Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 261-274

CORRADO SCARAVELLI (*)

# Su la risoluzione di una classe di equazioni alle differenze finite. (**)

## Introduzione.

Questo lavoro ha avuto origine dal desiderio di « trasportare » nel Calcolo delle differenze finite un certo argomento di Calcolo infinitesimale. Il « modo del trasporto », non certo univoco, è qui ottenuto cercando di restare il più possibile aderenti all'argomento infinitesimale e, ancora, cercando di mantenere una buona generalità. Ciò mi ha condotto ad usare nomenclature e simboli già da me introdotti in un precedente lavoro (cfr. [3]) (1).

Il soprannominato argomento di Calcolo infinitesimale è il seguente:

« Fissato un qualsiasi polinomio intero, in una variabile $x$,

$$P_n = P_n(x) \equiv a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_{n-1} x + a_n$$

« (di grado$\leqslant n$, ma non identicamente nullo), si considerino le equazioni differen-

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività dei Gruppi di Ricerca del Comitato per la Matematica del C.N.R. — Ricevuto il 20-XI-1968.

(1) In particolare, ricordo che con $\tilde{a}_s = \tilde{a}_s(x; h)$ $(s = 0, 1, 2, \ldots)$ indico le « costanti per l'incremento $h$ », cioè le funzioni periodiche di periodo $h$; con $x^{s|h} = x(x-h)(x-2h)\ldots$ $\ldots(x-(s-1)h)$ indico le « potenze di passo $h$ » del Calcolo delle differenze. Essendo poi $\mathrm{D}_{x,h}$ il cosiddetto *prederivatore rispetto ad $x$, col passo $h$*, pongo per brevità $\mathrm{D}^r_{x,h} f(x) = f^{(r,h)}(x)$ $(r = 0, 1, 2, \ldots)$, intendendo che sia $\mathrm{D}^0_{x,h} f(x) = f^{(0,h)}(x) = f(x)$.

« ziali, lineari e omogenee, nell'incognita $y = y(x)$,

$$(1_0) \qquad \sum_0^n {}_r (-1)^r P_n^{(r)} y^{(n-r)} = 0 \,,$$

$$(1_1) \qquad \sum_0^n {}_r (-1)^r (r+1) P_n^{(r)} y^{(n-r)} = 0 \,,$$

$$(1_2) \qquad \sum_0^n {}^r (-1)^r \binom{r+2}{2} P_n^{(r)} y^{(n-r)} = 0 \,,$$

$$\ldots \qquad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \;,$$

« ossia più brevemente le equazioni

$$(1_m) \qquad \sum_0^n {}_r (-1)^r \binom{r+m}{m} P_n^{(r)} y^{(n-r)} = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

« Si osserva che, applicando alle $(1_0)$, $(1_1)$, $(1_2)$, ... rispettivamente gli ope-
« ratori

$$\mathrm{D}\,, \quad \mathrm{D}^2, \quad \mathrm{D}^3, \quad \ldots \qquad (\text{dove è } \mathrm{D} = \mathrm{d}/\mathrm{d}x),$$

« si ottengono ordinatamente le semplici equazioni

$$P_n\, y^{(n+1)} = 0\,, \qquad P_n\, y^{(n+2)} = 0\,, \qquad P_n\, y^{(n+3)} = 0\,, \qquad \ldots\,.$$

« Ne segue che le equazioni $(1_0)$, $(1_1)$, $(1_2)$, ... sono tutte integrabili in termini
« finiti, e non è difficile scriverne i corrispondenti integrali generali (occorrerà
« distinguere vari casi a seconda del grado di $P_n$) (²). »

Per « trasportare » questo argomento nel Calcolo delle differenze finite, procedo come segue:

1°) Al dato polinomio $P_n = P_n(x)$ sostituisco un dato polinomio intero in $x$ e di passo $h$ (cfr. l'annotazione (¹) ed anche [3])

$$P_{n|h} = P_{n|h}(x) \equiv \tilde{a}_0\, x^{n|h} + \tilde{a}_1\, x^{(n-1)|h} + \ldots + \tilde{a}_{n-1}\, x^{1|h} + \tilde{a}_n$$

(di grado $\leqslant n$, ma non identicamente nullo).

2°) Alle equazioni differenziali $(1_m)$ precedenti sostituisco rispettivamente

(²) Nel caso particolare importante che $P_n$ sia un polinomio di Appell di grado $n$, le soprascritte equazioni sono state completamente risolte in [1].

le equazioni alle differenze, lineari e omogenee [3], della forma:

$$(2_0)\qquad \sum_0^n {}_r\,(-1)^r\, P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, y^{(n-r,h)}(x+rh) = 0\,,$$

$$(2_1)\qquad \sum_0^n {}_r\,(-1)^r(r+1)\, P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, y^{(n-r,h)}(x+rh) = 0\,,$$

$$(2_2)\qquad \sum_0^n {}_r\,(-1)^r\binom{r+2}{2} P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, y^{(n-r,h)}(x+rh) = 0\,,$$

