v_1^{(n)}(x)-v_0(x)| \leqslant L + O_e \qquad (\varrho\leqslant x\leqslant 1-\varrho;\ n=1,\ 2,\ldots),$$

dove O_e è un infinitesimo per $\delta\to 0$ dell'ordine di $\exp(-1/\sqrt{\delta})$.

Dalla (21), iterando il procedimento, si ha:

$$\text{(22)}\qquad |v_s^{(n)''}(x)|\leqslant L+O_e \qquad (\varrho\leqslant x\leqslant 1-\varrho;\ s=1,\ 2,\ldots,\ n;\ n=1,\ 2,\ldots).$$

Le funzioni $u_{xx}^{(n)}(x,\ t)$ sono perciò equilimitate in $A_n\cap R'$.

b) Le funzioni $v_s^{(n)''}(x)$ sono soluzioni del sistema di equazioni differenziali:

$$\text{(23)}\qquad \delta\, v_s^{\mathrm{IV}}(x) = v_s''(x)-v_{s-1}''(x) \qquad (s=1,\ 2,\ldots,\ n),$$

con le condizioni

$$\text{(23 a)}\qquad v_s''(0)=\frac{\varphi_s-\varphi_{s-1}}{\delta},\qquad v_s''(1)=\frac{\psi_s-\psi_{s-1}}{\delta}\qquad (1<s\leqslant n),$$

$$\text{(23 b)}\qquad v_1''(0)=\frac{\varphi_1-F(0)}{\delta},\qquad v_1''(1)=\frac{\psi_1-F(1)}{\delta}.$$

Dalla (17) avremo allora con ovvie sostituzioni:

$$\text{(24)}\qquad v_1''(x)=\frac{1}{D}\left\{\frac{\varphi_1-F(0)}{\delta}\left[\exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right)-\exp\left(-\frac{2-x}{\sqrt{\delta}}\right)\right]+\right.$$
$$\left.+\frac{\psi_1-F(1)}{\delta}\left[\exp\left(-\frac{1-x}{\sqrt{\delta}}\right)-\exp\left(-\frac{1+x}{\sqrt{\delta}}\right)\right]\right\}+\frac{1}{D}\left[I_1(x)\right.,$$

dove:

(25) $$I_s(x) = \int_0^1 \frac{v''_{s-1}(\xi)}{2\sqrt{\delta}}\, \Xi\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}, \frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right) d\xi \qquad (s = 1, 2, \dots, n),$$

avendo indicato con $\Xi(x/\sqrt{\delta}, \xi/\sqrt{\delta})$ la somma di esponenziali che figura nell'integrale al secondo membro della (17).

Per $\delta \to 0$, se $x = 0$, ovvero se x è infinitesimo di ordine non inferiore a δ, il termine:

(26) $$z_1(x/\sqrt{\delta}) = \frac{\varphi_1 - F(0)}{\delta} \exp(-x/\sqrt{\delta}) \cdot$$

porta nella (24) una singolarità di ordine $1/\delta$, che si riflette, attraverso gli integrali I_s, sulle successive funzioni $v''_s(x)$, ciascuna delle quali, fissato s, ne viene influenzata in un intorno dello zero, pur essendo limitata per $x = 0$ [si ricordino le (23 a) e l'ipotesi di esistenza e continuità di $\varphi'(t)$]. Un fatto strettamente analogo si verifica nell'intorno di $x = 1$.

Scomponiamo $v''_s(x)$ nella somma:

(27) $$v''_s(x) = z_s(x/\sqrt{\delta}) + w_s(x/\sqrt{\delta}) \qquad (1 \leqslant s \leqslant n),$$

dove la funzione z_s, che è singolare per $\delta \to 0$, è definita con la formula ricorrente:

(28) $$z_s(x/\sqrt{\delta}) = \int_0^1 \frac{z_{s-1}(\xi/\sqrt{\delta})}{2\sqrt{\delta}}\, E\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}, \frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right) d\xi \qquad (2 \leqslant s),$$

essendo

(29) $$E(x/\sqrt{\delta}, \xi/\sqrt{\delta}) = \exp(-|\xi - x|/\sqrt{\delta}) - \exp(-(\xi + x)/\sqrt{\delta}).$$

Poichè le w_s sono complessivamente limitate in un intorno dello zero [cfr. le (24), (25) e (27)], la b), e quindi il Teorema 1, sarà provata se faremo vedere che:

α) *definito l'indice* s_ϱ *in modo tale che* $t_{s_\varrho - 1} < \varrho \leqslant t_{s_\varrho}$, *la funzione* $z_{s_\varrho}(x/\sqrt{\delta})$ *resta limitata per* $\delta \to 0$ *per ogni* $x \in [0, 1]$.

