Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 139-153

VITTORIO MANGIONE (*)

Su alcune classi di connessioni di una varietà quasi complessa. (**)

1. - Introduzione.

È noto che le ricerche di B. ECKMANN ed A. FRÖLICHER del 1953-55 e quelle successive di K. YANO, E. MARTINELLI, G. B. RIZZA e di altri hanno condotto ad individuare su di una varietà V a struttura quasi complessa diverse classi di connessioni, dotate di interessanti proprietà geometriche (⁰).

In questo lavoro vengono stabiliti alcuni risultati relativi alle classi ora accennate e precisamente alle connessioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0, alle connessioni di MARTINELLI, alle connessioni semisimmetriche e J-semisimmetriche, alle connessioni nelle quali è parallelo il tensore fondamentale h della struttura quasi complessa (nn. **5**, **6**).

Intervengono in modo essenziale nelle considerazioni, oltre al tensore $D_\Lambda h$ ottenuto da h per derivazione covariante nella connessione Λ, i tensori $R(\Lambda)$, $S(\Lambda)$, che si costruiscono a partire da $D_\Lambda h$, già sistematicamente utilizzati nel lavoro [**8**] di G. B. RIZZA (n. **4**).

Precisamente, sfruttando un lemma di carattere algebrico (n. **7**), si perviene a riconoscere che, se per una coppia di connessioni Λ, Λ^* risulta $R(\Lambda) = R(\Lambda^*)$ ed $S(\Lambda) = S(\Lambda^*)$, allora si ha $D_\Lambda h = D_{\Lambda^*} h$ (Teorema $\boldsymbol{T}_1$, n. **8**).

Immediata conseguenza di questo risultato è che l'annullarsi su V dei tensori $R(\Lambda)$ ed $S(\Lambda)$ caratterizza le connessioni Λ nelle quali il tensore fondamentale h, associato alla struttura quasi complessa, è parallelo (Teorema $\boldsymbol{T}_3$, n. **8**).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Raggruppamento di Ricerca n. 1 del C.N.R. — Ricevuto: 24-VII-1968.

(⁰) Si vedano, per esempio, i lavori [3], [6], [8], [13] della Bibliografia posta in fine.

Altre conseguenze sono: una caratterizzazione delle connessioni di MARTINELLI che godono della proprietà ora indicata, ed una caratterizzazione delle connessioni ϱ_+ tra le connessioni di MARTINELLI (Teoremi $\boldsymbol{T}_1$, $\boldsymbol{T}_2$, n. **8**).

Tutte le classi di connessioni accennate all'inizio, salvo l'ultima, costituiscono delle generalizzazioni della classe delle connessioni simmetriche. Condizioni perchè una connessione appartenente ad una di quelle classi si riduca ad una connessione simmetrica, sono indicate al n. **10** (Teoremi $\boldsymbol{T}_5$, $\boldsymbol{T}_6$, $\boldsymbol{T}_7$; Corollari $\boldsymbol{C}_1$, $\boldsymbol{C}_2$).

Infine, al n. **12** si dànno alcuni teoremi di annullamento per il tensore di NIJENHUIS N, associato alla struttura quasi complessa di V. Nelle note ipotesi sulle classi di V e del campo dei tensori h, discendono alcune condizioni perchè la varietà V risulti a struttura complessa (Teoremi $\boldsymbol{T}_8$, $\boldsymbol{T}_9$; Osservazione $\boldsymbol{O}_1$).

2. - Struttura quasi complessa.

Si consideri una varietà a struttura quasi complessa V di dimensione $2n$ ($n \geqslant 2$) e di classe $\mathscr{C}^r$ ($r \geqslant 1$). Sia τ lo spazio vettoriale tangente in un punto x di V, τ_* lo spazio vettoriale duale (1).