... . . . . . . . . . . . . . . . . . . ,

ossia più brevemente le equazioni:

$$(2_m)\qquad \sum_0^n {}_r\,(-1)^r\binom{r+m}{m} P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, y^{(n-r,h)}(x+rh) = 0 \qquad (m=0,1,2,\ldots).$$

3º) Provo (cfr. §§ **1**, **2**, **3**) che, applicando alle $(2_0)$, $(2_1)$, $(2_2)$, ... rispettivamente gli operatori [4]

$$\mathrm{D}_{x,h}\,,\qquad \mathrm{D}_{x,h}^2\,,\qquad \mathrm{D}_{x,h}^3\,,\qquad \ldots\,,$$

si ottengono ordinatamente le semplici equazioni

$$P_{n|h}(x)\, y^{(n+1,h)}(x) = 0\,,\qquad P_{n|h}(x)\, y^{(n+2,h)}(x) = 0\,,\qquad P_{n|h}(x)\, y^{(n+3,h)}(x) = 0\,,\quad \ldots .$$

Ciò porta a concludere che *le equazioni* $(2_0)$, $(2_1)$, $(2_2)$, ... *sono tutte risolubili in termini finiti*: indico qui le loro soluzioni generali, distinguendo i vari casi a seconda del grado di $P_{n|h}(x)$.

Aggiungo anche alcune esemplificazioni.

O s s e r v a z i o n e I. È da notare che oltre alle equazioni $(1_m)$ si possono anche considerare le equazioni alle differenze, lineari e omogenee,

$$(2'_m)\qquad \sum_0^n {}_r\,(-1)^r\binom{r+m}{m} P_{n|h}^{(n-r,h)}(x+rh)\, y^{(r,h)}(x) = 0 \qquad (m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Infatti, applicando a queste equazioni $(2'_m)$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$ rispettivamente gli operatori $\mathrm{D}_{x,h}^{m+1}$ $(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$, si ottengono ordinatamente le semplici

[3] Considero soltanto il caso « omogeneo » in quanto ad esso si riconduce il caso « non omogeneo ».

[4] Cfr. l'annotazione [1].

equazioni

$$P_{n|h}(x + (n + m + 1)h)\, y^{(n+m+1,h)}(x) = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

che sono tutte risolubili in termini finiti. Le rispettive soluzioni generali si deducono in modo perfettamente analogo a quello seguito per le $(2_m)$.

Osservazione II. Se i coefficienti $\tilde{a}_r = \tilde{a}_r(x;\ h)$ del polinomio $P_{n|h}(x)$ hanno limite finito per $h \to 0$, si può affermare che quando $h \to 0$ le equazioni alle differenze $(2_m)$ [o $(2'_m)$], e rispettive soluzioni, tendono ordinatamente alle equazioni differenziali $(1_m)$, e rispettive soluzioni.

## § 1. - Risoluzione in termini finiti dell'equazione $(2_0)$.

Risolviamo la precedente equazione alle differenze, lineare e omogenea,

$$(2_0) \qquad P_{n|h}(x)\, y^{(n,h)}(x) - P^{(1,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-1,h)}(x + h) + P^{(2,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-2,h)}(x + 2h) - \ldots + \\ + (-1)^n P^{(n,h)}_{n|h}(x)\, y(x + nh) = 0.$$

### 1.1. - Una proprietà del primo membro di $(2_0)$.

La prederivata [cfr. l'annotazione (1)] del primo membro di $(2_0)$ si riduce a un solo termine, precisamente è:

$$(3) \qquad [\sum_0^n{}_r\, (-1)^r P^{(r,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-r,h)}(x + rh)]^{(1,h)} = P_{n|h}(x)\, y^{(n+1,h)}(x)\,.$$

Infatti, tenendo presente la formula

$$\{f(x)\, g(x)\}^{(1,h)} = f(x)\, g^{(1,h)}(x) + f^{(1,h)}(x)\, g(x + h)\,,$$

il primo membro di (3) diventa

$$\{P_{n|h}(x)\, y^{(n+1,h)}(x) + P^{(1,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n,h)}(x + h)\} - \\ - \{P^{(1,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n,h)}(x + h) + P^{(2,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-1,h)}(x + 2h)\} + \\ + \{P^{(2,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-1,h)}(x + 2h) + P^{(3,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-2,h)}(x + 3h)\} - \ldots + \\ + (-1)^n \{P^{(n,h)}_{n|h}(x)\, y^{(1,h)}(x + nh) + P^{(n+1,h)}_{n|h}(x)\, y(x + (n + 1)\, h)\}\,;$$

eseguendo poi le varie riduzioni e notando che è $P^{(n+1,h)}_{n|h}(x) = 0$, si ottiene proprio il secondo membro di (3).