Le funzioni z_s dipendono da x soltanto nella forma $x/\sqrt{\delta}$. Posto:

(30) $$y = x/\sqrt{\delta}, \qquad \eta = \xi/\sqrt{\delta},$$

avremo:

$$z_1(y) = \frac{K(\delta)}{\delta} e^{-y}\,, \tag{26'}$$

$$z_s(y) = \int_0^{+\infty} \tfrac{1}{2} z_{s-1}(\eta)\, E(y,\, \eta)\; d\eta \;\;(^{10}) \qquad (2 \leqslant s) \tag{28'}$$

con $K(\delta) = \varphi_1 - F(0)$, funzione limitata di δ, essendo:

$$\lim_{\delta \to 0} K(\delta) = \varphi(0) - F(0).$$

Si ha perciò:

$$z_s(y) = \frac{K}{\delta} P_s(y)\, e^{-y} \qquad (s \geqslant 1) \tag{31}$$

con $P_s(y)$ polinomio in y di grado $s-1$.

Le (26′) e (28) sono equivalenti al sistema:

$$\begin{cases} z_s''(y) = z_s(y) - z_{s-1}(y) & (s \geqslant 2,\; y \geqslant 0) \\ z_s(0) = 0 & \\ \lim\limits_{y \to +\infty} z_s(y) = 0 & \\ z_1(y) = (K/\delta)\, e^{-y} & (y \geqslant 0)\,, \end{cases} \tag{32}$$

dal quale, ricordando la (31), si deduce:

$$\begin{cases} P_s'' - 2P_s' + P_{s-1} = 0 & \\ P_s(0) = 0 & (s \geqslant 2) \\ P_1(y) \equiv 1\,. & \end{cases} \tag{33}$$

---

(10) L'estensione del limite superiore di integrazione a $+\infty$ nella (28′) modifica le $z_s(x/\sqrt{\delta})$ di un infinitesimo O_e. Tale correzione è perciò inessenziale ai fini della dimostrazione della proprietà α).

Posto:

$$P_s(y) = \sum_{k=1}^{s-1} p_{s,k}\, y^k \qquad (s \geq 2, \quad y \geq 0), \tag{34}$$

le (33) forniscono per i coefficienti $p_{s,k}$ le formule ricorrenti:

$$\begin{cases} p_{1,0} = 1 & \\ 2(s-1)\, p_{s,s-1} = p_{s-1,\,s-2} & (s \geq 2) \\ k(k-1)\, p_{s,k} - 2(k-1)\, p_{s,k-1} + p_{s-1,k-2} = 0 & (3 \leq k \leq s-1, \quad s \geq 4) \\ p_{s,2} = p_{s,1} & (s \geq 3). \end{cases} \tag{35}$$

Partendo dalla prima, con l'uso iterato della seconda, si determina:

$$p_{s,s-1} = \frac{1}{2^{s-1}\,(s-1)\,!} \qquad (s \geq 1)\,. \tag{36}$$

Supposti noti i coefficienti $p_{s-i,k-i}$ $(i = 0,\ 1,\ \ldots,\ k-2)$, l'applicazione ripetuta della terza delle (35), con l'uso della quarta dopo l'ultima iterazione, conduce all'espressione di $p_{s,k-1}$:

$$p_{s,k-1} = \frac{k}{2} \left\{ p_{s,k} + \sum_{i=1}^{k-3} \frac{1}{2^i}\, \frac{1}{k(k-1)\ldots(k-i+1)}\, p_{s-i,\,k-i} + \frac{1}{2^{k-3}}\, \frac{1}{k\,!}\, p_{s-k+2,2} \right\}. \tag{37}$$

Dalle (36) e (37) si trova:

$$p_{s,s-2} = \frac{1}{2^s\, 1\,!\, (s-3)\,!} \qquad (s \geq 4) \tag{38}$$

ed ancora dalle (37) e (38):

$$p_{s,s-3} = \frac{s}{2^{s+1}\, 2\,!\, (s-4)\,!} \qquad (s \geq 5)\,. \tag{39}$$

Per induzione si ha infine:

$$p_{s,s-r} = \frac{s(s+1)\dots(s+r-3)}{2^{s+r-2}\,(r-1)!\,(s-r-1)!}\,. \tag{40}$$

Infatti, fissato s ed ammessa la (40) per il valore r, la validità per il valore $r+1$ è provata dalla identità [cfr. anche la (37)]:

$$(*)\qquad \sum_{i=0}^{s-r-2}(s-r-i)\binom{s+r-3-i}{r-2} = \frac{r-1}{r}(s-r-1)\binom{s+r-2}{r-1},$$

che segue da alcune note identità tra i coefficienti binomiali (11).