Indicati con $\mathscr{H}$ il campo tensoriale misto, di classe $\mathscr{C}^s$ ($1 \leqslant s \leqslant r-1$), che determina la struttura di V, e con $\mathscr{N}$ il campo tensoriale di NIJENHUIS associato ad $\mathscr{H}$, siano $h \in \tau_* \otimes \tau$ e $N \in \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$ i corrispondenti tensori nel punto x di V.

Come è noto, per il tensore h è

$$c_2^1\,(h \otimes h) = c_1^2\,(h \otimes h) = -\,\delta\,, \tag{1}$$

dove δ è il tensore di KRONECKER e c_1^2 e c_2^1 indicano contrazione (2).

Intervengono nel seguito l'isomorfismo anti-involutorio $\boldsymbol{J}$ definito in τ dalla struttura quasi complessa di V (*isomorfismo fondamentale*) e, più in generale, gli isomorfismi (*rotazioni caratteristiche*)

$$\boldsymbol{J}\varphi = \boldsymbol{I}\cos\varphi + \boldsymbol{J}\,\mathrm{sen}\varphi \qquad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)\ (3).$$

---

(1) Per le generalità sulle varietà quasi complesse vedasi B. ECKMANN, [3], (§§ I, II, III, VI); E. MARTINELLI, [5], [6], (I-VI); K. YANO, [11], [12]; e i lavori [8], [9] di G. B. RIZZA ai quali si rinvia anche per le notazioni.

(2) In generale c_s^r è l'applicazione tensoriale di contrazione relativa all'r-esimo indice di contravarianza ed allo s-esimo di covarianza (N. BOURBAKI, [1], p. 45).

(3) È opportuno talora intendere φ variabile in $\boldsymbol{R}$ e porre $\boldsymbol{J}_{\varphi+2m\pi} = \boldsymbol{J}_\varphi$ ($m \in \boldsymbol{Z}$).

Un bivettore semplice

$$\beta = u \wedge v = \tfrac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u) \qquad (u,\ v \in \tau)$$

si dice *caratteristico* quando $J_\varphi \beta = J_\varphi u \wedge J_\varphi v$ coincide con β.

Conviene ricordare che se $w \in \tau$ si ha:

$$(2) \qquad Jw = c_1^2(h \otimes w) = c_1^1(w \otimes h)\,.$$

L'isomorfismo J si estende in modo naturale allo spazio vettoriale τ_* (4). Precisamente se $t \in \tau_*$, si ha

$$(3) \qquad Jt = -\, c_2^1(h \otimes t) = -\, c_1^1(t \otimes h)\,.$$

Infine, dalla definizione segue immediatamente

$$(4) \qquad J\beta = c_1^2\big(h \otimes c_1^2(h \otimes \beta)\big)\,,$$

per ogni bivettore β (5).

3. - Tensori di $\tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$.

Intervengono spesso nel seguito i tensori Z dello spazio $\mathscr{T} = \tau_* \otimes \tau_* \otimes \tau$. È immediato riconoscere che può scriversi:

$$(5) \qquad Z = \sigma(Z) + \varepsilon(Z)\,,$$

dove σ, ε *sono gli operatori di simmetrizzazione, di emisimmetrizzazione* rispetto agli indici di covarianza (6). Gli operatori σ e ε sono idempotenti, cioè

$$(6) \qquad \sigma\big(\sigma(Z)\big) = \sigma(Z)\,, \qquad \varepsilon\big(\varepsilon(Z)\big) = \varepsilon(Z)\,.$$

Inoltre

$$(7) \qquad \sigma\big(\varepsilon(Z)\big) = \varepsilon\big(\sigma(Z)\big) = 0\,.$$

---

(4) G. B. Rizza, [9], n. 3.

(5) Piú in generale, vedasi G. B. Rizza, [9], n. 4.

(6) Vedasi, per es., T. I. Willmore, [11], p. 190; N. Bourbaki, [1], pp. 53-61.