**1.2. - Soluzione generale dell'equazione ($2_0$).**

1.2.1 – Prederivando ora l'equazione ($2_0$) e tenendo presente la conclusione del n. precedente, si ottiene la semplice equazione $P_{n|h}(x)\, y^{(n+1,h)}(x) = 0$, ossia

$$y^{(n+1,h)}(x) = 0 \,. \tag{4}$$

La soluzione generale di (4) è, manifestamente,

$$y \equiv p_{n|h}(x) \equiv \tilde{c}_0\, x^{n|h} + \tilde{c}_1\, x^{(n-1)|h} + \ldots + \tilde{c}_{n-1}\, x^{1|h} + \tilde{c}_n = \sum_s{}_0^n \tilde{c}_s\, x^{(n-s)|h} \,, \tag{5}$$

polinomio intero in $x$, di passo $h$, di grado $\leqslant n$, e di coefficienti arbitrarie costanti per l'incremento $h$. La soluzione generale di ($2_0$) si ottiene allora dal precedente polinomio $p_{n|h}(x)$ imponendo che esso soddisfi all'equazione ($2_0$), ossia che valga la condizione

$$\sum_r{}_0^n (-1)^r P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, p_{n|h}^{(n-r,h)}(x+rh) = 0 \,. \tag{6}$$

*Il primo membro di* (6) *è una costante* $\tilde{\alpha}$ *per l'incremento* $h$: infatti la prederivata di tale primo membro [tenendo presente (3) ove si ponga $y(x) \equiv p_{n|h}(x)$] è uguale a $P_{n|h}(x)\, p_{n|h}^{(n+1,h)}(x)$, cioè è zero, per essere $p_{n|h}^{(n+1,h)}(x) = 0$.

La condizione (6) diventa perciò (osservando che $\tilde{\alpha}$ è, evidentemente, funzione delle precedenti $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n$)

$$\tilde{\alpha}(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n) = 0 \,. \tag{6'}$$

L'effettiva espressione di $\tilde{\alpha}(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_n)$ si ottiene ora notando che *il primo membro di* (6), *qualora in esso si eseguano i calcoli indicati, prende la forma di un polinomio* $q_{n|h}(x)$ *intero in* $x$, *di passo* $h$ (*e di grado* $\leqslant n$) [5]. Quindi $\tilde{\alpha}$ è proprio

---

[5] Infatti:

1°) Essendo $\mu$ e $\nu$ interi positivi, abbiamo

$$x^{\mu|h}\, x^{\nu|h} = x^{\mu|h} (\mu h + (x - \mu h))^{\nu|h}$$

da cui, applicando all'ultimo fattore del secondo membro la nota formula di VANDERMONDE [cfr., ad esempio, [3], loc. cit. in (4)],

$$x^{\mu|h}\, x^{\nu|h} = x^{\mu|h} \sum_r{}_0^\nu \binom{\nu}{r} (\mu h)^{(\nu-r)|h} (x - \mu h)^{r|h};$$

ma è $x^{\mu|h}(x-\mu h)^{r|h} = x(x-h)\ldots(x-(\mu-1)h)\cdot(x-\mu h)(x-(\mu+1)h)\ldots(x-(\mu+r-1)h) =$

il « termine noto » del polinomio $q_{n|h}(x)$: pertanto $\widetilde{\alpha}$ è dato dal primo membro di (6) quando si ponga $x = 0$ in tutte le sue potenze di passo $h$. Risulta così:

$$\widetilde{\alpha} \equiv \sum_0^n{}_r (-1)^r r!\, a_{n-r} \sum_0^r{}_s (n-r)! \binom{n-s}{r-s} \widetilde{c}_s (rh)^{(r-s)|h} = 0 \text{ (6)},$$

od anche [invertendo l'ordine delle sommatorie e tenendo presente che $(rh)^{(r-s)|h} = (r!/s!)h^{r-s}$]

$$\sum_0^n{}_s \widetilde{c}_s \sum_s^n{}_r (-1)^r r!\,(n-r)! \binom{n-s}{r-s} (r!/s!)\, h^{r-s} \widetilde{a}_{n-r} = 0\,,$$

oppure

$$(6'') \qquad \sum_0^n{}_s \left\{ \sum_s^n{}_r (-1)^r r! \binom{r}{s} h^{r-s} \widetilde{a}_{n-r} \right\} (n-s)!\, \widetilde{c}_s = 0\,.$$

Concludendo: *il polinomio* (5), *ove le costanti* $\widetilde{c}_s$ *soddisfino al legame* (6''), *ci dà in termini finiti la soluzione generale dell'equazione* $(2_0)$ (7).

---

$= x^{(\mu+r)|h}$, onde

$$x^{\mu|h} x^{\nu|h} = \sum_0^\nu{}_r \binom{\nu}{r} (\mu h)^{(\nu-r)|h} x^{(\mu+r)|h}\,,$$

che dice: *un prodotto* $x^{\mu|h} x^{\nu|h}$ *si può riguardare come un polinomio intero in* $x$ *di passo* $h$ *e di grado* $\mu+\nu$.