La (40) può essere scritta nella forma:

$$p_{s,k} = \frac{1}{2\,(k-1)!}\,\frac{(2s)!}{2^{2s}\,s\,(s!)^2}\,\frac{s^2}{\left(s-\frac{1}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)}\,\frac{\prod_{i=0}^{k-2}(s-k+i)}{\prod_{i=0}^{k-2}\left(s-1-\frac{k-i}{2}\right)}\,.$$

---

(11)

$$\text{(a)}\qquad \binom{n}{h} = \binom{n-1}{h-1} + \binom{n-2}{h-1} + \dots + \binom{h-1}{h-1},$$

$$\text{(b)}\qquad h\binom{n+1}{h+1} = n\binom{n-1}{h-1} + (n-1)\binom{n-2}{h-1} + \dots + h\binom{h-1}{h-1}.$$

Si scriva il primo membro della $(*)$ nella forma

$$\sum_{i=0}^{s-r-2}(s+r-2-i)\binom{s+r-3-i}{r-2} - 2(r-1)\sum_{i=0}^{s-r-2}\binom{s+r-3-i}{r-2}$$

e si estendano entrambe le somme fino al valore $s+1$ dell'indice: applicando alla prima somma la (b) ed alla seconda la (a) si ottiene l'espressione

$$(r-1)\binom{s+r-1}{r} - 2(r-1)\binom{s+r-2}{r-1},$$

che si riconosce identica al secondo membro della $(*)$.

I termini aggiunti sono:

$$\sum_{l=0}^{r}(r-1+l)\binom{r-2+l}{r-2} - 2(r-1)\sum_{l=0}^{r}\binom{r-2+l}{r-2},$$

ossia [v. ancora le (b) ed (a)]:

$$(r-1)\binom{2r}{r} - 2(r-1)\binom{2r-1}{r-1} = 0\,.$$

Il fattore in parentesi non supera 1 e tende ad uno per $s \to \infty$.

Esprimendo $(2s)!$ e $s!$ mediante la formula di STIRLING (12), si ottiene la seguente maggiorazione di $p_{s,k}$:

(41) $$p_{s,k} < \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{(k-1)!} s^{-3/2} C_s \qquad (1 \leqslant k \leqslant s-1, \quad s \geqslant 3)$$

con

(42) $$C_s = \exp\left(\frac{1}{24\,s}\right) \cdot s^2 \Big/ \left[\left(s - \frac{3}{2}\right)\left(s - \frac{1}{2}\right)\right], \qquad \lim_{s\to\infty} C_s = 1 .$$

Se dunque consideriamo la serie

(43) $$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{y^k}{(k-1)!} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\, y\, e^y ,$$

la sua somma è maggiore, qualunque sia y, di $P_s(y)\, s^{-3/2} C_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, come si deduce dal semplice confronto dei termini corrispondenti.

Definita infine la funzione

(44) $$\alpha(\delta) = \delta\, s_\varrho$$

ed osservato che, essendo $0 \leqslant \alpha(\delta) - \varrho < \delta$,

(45) $$\lim_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = \varrho ,$$

abbiamo, per la (32),

$$(s_\varrho^{3/2}/C_{s_\varrho})\, |\, z_{s_\varrho}(y)\, | = [\alpha^{3/2}/C_{s_\varrho}]\, \delta^{-3/2}\, |\, z_{s_\varrho}(y)\, | < \frac{|\, K\,|}{2\sqrt{\pi}\,\delta}\, y ,$$

ossia, per la prima delle (30),

$$|\, z_{s_\varrho}(x/\sqrt{\delta})\, | < \frac{|\, K\,|\, C_{s_\varrho}}{2\sqrt{\pi}\, \alpha^{3/2}}\, x$$

e passando al limite per $\delta \to 0$:

(46) $$\lim_{\delta\to 0} |\, z_{s_\varrho}(x/\sqrt{\delta})\, | \leqslant \frac{|\, \varphi(0) - F(0)\, |}{2\varrho\sqrt{\pi\varrho}}\, x .$$

Da questa limitazione segue la proprietà α) e con essa l'affermazione b) e quindi il teorema.

---

(12) V., ad esempio, G. SANSONE [16], pag. 291.

La (46) mostra anche che per le funzioni z_s vale la proprietà:

β) $z_{s_\varrho}(x/\sqrt{\delta})$ *tende a zero se* x *è infinitesimo con* δ, *qualunque sia l'ordine di infinitesimo.*

§ 5. - Dimostrazione del Teorema 2.

Considerazioni analoghe a quelle fatte all'inizio della parte precedente indicano come sia possibile limitarsi alla sola dimostrazione della equilimitatezza delle funzioni $u^{(n)}_{xxxx}(x, t)$, ossia delle funzioni $v^{(n)\mathrm{IV}}_s(x)$ in A_n.

Anche qui è opportuno dimostrare la equilimitatezza delle dette funzioni separatamente:

a) negli insiemi $A_n \cap R'$ $(n = 1, 2, \ldots)$ [v. § 4, a)]; b) nella restante parte di A_n.