Se poi m è un qualunque tensore di $\tau_*\otimes\tau$, tenuto conto che σ ed ε operano sui primi due indici di covarianza, si ha subito:

$$\sigma\, c_3^1\,(Z\otimes m) = c_3^1\,\big(\sigma(Z)\otimes m\big)\,, \tag{8}$$
$$\varepsilon\, c_3^1\,(Z\otimes m) = c_3^1\,\big(\varepsilon(Z)\otimes m\big)\,.$$

Per il seguito è utile introdurre l'operatore α definito da

$$\alpha(Z) = \sigma(Z) - \varepsilon(Z)\,. \tag{9}$$

Tenute presenti le (5), segue subito

$$\sigma\big(\alpha(Z)\big) = \sigma(Z)\,, \qquad \varepsilon\big(\alpha(Z)\big) = -\,\varepsilon(Z)\,, \tag{10}$$
$$\alpha\big(\alpha(Z)\big) = Z\,.$$

Dalla (7) discende poi immediatamente

$$\alpha\, c_3^1\,(Z\otimes m) = c_3^1\,\big(\alpha\,(Z)\otimes m\big)\,. \tag{11}$$

Conviene ancora notare che [7]

$$\sigma\, c_3^1\big(m\otimes c_3^1(m\otimes Z)\big) = c_3^1\big(m\otimes c_3^1(m\otimes \sigma(Z))\big)\,. \tag{12}$$

È bene infine ricordare che ad ogni tensore Z di $\mathscr{T}$ può associarsi il *tensore* $K(Z)$ definito da [8]

$$4\,K(Z) = Z - c_3^1(\alpha\, c_2^1(h\otimes Z)\otimes h) - c_3^1\big(c_2^1\,(h\otimes\alpha\, Z)\otimes h\big) - c_3^1\big(h\otimes c_3^1(h\otimes Z)\big). \tag{13}$$

Gli operatori σ, ε, α, K sono lineari.

4. - Tensori $D_A h$, $R(A)$, $S(A)$.

Si consideri ora su V una *connessione* A. Sia Γ la *connessione simmetrica associata* e $T(A)\in\mathscr{T}$ la *torsione*.

---

(7) Invero, posto $W = c_3^1(m\otimes c_3^1(m\otimes Z))$, uno scambio degli indici di covarianza del tensore Z si ripercuote in uno scambio degli stessi indici di W, onde, tenuto conto che $2\sigma = 1 + \alpha$ (1 = identità), si ha subito la (12) del testo.

(8) Il tensore $K(Z)$ è stato introdotto da G. B. Rizza in [8], p. 241.

Intervengono nel lavoro i tensori $D_A\, h$, $R(A)$, $S(A)$ appartenenti allo spazio $\mathscr{T}$ (9). Il primo è ottenuto dal tensore h mediante il processo di *derivazione covariante* rispetto a A. Gli altri sono definiti da

$$2\, R(A) = \varepsilon\, c_3^1\big(h \otimes \varepsilon(D_A\, h)\big)\,, \tag{14}$$

$$2\, S(A) = \sigma\, c_3^1\big(h \otimes \varepsilon\, (D_A\, h)\big) - c_3^1\left(\sigma\, (D_A\, h) \otimes h\right)\,, \tag{15}$$

dove σ ed ε sono gli operatori introdotti al n. **3**.

In particolare, per il tensore $D_A\, h$ vale la relazione

$$\alpha\, c_3^1\, (D_A\, h \otimes h) + c_3^1(h \otimes D_A\, h) = 0 \tag{16}$$

che si ottiene subito dalla (1) (10).

Tra il tensore N di NIJENHUIS (n. **2**) ed i tensori $T(A)$, $R(A)$, associati ad una connessione A su V, sussiste questa interessante *relazione*

$$R(A) = N - K\big(T(A)\big), \tag{17}$$

utile nel seguito. Essa fa intervenire l'operatore K (n. **3**) e discende subito da una relazione di G. B. RIZZA (11).