2°) La stessa affermazione vale più generalmente per un prodotto $(x+\widetilde{a})^{\mu|h} \cdot (x+\widetilde{b})^{\nu|h}$, poichè, applicando ancora la formula di VANDERMONDE, risulta

$$(x+\widetilde{a})^{\mu|h} (x+\widetilde{b})^{\nu|h} = \sum_0^\mu{}_r \binom{\mu}{r} \widetilde{a}^{(\mu-r)|h} x^{r|h} \sum_0^\nu{}_s \binom{\nu}{s} \widetilde{b}^{(\nu-s)|h} x^{s|h}$$

che è una somma di termini della forma $\widetilde{c}_{r,s}\, x^{r|h} x^{s|h}$, onde siamo ricondotti al caso precedente.

Nella (6) compaiono, precisamente, i prodotti del tipo $x^{\mu|h}(x+rh)^{\nu|h}$.

(6) Intendendo naturalmente che sia $(rh)^{(r-s)|h} = 1$ per $r = s = 0$.

(7) Se $P_{n|h}(x)$ è un polinomio di APPELL, di passo $h$, cioè se si ha $P_{n|h}(x) \equiv \widetilde{a}_n \overset{\cdot}{:} x^{n|h}$ (cfr. [3]), essendo $P_{n|h}^{(r,h)}(x) = [n!/(n-r)!] P_{(n-r)|h}(x)$, la $(2_0)$ si scrive

$$\sum_0^n{}_r \frac{(-1)^r}{(n-r)!} P_{(n-r)|h}(x)\, y^{(n-r,h)}(x+rh) = 0\,,$$

e la (6'') diventa

$$\sum_0^n{}_s \left\{ \sum_s^n{}_r \frac{(-1)^r}{(n-r)!} \binom{r}{s} h^{r-s} \widetilde{a}_{n-r} \right\} (n-s)!\, \widetilde{c}_s = 0\,.$$

**1.2.2.** – Per ottenere proprio *l'espressione esplicita* della soluzione generale di $(2_0)$ basta distinguere successivamente vari casi.

Caso 1°. Se $P_{n|h}(x)$ è di grado $n$ (perchè $\tilde{a}_0 \not\equiv 0$), da (6″) si ricava

$$\tilde{c}_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!\,\tilde{a}_0} \sum_0^{n-1}{}_s \left\{ \sum_s^n{}_r (-1)^r r! \binom{r}{s} h^{r-s} \tilde{a}_{n-r} \right\} (n-s)!\, \tilde{c}_s , \tag{7}$$

e la soluzione generale di $(2_0)$ ha l'espressione (5) con $\tilde{c}_n$ dato da (7).

Caso 2°. Se $P_{n|h}(x)$ è di grado $n-1$ (perchè $\tilde{a}_0 \equiv 0$, $\tilde{a}_1 \not\equiv 0$), da (6″) si ricava

$$\tilde{c}_{n-1} = \frac{(-1)^{n-2}}{(n-1)!\,\tilde{a}_1} \sum_0^{n-2}{}_s \left\{ \sum_s^{n-1}{}_r (-1)^r r! \binom{r}{s} h^{r-s} \tilde{a}_{n-r} \right\} (n-s)!\, \tilde{c}_s , \tag{8}$$

e la soluzione generale di $(2_0)$ ha l'espressione (5) con $\tilde{c}_{n-1}$ dato da (8).

Caso 3°. Se $P_{n|h}(x)$ è di grado $n-2$ (perchè $\tilde{a}_0 \equiv \tilde{a}_1 \equiv 0$, $\tilde{a}_2 \not\equiv 0$), da (6″) si ricava

$$\tilde{c}_{n-2} = \frac{(-1)^{n-3}}{2!\,(n-2)!\,\tilde{a}_2} \sum_0^{n-3}{}_s \left\{ \sum_s^{n-2}{}_r (-1)^r r! \binom{r}{s} h^{r-s} \tilde{a}_{n-r} \right\} (n-s)!\, \tilde{c}_s , \tag{9}$$

e la soluzione generale di $(2_0)$ ha l'espressione (5) con $\tilde{c}_{n-2}$ dato da (9).
E così via.

### 1.3. - Due esempi semplici.

1°) Risolvere l'equazione

$$\{x^{2|h} - \cos(2\pi x/h)\}\, y^{(2,h)}(x) - 2\,x\,y^{(1,h)}(x+h) + 2\,y(x+2h) = 0 .$$

La sua soluzione generale è, tenendo presente la (8),

$$y(x) = \tilde{c}_0 \{x^{2|h} + \cos(2\pi x/h) - 2h^2\} + \tilde{c}_1 (x - 2h).$$

2°) Risolvere l'equazione

$$\{x + \mathrm{sen}(2\pi x/h)\}\, y^{(2,h)}(x) = y^{(1,h)}(x+h) .$$

La sua soluzione generale è, tenendo presente la (9),

$$y(x) = \tilde{c}_0 \{x^{2|h} + 2[\mathrm{sen}(2\pi x/h) - h]x\} + \tilde{c}_2 .$$