a) Valutando $v''_1(x)$ a partire dalla formula (24) con l'introduzione in I_1 della formula di TAYLOR per $v''_0(x)$ arrestata al terzo termine [si ricordi l'ipotesi di esistenza e continuità di $F^{\mathrm{IV}}(x)$], si deduce che:

$$|v_1^{(n)\mathrm{IV}}(x)| \leqslant L' + O_\varepsilon \qquad (\varrho \leqslant x \leqslant 1-\varrho;\ n = 1, 2, \ldots),$$

con $L' \geqslant |v_0^{\mathrm{IV}}(x)|$ in $[0, 1]$, e con immediata estensione:

$$(46) \qquad |v_s^{(n)\mathrm{IV}}(x)| \leqslant L' + O_\varepsilon \qquad (\varrho \leqslant x \leqslant 1-\varrho;\ s = 1, 2, \ldots, n;\ n = 1, 2 \ldots).$$

b) Derivando quattro volte i due membri delle (3_1), si ottiene per le funzioni $v_s^{\mathrm{IV}}(x)$ un analogo sistema di equazioni differenziali, con le condizioni agli estremi:

$$(47\text{ a}) \qquad v_s^{\mathrm{IV}}(0) = \frac{\varphi_s - 2\varphi_{s-1} + \varphi_{s-2}}{\delta^2}, \qquad v_s^{\mathrm{IV}}(1) = \frac{\psi_s - 2\psi_{s-1} + \psi_{s-2}}{\delta^2}, \qquad (3 \leqslant s \leqslant n);$$

$$(47\text{ b}) \qquad v_2^{\mathrm{IV}}(0) = \frac{\varphi_2 - 2\varphi_1 + F(0)}{\delta^2}, \qquad v_2^{\mathrm{IV}}(1) = \frac{\psi_2 - 2\psi_1 + F(1)}{\delta^2};$$

$$(47\text{ c}) \qquad v_1^{\mathrm{IV}}(0) = \frac{\varphi_1 - F(0) - F''(0)}{\delta^2}, \qquad v_1^{\mathrm{IV}}(1) = \frac{\psi_1 - F(1) - F''(1)}{\delta^2}.$$

Poichè $\varphi''(t)$ e $\psi''(t)$ esistono continue, i valori di $v_s^{\mathrm{IV}}(0)$ e $v_s^{\mathrm{IV}}(1)$ per $s \geqslant 3$ sono limitati per $\delta \to 0$, mentre i secondi membri delle (47 b) e (47 c) presentano singolarità di ordine $1/\delta^2$.

I risultati della parte I possono essere utilizzati per la presente dimostrazione, esprimendo le $v_s^{\mathrm{IV}}(x)$ attraverso le funzioni z_s e w_s con l'uso della (27):

$$v_s^{\mathrm{IV}}(x) = \left\{v_s''(x) - v_{s-1}''(x)\right\}/\delta = (z_s - z_{s-1})/\delta + (w_s - w_{s-1})/\delta = \tag{48}$$

$$= z_s^*(x/\sqrt{\delta}) + w_s^*(x/\sqrt{\delta}) \, ,$$

con ovvia definizione di z_s^* e w_s^*.

Il calcolo di w_2^* può essere effettuato con la (24), tenendo conto delle (26) e (28):

$$w_2^*(x/\sqrt{\delta}) = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\delta^2} \exp\left(-\frac{x}{\sqrt{\delta}}\right) + \frac{1}{\delta}\left\{\int_0^1 \frac{w_1(\xi/\sqrt{\delta})}{2\sqrt{\delta}} \, E\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}, \frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right) d\xi - \right. \tag{49}$$

$$\left. - w_1(x/\sqrt{\delta})\right\} + O_e \, .$$

Il secondo termine al secondo membro è limitato perchè w_1 è limitata con derivata seconda continua [si ricordino i procedimenti di valutazione dell'integrale (18)].

Il termine non limitato nell'espressione (49) di w_2^* è perciò:

$$\tilde{w}_2(x/\sqrt{\delta}) = \left\{H(\delta)/\delta\right\} \exp(-x/\sqrt{\delta}) \, , \tag{50}$$

con $H(\delta)$ funzione limitata di δ, essendo:

$$\lim_{\delta \to 0} H(\delta) = \varphi'(0).$$

Il termine di w_s^* non limitato per $\delta \to 0$ si esprime con una formula ricorrente identica alla (28):

$$\tilde{w}_s(x/\sqrt{\delta}) = \int_0^1 \frac{\tilde{w}_{s-1}(\xi/\sqrt{\delta})}{2\sqrt{\delta}} \, E\left(\frac{x}{\sqrt{\delta}}, \frac{\xi}{\sqrt{\delta}}\right) d\xi \qquad (s > 2). \tag{51}$$

Essendo la funzione di partenza (50) analoga alla (26), per le funzioni $\tilde{w}_{s_\varrho}$ valgono le proprietà α) e β).

Per completare la dimostrazione del Teorema 2 mostreremo ora che: *le funzioni $z_{s_\varrho}^*$ godono delle proprietà α) e β).*

Dalle (48) e (31) risulta, con il cambiamento di variabile (30),

(52) $$z_s^*(y) = \frac{K(\delta)}{\delta^2}\left[P_s(y) - P_{s-1}(y)\right] e^{-y} \qquad (2 \leqslant s \leqslant n).$$

Posto:

(53) $$Q_s(y) = P_s(y) - P_{s-1}(y) = \sum_{k=1}^{s-1} q_{s,k}\, y^k ,$$

abbiamo, tenendo conto dell'ultima delle (35),

(54) $$Q_s(y) = p_{s,s-1}\, y^{s-1} + \sum_{k=2}^{s-2} (p_{s,k} - p_{s-1,k})\, y^k + (p_{s,2} - p_{s-1,2})\, y ,$$

e per la (40):