In particolare per una connessione Γ simmetrica $[T(\Gamma) = 0]$, si ritrova la nota relazione (12)

$$R(\Gamma) = N\,. \tag{18}$$

5. - Connessioni di Martinelli. Connessioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0.

Conviene ricordare che se β un arbitrario bivettore semplice definito dai vettori u, v di τ, lo *spostamento di* CARTAN di β in relazione alla connessione A è

$$\Omega(\beta) = -2\, c_1^2\left(c_1^2\, (T(A) \otimes \beta)\right)\,.$$

---

(9) G. B. RIZZA, [8], p. 237.

(10) G. B. RIZZA, [8], formula (26), p. 243.

(11) Precisamente, partendo dalla (19) del lavoro [8] si perviene subito alla (17).

(12) Vedasi, per es., B. ECKMANN, [3], prop. 3.3., p. 18; K. YANO, [12], th. 2.2, p. 230.

È noto che la considerazione dello spostamento di CARTAN permette di individuare alcune interessanti classi di connessioni. Precisamente, le classi accennate sono implicitamente definite dalle condizioni (13):

ϱ_+, ϱ_-: *Ad una rotazione caratteristica del bivettore* β *corrisponde una rotazione caratteristica concorde (discorde) dello spostamento di Cartan* $\Omega(\beta)$.

ϱ_0: *Lo spostamento di Cartan* $\Omega(\beta)$ *è invariante per qualunque rotazione caratteristica del bivettore* β.

μ: *Lo spostamento di Cartan* $\Omega(\beta)$ *relativo ai bivettori* β *caratteristici è nullo.*

La condizione μ è stata introdotta da E. MARTINELLI nel 1956 (14). Le connessioni soddisfacenti alla μ (*connessioni prive di torsione caratteristica*) si diranno quindi *connessioni di Martinelli*.

Le connessioni soddisfacenti alle condizioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 (brevemente: connessioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0) sono state considerate per la prima volta da G. B. RIZZA (nel 1965), che ne ha segnalato varie proprietà.

È immediato rilevare che le connessioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0 e di MARTINELLI costituiscono classi di connessioni più generali di quella delle connessioni simmetriche $[\Omega(\beta) \equiv 0]$.

Per il seguito è opportuno osservare che le condizioni geometriche ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0, μ si traducono rispettivamente nelle *relazioni* (15):

$$\Omega(J_\varphi \beta) = J_{\pm 2\varphi}\, \Omega(\beta)\,, \tag{19}$$

$$\Omega(J\beta) = \pm\, \Omega(\beta)\,. \tag{20}$$

È noto che le condizioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0, μ per la connessione Λ equivalgono al fatto che la torsione $T(\Lambda)$ soddisfa ad alcune condizioni formali introdotte da G. B. RIZZA e da lui indicate con A, B, D e C (16). Ad esempio, la condizione A per un arbitrario tensore $Z \in \mathscr{T}$ è

$$\text{A:} \qquad c_3^1(Z \otimes h) = \alpha\, c_3^1(h \otimes Z)\,, \qquad c_3^1(Z \otimes h) = c_3^1(h \otimes \alpha Z)\,.$$

---

(13) G. B. RIZZA, [8], p. 242.

(14) E. MARTINELLI, [5], p. 12; [6], p. 32.

(15) Per la (19) si perviene subito al risultato tenendo presente la (31) del n. 13 e l'osservazione $\psi = \pm 2\varphi$ al n. 14 del lavoro [8] di G. B. RIZZA e l'annotazione (3) di questo lavoro. Per le (20) l'asserto è immediata conseguenza della (29) e dei Teoremi T_2, T_3 del medesimo lavoro.

(16) G. B. RIZZA, [8], p. 240.

Interverrà nel seguito anche la condizione

$$\overline{\mathrm{A}}_1: \qquad c_3^1(Z \otimes h) = -\alpha\, c_3^1\, h \otimes Z) \, .$$

Dalla (16), tenuto presente la $(10)_3$, segue che *il tensore* $D_A\, h$ *soddisfa alla condizione* $\overline{\mathrm{A}}_1$.