## § 2. - Risoluzione in termini finiti dell'equazione $(2_1)$.

Risolviamo la precedente equazione alle differenze, lineare e omogenea,

$$(2_1)\quad P_{n|h}(x)\, y^{(n,h)}(x) - 2P^{(1,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-1,h)}(x+h) + 3P^{(2,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-2,h)}(x+2h) - \dots$$
$$+ (-1)^n (n+1)\, P^{(n,h)}_{n|h}(x)\, y(x+nh) = 0\,.$$

### 2.1. - Una proprietà del primo membro di $(2_1)$.

La prederivata seconda [cfr. l'annotazione (1)] del primo membro di $(2_1)$ si riduce a un solo termine, precisamente è:

$$(10)\qquad \Big[\sum_0^n{}_r (-1)^r (r+1)\, P^{(r,h)}_{n|h}(x)\, y^{(n-r\; h)}(x+rh)\Big]^{(2,h)} = P_{n|h}(x)\, y^{(n+2,h)}(x)\,.$$

Ciò si verifica facilmente usando la formula

$$\{f(x)g(x)\}^{(2,h)} = f(x)\, g^{(2,h)}(x) + 2f^{(1,h)}(x)\, g^{(1,h)}(x+h) + f^{(2,h)}(x)\, g(x+2h)\,,$$

in virtù della quale il primo membro di (10) dà luogo ad una espressione che, con riduzioni immediate, è proprio il secondo membro di (10).

### 2.2. - Soluzione generale dell'equazione $(2_1)$.

Prederivando due volte l'equazione $(2_1)$ e tenendo presente la conclusione del n. precedente, si ottiene la semplice equazione $P_{n|h}(x)\, y^{(n+2,h)}(x) = 0$, ossia

$$(11)\qquad y^{(n+2,h)}(x) = 0.$$

La soluzione generale di (11) è, manifestamente,

$$(12)\quad y \equiv p_{(n+1)|h}(x) \equiv \tilde{c}_0\, x^{(n+1)|h} + \tilde{c}_1\, x^{n|h} + \dots + \tilde{c}_n\, x^{1|h} + \tilde{c}_{n+1} = \sum_0^{n+1}{}_s\, \tilde{c}_s\, x^{(n+1-s)|h}\,,$$

polinomio intero in $x$, di passo $h$, di grado $\leqslant n+1$, e di coefficienti arbitrarie costanti per l'incremento $h$. La soluzione generale di $(2_1)$ si ottiene allora dal precedente polinomio $p_{(n+1)|h}(x)$ imponendo che esso soddisfi all'equazione $(2_1)$, ossia che valga la condizione

$$(13)\qquad \sum_0^n{}_r (-1)^r (r+1) P^{(r,h)}_{n|h}(x)\, p^{(n-r,h)}_{(n+1)|h}(x+rh) = 0\,.$$

*Il primo membro di* (13) *è un polinomio* $\tilde{\alpha}_0\, x^{1|h} + \tilde{\alpha}_1$ *intero in* $x$, *di passo* $h$ *e di grado* 1: infatti la prederivata seconda di tale primo membro [tenendo presente (10) ove si ponga $y(x) \equiv p_{(n+1)|h}(x)$] è uguale a $P_{n|h}(x)\; p^{(n+2,h)}_{(n+1)|h}(x)$, cioè è zero, per essere $p^{(n+2,h)}_{(n+1)|h}(x) = 0$.

La condizione (13) diventa perciò (osservando che $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_1$ sono, evidentemente, funzioni delle precedenti $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+1}$)

$$(13') \qquad \begin{cases} \tilde{\alpha}_0(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+1}) = 0 \\ \tilde{\alpha}_1(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+1}) = 0 . \end{cases}$$

L'effettiva espressione di $\tilde{\alpha}_0(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+1})$ e $\tilde{\alpha}_1(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+1})$ si ottiene ora notando che *il primo membro di* (13), *qualora in esso si eseguano i calcoli indicati, prende la forma di un polinomio* $q_{(n+1)|h}(x)$ *intero in* $x$, *di passo* $h$ (*e di grado* $\leqslant n+1$) [8]. Quindi il polinomio $\tilde{\alpha}_0\, x^{1|h} + \tilde{\alpha}_1$ è proprio la somma degli ultimi due termini di $q_{(n+1)|h}(x)$: pertanto $\tilde{\alpha}_0$ e $\tilde{\alpha}_1$ sono dati dalla prederivata del primo membro di (13) e dal primo membro di (13), rispettivamente, quando si ponga $x = 0$ in tutte le loro potenze di passo $h$. Risulta così:

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_0 \equiv \sum_0^n{}_r (-1)^r (r+1)!\, \tilde{a}_{n-r} \sum_0^r{}_s (n+1-r)! \binom{n+1-s}{r-s} \tilde{c}_s\, (rh)^{(r-s)|h} + \\ \quad + \sum_0^{n-1}{}_r (-1)^r (r+1)!\, (r+1)\, \tilde{a}_{n-r-1} \sum_0^{r+1}{}_s (n-r)! \binom{n+1-s}{r+1-s} \tilde{c}_s\, \big((r+1)\,h\big)^{(r+1-s)|h} = 0 \\ \tilde{\alpha}_1 \equiv \sum_0^n{}_r (-1)^r (r+1)!\, \tilde{a}_{n-r} \sum_0^{r+1}{}_s (n-r)! \binom{n+1-s}{r+1-s} \tilde{c}_s\, (rh)^{(r+1-s)|h} = 0 \quad (^9). \end{cases}$$

Se ora mutiamo $r$ in $r-1$ nel secondo termine del primo membro della prima eguaglianza, unendo poi i due termini in uno solo; e se mutiamo $s$ in $s+1$ nel primo membro della seconda uguaglianza, dopo aver notato che è $(rh)^{(r+1-s)|h} = 0$ per $s = 0$, il sistema si scrive anche:

$$\begin{cases} \sum_0^n{}_r (-1)^r\, r!\, \tilde{a}_{n-r} \sum_0^r{}_s (n+1-r)! \binom{n+1-s}{r-s} \tilde{c}_s\, (rh)^{(r-s)|h} = 0 \\ \sum_0^n{}_r (-1)^r (r+1)!\, \tilde{a}_{n-r} \sum_0^r{}_s (n-r)! \binom{n-s}{r-s} \tilde{c}_{s+1}\, (rh)^{(r-s)|h} = 0 , \end{cases}$$

---

[8] Cfr. loc. cit. in [5].

[9] Intendendo che sia $(rh)^{(r-s)|h} = 1$ per $r = s = 0$; e $(rh)^{(r+1-s)|h} = 1$ per $r = 0$, $s = 1$.

ed infine, semplificando i prodotti di fattoriali e coefficienti binomiali, invertendo l'ordine delle sommatorie e tenendo presente che è $(rh)^{(r-s)|h} = (r!/s!)h^{r-s}$,

$$(13'')\qquad \begin{cases} \sum_0^n {}_s \left\{ \sum_s^n {}_r (-1)^r r! \binom{r}{s} h^{r-s} \tilde{a}_{n-r} \right\} (n+1-s)!\, \tilde{c}_s = 0 \\ \sum_0^n {}_s \left\{ \sum_s^n {}_r (-1)^r (r+1)! \binom{r}{s} h^{r-s} \tilde{a}_{n-r} \right\} (n-s)!\, \tilde{c}_{s+1} = 0 \,. \end{cases}$$

Concludendo: *il polinomio* (12), *ove le costanti* $\tilde{c}_s$ *soddisfino al sistema* (13''), *ci dà in termini finiti la soluzione generale di* $(2_1)$. Naturalmente per ottenere l'espressione esplicita della soluzione generale di $(2_1)$ basta distinguere vari casi a seconda del grado di $P_{n|h}(x)$, così come si è fatto per la $(2_0)$. Per brevità, ometto i calcoli relativi a questi vari casi.

**2.3. - Due esempi semplici.**

1°) Risolvere l'equazione

$$(14)\qquad (x^{2|h} + 2x^{1|h})\, y^{(2,h)}(x) - 2(2x^{1|h} + 2)\; y^{(1,h)}(x+h) + 6\, y(x+2h) = 0 \,.$$

Il sistema (13'') è ora

$$\begin{cases} 6h(h-1)\, \tilde{c}_0 + 2(2h-1)\, \tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 = 0 \\ 2h(3h-2)\, \tilde{c}_1 + 2(3h-1)\, \tilde{c}_2 + 3\tilde{c}_3 = 0 \,, \end{cases}$$

e la soluzione generale di (14) è

$$y = \tilde{c}_0\{ x^{3|h} + 6h(1-h)\, x^{1|h} + 4h(1-3h)(1-h)\} + \\ + \tilde{c}_1 \left\{ x^{2|h} + 2(1-2h)x^{1|h} + \frac{2}{3}\,(9h^2 - 8h + 2) \right\}.$$

2°) Risolvere l'equazione

$$\{3x + \cos(2\pi x/h)\}\, y^{(2,h)}(x) - 6\, y^{(1,h)}(x+h) = 0 \,.$$

La sua soluzione generale è

$$y = \tilde{c}_0\, \{x^{3|h} + [\cos(2\pi x/h) - 3h]\, x^{2|h} + \\ + \frac{1}{3}\,[\cos(2\pi x/h) - 3h][\cos(2\pi x/h) - 6h]\, x^{1|h}\} + \tilde{c}_3 \,.$$

## § 3. - Risoluzione in termini finiti dell'equazione $(2_m)$.

Risolviamo, in generale, l'equazione alle differenze, lineare e omogenea,

$$(2_m) \qquad \sum_0^n {}_r (-1)^r \binom{r+m}{m} P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, y^{(n-r,h)}(x+rh) = 0 \qquad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots)\,.$$