(55) $$q_{s,k} = p_{s,k}\, \frac{k^2 + 3k + 8 - 6s}{(2s-3-k)(2s-4-k)} \qquad (2 \leqslant k \leqslant s-2, \quad s \geqslant 4),$$

(55′) $$q_{s,1} = q_{s,2} \qquad (s \geqslant 4),$$

(55″) $$q_{s,s-1} = p_{s,s-1} \qquad (s \geqslant 2).$$

Dalle (52) e (53) si ha:

(56) $$|z_s^*(y)| < \frac{|K|}{\delta^2}\, e^{-y} \sum_{k=1}^{s-1} |q_{s,k}|\, y^k =$$
$$= \frac{K}{\delta^2}\, e^{-y} \left\{ \sum\nolimits_k' |q_{s,k}|\, y^k + \sum\nolimits_k'' |q_{s,k}|\, y^k \right\},$$

dove la somma $\sum_k'$ è estesa ai valori di k tra 1 e λ_s, con

(57) $$\lambda_s = E(\sqrt{s}) ,$$

mentre la somma $\sum_k''$ è estesa ai rimanenti valori dell'indice k.

Introduciamo in $\sum_k'$ e $\sum_k''$ due distinte maggiorazioni per $|q_{s,k}|$. Precisamente, posto:

(58) $$|q_{s,k}| = \frac{3}{2}\, \frac{1}{s}\, p_{s,k}\, \Omega_{s,k} \qquad (2 \leqslant k \leqslant s-2, \quad s \geqslant 4),$$

dove [cfr. (55)]

$$\Omega_{s,k} = \frac{\left|1 - \dfrac{k^2+3k+8}{6s}\right|}{\left(1-\dfrac{3+k}{2s}\right)\left(1-\dfrac{4+k}{2s}\right)}, \tag{59}$$

si verifica che per $2 \leqslant k\ \lambda_s$ è:

$$\left|1 - \frac{k^2+3k+8}{6s}\right| < 1$$

e di conseguenza

$$\Omega_{s,k} < 4\frac{s^2}{(s-1)(s-2)} = 4B_s \qquad (2 \leqslant k \leqslant \lambda_s), \tag{60}$$

con

$$B_s = \frac{s^2}{(s-1)(s-2)}, \qquad \lim_{s\to\infty} B_s = 1. \tag{61}$$

Osservando invece che per $k = s-2$ l'espressione $\Omega_{s,k}$ assume (per s abbastanza grande) il suo massimo valore, possiamo usare in $\sum_k''$ la maggiorazione:

$$\Omega_{s,k} \leqslant \Omega_{s,s-2} = \frac{s^2-7s+6}{6s}\,4B_s < \frac{2}{3}sB_s \qquad (\lambda_s < k \leqslant s-2). \tag{62}$$

Ricordando allora le (58), (55′), (55″) ed usando le maggiorazioni (60), (62) per $\Omega_{s,k}$ e (41) per $p_{s,k}$, si deduce dalla (56):

$$\frac{s^{5/2}}{B_s\,C_s}\,|\,z_s^*(y)\,| < \frac{|K|}{\delta^2}\left\{\frac{3}{\sqrt{\pi}}\sum_{k=1}^{\lambda_s}\frac{y^k}{(k-1)!} + \frac{s}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=\lambda_s+1}^{s-1}\frac{y^k}{(k-1)!}\right\}e^{-y}. \tag{63}$$

Il secondo termine in parentesi è minore di

$$\frac{s}{2\sqrt{\pi}}\sum_{k=\lambda_s+1}^{\infty}\frac{y^k}{(k-1)!} = \frac{s}{2\sqrt{\pi}}\,y\,R_{\lambda_s-1},$$

dove R_{λ_s-1} indica il resto della serie esponenziale, esprimibile nella forma:

$$R_{\lambda_s-1} = \frac{y^{\lambda_s}}{\lambda_s!}\,e^{\theta_s y} \qquad (0 < \theta_s < 1).$$

Poichè infine, a causa della (57), sussiste la relazione:

$$s = \beta_s \lambda_s^2, \qquad \text{con } \lim_{s \to \infty} \beta_s = 1,$$

per $s = s_\varrho$ e $\delta \to 0$ il termine suddetto ha limite nullo.

Se allora nella (63) per $s = s_\varrho$ adopriamo la sostituzione (44) e ricordiamo le (45), (42) e (61), nonchè la (30), troviamo:

$$\lim_{\delta \to 0} | z^*_{s_\varrho}(x/\sqrt{\delta}) | \leqslant \frac{3\,|\varphi(0) - F(0)|}{\varrho^2 \sqrt{\pi\varrho}}\, x, \tag{64}$$

che, analogamente alla (46), compendia le proprietà α) e β).

§ 6. - Indebolimento delle ipotesi su $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $F(x)$.

6.1. - Sia $\bar{t} \in (0, T)$ un punto di discontinuità di prima specie di almeno una delle funzioni $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi'(t)$, $\varphi''(t)$, $\psi''(t)$ le quali abbiano finiti in quel punto i limiti destro e sinistro.

Assegnato per $t = \bar{t}$ alle dette funzioni il valore del rispettivo limite sinistro, il metodo è convergente nella regione $R_\varrho(\bar{t})$, costituita dai punti di R_ϱ con $t \leqslant \bar{t}$, e definisce in essa una funzione continua $u(x, t)$. La funzione $u(x, \bar{t})$ si assume poi come valore iniziale per il problema nel rettangolo $R - R_\varrho(\bar{t})$, per il quale è dimostrata la convergenza in ogni dominio costruito analogamente ad R_ϱ, sopprimendo da $R - R_\varrho(\bar{t})$ i necessari intorni quadrati.

6.2.- La derivata prima di $F(x)$ abbia in $\bar{x} \in (0, 1)$ una discontinuità di prima specie. $F(x)$ sia continua in $[0, 1]$; negli intervalli $0 \leqslant x < \bar{x}$, $\bar{x} < x \leqslant 1$ le derivate, fino a quella di quarto ordine, soddisfino le ipotesi fatte nel § **1** ed abbiano inoltre finiti in $\bar{x}$ i limiti destro e sinistro.

Lo schema (3) definisce ancora n funzioni $v_s(x)$, ma nella classe C_{2s}. L'espressione (17) per $v_1(x)$ è ancor valida, ma il metodo di valutazione dell'integrale (19) va modificato se $\bar{x} \in (x - \sigma, x + \sigma)$, spezzando l'intervallo di integrazione in tre parti con estremi $x - \sigma$, x, $\bar{x}$, $x + \sigma$ ed usando in ciascuna di queste la formula di TAYLOR per $v_0(\xi)$, arrestata al terzo termine. Se ne deduce, ricordando la (16),

$$v_1''(x) = \frac{\Delta v_0'}{2\sqrt{\delta}} \exp\left(-\frac{|x - \bar{x}|}{\sqrt{\delta}}\right) + v_0''(x) - \tfrac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,(x - \bar{x}) \cdot \Delta v_0'' + O(x - \bar{x}) + O_e, \tag{65}$$

dove $O(x - \bar{x})$ è infinitesimo con $x - \bar{x}$ qualunque sia δ, e deve intendersi:

$$\Delta f = f(\bar{x}+) - f(\bar{x}-). \tag{66}$$

In un intorno del punto $\bar{x}$, $v_1''(x)$ non è limitata per $\delta \to 0$, a causa del termine:

$$\bar{z}_1(x/\sqrt{\delta}) = \frac{\Delta v_0'}{2\sqrt{\delta}} \exp\left(-\frac{|x-\bar{x}|}{\sqrt{\delta}}\right), \tag{67}$$

singolare come $1/\sqrt{\delta}$ per $x = \bar{x}$, ovvero se $x - \bar{x}$ è infinitesimo di ordine non inferiore a $\sqrt{\delta}$.

Si rende dunque necessaria una nuova restrizione di R_ϱ e degli insiemi A_n. Indico con R_ϱ' la regione ottenuta da R_ϱ con la soppressione dell'intorno $\{\bar{x} - \varrho < x < \bar{x} + \varrho,\ 0 \leqslant t < \varrho\}$ [13]. La definizione dei nuovi insiemi A_n' è conseguente.

La validità delle limitazioni (22) e (46) per $v_s''(x)$ e $v_s^{\mathrm{IV}}(x)$ è confinata agli intervalli $\varrho \leqslant x \leqslant \bar{x} - \varrho$, $\bar{x} + \varrho \leqslant x \leqslant 1 - \varrho$, con

$$L = \sup|v_0''(x)|, \qquad L' = \sup|v_0^{\mathrm{IV}}(x)| \quad \text{in } \{[0, \bar{x}) \cup (\bar{x}, 1]\}.$$

La dimostrazione dei Teoremi 1 e 2 va perciò completata con la dimostrazione della equilimitatezza in A_n' delle funzioni $v_s^{(n)''}(x)$ e $v_s^{(n)\mathrm{IV}}(x)$ nell'intorno $\bar{x} - \varrho < x < \bar{x} + \varrho$.

Detto $\bar{z}_s$ il termine di $v_s''(x)$ singolare per $\delta \to 0$ in un intorno di $\bar{x}$, esso è esprimibile con la formula ricorrente:

$$\bar{z}_s(x/\sqrt{\delta}) = \int_0^1 \frac{\bar{z}_{s-1}(\xi/\sqrt{\delta})}{2\sqrt{\delta}} \exp\left(-\frac{|x-\xi|}{\sqrt{\delta}}\right) d\tau \qquad (s \geqslant 2), \tag{68}$$

con la funzione iniziale (67).

Dimostriamo che $\bar{z}_{s\varrho}(x)$ gode della proprietà α).