### 3.1. - Una proprietà del primo membro di $(2_m)$.

La prederivata $m+1$-esima [cfr. l'annotazione (1)] del primo membro di $(2_m)$ si riduce a un solo termine, precisamente è:

$$(15) \qquad \left[\sum_0^n {}_r (-1)^r \binom{r+m}{m} P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, y^{(n-r,h)}(x+rh)\right]^{(m+1,h)} = P_{n|h}(x)\, y^{(n+m+1,h)}(x)$$

Infatti, tenendo presente la formula

$$\{f(x)\, g(x)\}^{(m+1,h)} = \sum_0^{m+1} {}_s \binom{m+1}{s} f^{(s,h)}(x)\, g^{(m+1-s,h)}(x+sh)\,,$$

il primo membro di (15) diventa

$$\sum_0^n {}_r (-1)^r \binom{r+m}{m} \sum_0^{m+1} {}_s \binom{m+1}{s} P_{n|h}^{(r+s,h)}(x)\, y^{(n+m+1-r-s,h)}(x+(r+s)h),$$

oppure

$$\sum_0^n \sum_0^{n-r} {}_s (-1)^r \binom{r+m}{m} \binom{m+1}{s} P_{n|h}^{(r+s,h)}(x)\, y^{(n+m+1-r-s,h)}(x+(r+s)h) \quad (10).$$

Se ora qui poniamo $s = \nu - r$ (e con ciò $\nu$ varierà da $r$ ad $n$) e invertiamo le sommatorie, otteniamo

$$\sum_0^n {}_\nu \sum_0^\nu {}_r (-1)^r \binom{r+m}{m} \binom{m+1}{\nu-r} P_{n|h}^{(\nu,h)}(x)\, y^{(n+m+1-\nu,h)}(x+\nu h)\,,$$

o anche

$$(16) \qquad \sum_0^n {}_\nu P_{n|h}^{(\nu,h)}(x)\, y^{(n+m+1-\nu,h)}(x+\nu h) \sum_0^\nu {}_r (-1)^r \binom{r+m}{m} \binom{m+1}{\nu-1}\,.$$

---

(10) Notando che, quando è $m+1 > n-r$ si ha $P_{n|h}^{(r+s,h)} = 0$ per $s = n-r+1$, $n-r+2$, ..., $m+1$; e quando è $m+1 < n-r$ si ha $\binom{m+1}{s} = 0$ per $s = m+2$, $m+3$, ..., $n-r$.

Essendo poi

$$\sum_{0}^{\nu}{}_{r}\,(-1)^r \binom{r+m}{m}\binom{m+1}{\nu-r} = \varepsilon_\nu = \begin{cases} 1 & \text{per } \nu = 0 \\ 0 & \text{per } \nu \neq 0 \quad (^{11}), \end{cases}$$

da (16) si ottiene proprio il secondo membro di (15).

### 3.2. - Soluzione generale dell'equazione $(2_m)$.

Prederivando $m+1$ volte l'equazione $(2_m)$ e tenendo presente la conclusione del n. precedente, si ottiene la semplice equazione $P_{n|h}(x)\, y^{(n+m+1,h)}(x) = 0$, ossia

$$y^{(n+m+1,h)}(x) = 0\,. \tag{17}$$

La soluzione generale di (17) è, manifestamente,

$$y \equiv p_{(n+m)|h}(x) \equiv \tilde{c}_0\, x^{(n+m)|h} + \tilde{c}_1\, x^{(n+m-1)|h} + \ldots + \tilde{c}_{n+m-1}\, x^{1|h} + \tilde{c}_{n+m} = \sum_{0}^{n+m}{}_{s}\, \tilde{c}_s\, x^{(n+m-s)|h}\,, \tag{18}$$

polinomio intero in $x$, di passo $h$, di grado $\leqslant n+m$, e di coefficienti arbitrarie costanti per l'incremento $h$. La soluzione generale di $(2_m)$ si ottiene allora dal precedente polinomio $p_{(n+m)|h}(x)$ imponendo che esso soddisfi all'equazione $(2_m)$, ossia che valga la condizione

$$\sum_{0}^{n}{}_{r}\,(-1)^r \binom{r+m}{m} P_{n|h}^{(r,h)}(x)\, p_{(n+m)|h}^{(n-r,h)}(x+rh) = 0\,. \tag{19}$$

*Il primo membro di* (19) *è un polinomio* $\tilde{\alpha}_0\, x^{m|h} + \tilde{\alpha}_1\, x^{(m-1)|h} + \ldots + \tilde{\alpha}_m$ *intero in* $x$, *di passo* $h$ *e di grado* $m$: infatti la prederivata $(m+1)$-esima di tale primo membro [tenendo presente (15) ove si ponga $y(x) = p_{(n+m)|h}(x)$] è uguale a $P_{n|h}(x)\, p_{(n+m)|h}^{(n+m+1,h)}(x)$, cioè è zero, per essere $p_{(n+m)|h}^{(n+m+1,h)}(x) = 0$.