Adottando le nuove variabili:

$$y = (x - \bar{x})/\sqrt{\delta}, \qquad \eta = (\xi - \bar{x})/\sqrt{\delta}, \tag{69}$$

scriviamo

$$\bar{z}_s(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2} \bar{z}_{s-1}(\eta) \exp(-|\eta - y|)\, d\eta \quad [14] \tag{70}$$

con

$$\bar{z}_1(y) = \frac{\Delta v_0'}{2\sqrt{\delta}} e^{-|y|}. \tag{67'}$$

---

[13] Ovviamente dovrà essere $\varrho < \bar{x} - \varrho < \bar{x} + \varrho < 1 - \varrho$.

[14] Per l'estensione dell'intervallo di integrazione da $-\infty$ a $+\infty$ si veda la annotazione [8].

Dalla (70) si ottiene per derivazione il sistema di equazioni differenziali:

$$\bar{z}''_s(y) = \bar{z}_s(y) - \bar{z}_{s-1}(y) \qquad (s \geqslant 2), \tag{71}$$

$$\lim_{y \to \pm\infty} \bar{z}_s(y) = 0 \qquad \text{per ogni } s.$$

Inoltre è di immediata dimostrazione che tutte le funzioni $\bar{z}_s(y)$ sono pari ed esprimibili nella forma:

$$\bar{z}_s(y) = \bar{z}_s(\,|\,y\,|\,) = \frac{\Delta v'_0}{2\sqrt{\delta}} \bar{P}_s(\,|\,y\,|\,)\, e^{-|y|} \qquad (s \geqslant 1), \tag{72}$$

con $\bar{P}_s(\,|\,y\,|\,)$ polinomio di grado $s-1$ in $|\,y\,|$.

Essendo poi $\bar{z}_s(\,|\,y\,|\,)$ ovunque derivabile per $s \geqslant 2$, si ha:

$$z'_s(0) = 0 \qquad (s \geqslant 2), \tag{73}$$

che completa il sistema di equazioni (71).

Posto allora:

$$\bar{P}_s(\,|\,y\,|\,) = \sum_{k=0}^{s-1} \bar{p}_{s,k}\, |\,y\,|^k, \tag{74}$$

le (67′), (71) e (73) dànno:

$$\begin{cases} \bar{p}_{1,0} = 1 \\ 2(s-1)\,\bar{p}_{s,s-1} = \bar{p}_{s-1,s-2} & (s \geqslant 2) \\ k(k-1)\,\bar{p}_{s,k} - 2(k-1)\,\bar{p}_{s,k-1} + \bar{p}_{s-1,k-2} = 0 & (2 \leqslant k \leqslant s-1, \quad s \geqslant 3) \\ \bar{p}_{s,1} = \bar{p}_{s,0}\,. \end{cases} \tag{75}$$

Usando le (75) nel modo descritto per le (35), si perviene alla formula:

$$\bar{p}_{s,k} = \frac{1}{2^{2s-k-2}\,k!} \binom{2s-k-2}{s-k-1} \qquad (1 \leqslant k \leqslant s-1, \quad s \geqslant 2). \tag{76}$$

Ripetendo per la (76) i procedimenti di maggiorazione descritti per la (40), si ottiene:

$$\bar{p}_{s,k} < \frac{1}{k!}\frac{1}{\sqrt{\pi s}}\,\bar{C}_s\,, \tag{77}$$

con

$$\overline{C}_s = \exp\left(\frac{1}{24\,s}\right)\cdot s/(s-\tfrac{1}{2}), \qquad \lim_{s\to\infty} \overline{C}_s = 1. \tag{78}$$

Avremo dunque:

$$\sqrt{\pi s}\,\overline{P}_s(\,|\,y\,|\,)/\overline{C}_s < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\,y\,|^k}{k\,!} = e^{|y|}\,.$$

Per $s = s_\varrho$, ricordando le (44), (45), (72), (78), (69), si ottiene infine:

$$\lim_{\delta\to 0} |\,\overline{z}_{s_\varrho}(x/\sqrt{\delta})\,| \leqslant |\,\Delta v_0'\,|/\sqrt{\pi\varrho}\,, \tag{79}$$

che prova per la funzione z_{s_ϱ} la proprietà α).

La formula (65) può essere utilizzata anche per il calcolo di $v_1^{\mathrm{IV}}(x) = [v_1''(x) - v_0''(x)]/\delta$ in un intorno di $\bar{x}$. Si mette così in evidenza che in questo intorno le funzioni $v_s^{\mathrm{IV}}(x)$ hanno singolarità di ordine $\delta^{-3/2}$.

La dimostrazione del Teorema 2 si completa sulla base dei risultati qui ottenuti con i metodi descritti nel § 5, facilmente estendibili al caso presente.

La convergenza del metodo è dunque dimostrata in R_ϱ'.

6.3. – Conservando le altre ipotesi fatte sulla funzione $F(x)$, supponiamo che essa abbia in $\bar{x} \in (0, 1)$ una discontinuità di prima specie.

La (64) viene allora modificata per l'aggiunta del termine:

$$-\,\mathrm{sign}\,(x-\bar{x})\cdot \frac{\Delta v_0}{2\delta}\,\exp\left(-\,\frac{|\,x-\bar{x}\,|}{\sqrt{\delta}}\right) \tag{80}$$

col significato (66) per il simbolo Δv_0.

Le funzioni $v_s''(x)$, $s \geqslant 1$, sono da ricercarsi ora nella classe C_{2s-1} ed hanno una singolarità di ordine $1/\delta$, generata dal termine iniziale (80) e rappresentabile nelle funzioni Z_s, soddisfacenti le relazioni ricorrenti:

$$Z_s(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{2}\,Z_s(\eta)\exp(-\,|\,\eta - y\,|\,)\,d\eta \qquad (s \geqslant 2), \tag{81}$$

$$Z_1(y) = -\,\frac{\Delta v_0}{2\delta}\,\mathrm{sign}y\cdot e^{-|y|}\,, \tag{82}$$

con y e η date dalla (69).

Dimostriamo che le (81) hanno un comportamento analogo a quello delle funzioni z_s del § 4.

Le funzioni $Z_s(y)$ sono tutte dispari ed hanno la forma:

$$Z_s(y) = -\frac{\Delta v_0}{2\delta} \operatorname{sign} y \cdot P_s(|y|)\, e^{-|y|} \qquad (s \geqslant 1), \tag{83}$$

dove i polinomi P_s sono identici ai polinomi (34) del § **4**.

Infatti:

$$P_1(|y|) \equiv 1 \tag{84}$$

e, dovendo le $Z_s(y)$ soddisfare l'equazione

$$Z_s''(y) = Z_s(y) - Z_{s-1}(y) \qquad (s \geqslant 2), \tag{85}$$

avremo, qualunque sia y,

$$P_s'' - 2\,P_s' + P_{s-1} = 0 \qquad (s \geqslant 2) \tag{86}$$

(le derivate sono fatte rispetto a $|y|$).

Infine, per la continuità delle funzioni $Z_s(y)$ per $s \geqslant 2$ in $y = 0$, dovrà essere:

$$P_s(0) = 0 \qquad (s \geqslant 2). \tag{87}$$

Le (84), (86), (87) coincidono con le (33) e definiscono quindi gli stessi polinomi.

Risulta così dimostrata l'analogia tra le funzioni Z_s e le funzioni (28) del § **4** e per conseguenza la convergenza del metodo nella regione R_ϱ'.

Bibliografia.

[1] C. Corduneanu, *Approximation des solution d'une équation parabolique dans un domaine non borné,* Mathematica (Cluj) (26) **3** (1961), 217-224.

[2] V. V. Bobkov and O. A. Liskovets, *Exact estimate in the Rothe method.* Differencial'nye Uravnenija, **2** (1966), 640-646.

[3] V. V. Bobkov and O. A. Liskovets, *Once again on exact estimate in the Rothe method.* Differencial'nye Uravnenija **3** (1967), 1325-1333.

[4] E. Rothe, *Zweidimensionale parabolische Randwertaufgaben als Grenzfall eindimensionaler Randwertaufgaben,* Math. Ann. **102** (1930), 650-670.

[5] D. R. Hartree and J. R. Womersley, *A method for the numerical or mechanical. solution of certain types of partial differential equations.* Proc. Roy. Soc., Ser. A **161** (1937), 353-366.

[6] O. A. Liskovets, *The straight lines method,* Differencial'nye Uravnenija 1 (1965), 1662-1678.

[7] D. Greenspan, *Introductory Numerical Analysis of Elliptic Boundary Value Problems*, Harper & Row, 1965.

[8] J. Walsh, *Numerical Analysis: An Introduction*, Academic Press, London and New York 1966 (cf. p. 99 e seguenti).

[9] I. S. Berezin and N. P. Zhidkov, *Computing Methods* (II) (english ed.), Pergamon Press, 1965 (cf. p. 580).

[10] F. P. Vasil'ev, *On the straight lines method for the solution of the one-phase Stefan like problem.* Ž. Vyčisl. Mat. i Mat. Fiz. **8** (1968), 64-78.

[11] D. Quilghini, *Una analisi fisico-matematica del processo del cambiamento di fase,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **67** (1965), 33-74.

[12] C. Pucci, *Compattezza di successioni e derivabilità delle funzioni limiti,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **36** (1954), 1-25.

[13] C. Pucci, *Studio col metodo delle differenze di un problema di Cauchy relativo ad equazioni a derivate parziali del secondo ordine di tipo parabolico*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa (3) **7** (1953), 205-215.

[14] C. Kuratowski, *Topologie* (I), 4ª ed., Monografie Matematyczne **20**, Warszawa 1958.

[15] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids,* Clarendon Press, Oxford 1959.

[16] G. Sansone, *Lezioni sulla Teoria delle Funzioni di una Variabile Complessa* (I) 4ª ed., Cedam, Padova 1963.

Summary.

The convergence of the straight-lines method for the solution of a classical parabolic-type problem is proved in a critical case. A particular sequence of functions (pseudoequicontinuous functions) is shown to be generated, wich converges to the solution of the starting problem. The initial assumptions on the boundary conditions are reduced in the last paragraph.

* * *