La condizione (19) diventa perciò [osservando che le $\tilde{\alpha}_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, \ldots, m)$ sono, evidentemente, funzioni delle precedenti $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+m}$]

$$\tilde{\alpha}_\mu(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{n+m}) = 0 \qquad (\mu = 0, 1, 2, \ldots, m). \tag{19'}$$

---

(11) Su questo risultato e sul significato di $\varepsilon_\nu$ cfr., ad esempio, [2] loc. cit. in (2).

L'effettiva espressione delle $\tilde{\alpha}_\mu(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, ..., \tilde{c}_{n+m})$ $(\mu = 0, 1, 2, ..., m)$ si ottiene ora notando che *il primo membro di* (19), *qualora in esso si eseguano i calcoli indicati, prende la forma di un polinomio* $q_{(n+m)|h}(x)$ *intero in* $x$, *di passo* $h$ (*e di grado* $\leqslant n + m$) [12]. Quindi il polinomio $\tilde{\alpha}_0 x^{m|h} + \tilde{\alpha}_1 x^{(m-1)|h} + ... + \tilde{\alpha}_m$ è proprio la somma degli ultimi $m + 1$ termini di $q_{(n+m)|h}(x)$: pertanto gli $\tilde{\alpha}_\mu$ $(\mu = 0, 1, 2, ..., m)$ sono dati, rispettivamente, dalle prederivate $(m - \mu)$-esime $(\mu = 0, 1, 2, ..., m)$ del primo membro di (19) divise per $(m - \mu)!$ $(\mu = 0, 1, 2, ..., m)$, quando si ponga $x = 0$ in tutte le loro potenze di passo $h$. Risulta così:

$$\tilde{\alpha}_\mu \equiv \sum_0^n {}_s\,(n + m - s - \mu)!\,\tilde{c}_{s+\mu} \sum_s^n {}_\nu\,\nu!\binom{\nu}{s} h^{\nu-s}\tilde{a}_{n-\nu} \sum_0^\nu {}_r\,(-1)^r\binom{r+m}{m}\binom{m-\mu}{\nu-r} = 0$$

$$(\mu = 0, 1, 2, ..., m),$$

ed essendo $\sum_0^\nu {}_r\,(-1)^r\binom{r+m}{m}\binom{m-\mu}{\nu-r} = (-1)^\nu\binom{\mu+\nu}{\nu}$ si ha anche

$$(19'')\qquad \sum_0^n {}_s\left\{\sum_s^n {}_\nu\,(-1)^\nu(\nu+\mu)!\binom{\nu}{s} h^{\nu-s}\,\tilde{a}_{n-\nu}\right\}(n + m - s - \mu)!\,\tilde{c}_{s+\mu} = 0$$

$$(\mu = 0, 1, 2, ..., m).$$

Concludendo: *il polinomio* (18), *ove le costanti* $\tilde{c}_s$ *soddisfino al sistema* (19''), *ci dà in termini finiti la soluzione generale di* $(2_m)$ [13]. Naturalmente per ottenere l'espressione esplicita della soluzione generale di $(2_m)$ basta anche qui distinguere vari casi a seconda del grado di $P_{n|h}(x)$. Per brevità ometto i relativi calcoli.

---

(12) Cfr. loc. cit. in (5).

(13) Se $P_{n|h}(x)$ è un polinomio di APPELL, di passo $h$ [cfr. loc. cit. in (7)], la $(2_m)$ si scrive

$$\sum_0^n {}_r\,\frac{(-1)^r}{(n-r)!}\binom{r+m}{m}P_{(n-r)|h}(x)\,y^{(n-r,h)}(x + rh) = 0,$$

e la (19'') diventa

$$\sum_0^n {}_s\left\{\sum_s^n {}_\nu\,(-1)^\nu(\nu+\mu)!\binom{n}{\nu}\binom{\nu}{s} h^{\nu-s}\,\tilde{a}_{n-\nu}\right\}(n + m - s - \mu)!\,\tilde{c}_{s+\mu} = 0$$

$$(\mu = 0, 1, 2, ..., m).$$

## Bibliografia.

[1] R. Badesco, E. Dumitresco et C. Saulesco, *Sur une équation différentielle linéaire à coefficients variables.* L'Enseignement Math. (2) **11** (1965), 126-136.

[2] C. Scaravelli, *Su i polinomi di Appell.* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **6** (1965), 95-108.

[3] C. Scaravelli, *Polinomi di Appell nel senso del Calcolo delle differenze finite.* Riv. Mat. Univ. Parma (2) **8** (1967), 355-366.

## Sommario.

*Si risolve una certa classe di equazioni alle differenze, lineari e omogenee* (cfr. Introduzione).

## Summary.

*A certain class of homogeneous linear difference equations is solved* (see Introduction).