Infine, conviene ricordare che *le connessioni* ϱ_+ *e le connessioni* ϱ_- *sono connessioni di Martinelli* [17].

6. - Altre classi di connessioni.

Una diversa generalizzazione della nozione di connessione simmetrica, conduce a considerare le connessioni *semisimmetriche* e ***J****-semisimmetriche* [18]. Esse sono rispettivamente caratterizzate da una torsione del tipo:

$$T(A) = \varepsilon(t \otimes \delta) \, , \tag{21}$$

$$T(A) = \varepsilon(t \otimes h) \, , \tag{22}$$

dove δ ed h sono, rispettivamente, il tensore di KRONECKER e il tensore della struttura quasi complessa, e t è il vettore di τ_* appartenente ad un qualunque campo covariante di V.

Un'altra interessante classe è quella costituita dalle connessioni per le quali *il campo* $\mathscr{H}$ *della struttura quasi complessa è parallelo.* Cioè, in ogni punto di V risulta:

$$D_A\, h = 0 \quad [19] \, . \tag{23}$$

Questa condizione equivale alla proprietà geometrica che il trasporto parallelo della connessione è permutabile con le rotazioni caratteristiche determinate dalla struttura quasi complessa (n. **1**).

In particolare, se oltre alla (23) risulta

$$T(A) = N \, ,$$

A è una *connessione di Eckmann-Frölicher* [20].

---

(17) Vedasi, per es., G. B. RIZZA, [9], n. 10, notando che da ciascuna delle (17), posto $\varphi = \pi/2$, segue la (16).

(18) G. B. RIZZA, [8], p. 238. Ivi la condizione (22) è introdotta per la prima volta.

(19) Cfr., per es., il lavoro [12] di K. YANO, dove il tensore h è indicato con F e le connessioni di questo tipo sono chiamate *F-connessioni.*

(20) Vedasi, per es., G. B. RIZZA, [8], nn. 18, 19, 20.

7. - Tensori $r(Z)$, $s(Z)$.

Le formule (14), (15), che definiscono i tensori $R(A)$, $S(A)$ (n. 4), suggeriscono di considerare, più in generale, per ogni Z di $\mathscr{T}$, i tensori

$$r(Z) = \varepsilon\, c_3^1(h \otimes \varepsilon\, Z)\,, \tag{24}$$

$$s(Z) = \sigma\, c_3^1(h \otimes \varepsilon\, Z) - c_3^1(\sigma\, Z \otimes h)\,. \tag{25}$$

È immediato rilevare che $r(Z)$ è un *tensore emisimmetrico*, $s(Z)$ è un *tensore simmetrico* ([21]) e risulta

$$2\, R(A) = r(D_A\, h)\,, \qquad 2\, S(A) = s(D_A\, h)\,. \tag{26}$$

Ciò premesso, conviene stabilire il Lemma

L: *Se Z soddisfa alla condizione $\overline{\mathrm{A}}_1$ ed è $r(Z) = s(Z) = 0$, allora $Z = 0$.*

Il primo passo della dimostrazione consiste nell'osservare che la (25) può scriversi nella forma equivalente

$$2\, s(Z) = -3\, c_3^1(\sigma\, Z \otimes h) - \sigma\, c_3^1(h \otimes \alpha\, Z)\,. \tag{27}$$

Invero, tenute presenti le (5), (9) e successivamente la condizione $\overline{\mathrm{A}}_1$ del n. **5**, si ha

$$\begin{aligned} c_3^1(h \otimes \varepsilon\, Z) &= \tfrac{1}{2}\, c_3^1(h \otimes Z) - \tfrac{1}{2}\, c_3^1(h \otimes \alpha\, Z) \\ &= -\tfrac{1}{2}\, \alpha\, c_3^1(Z \otimes h) - \tfrac{1}{2}\, c_3^1(h \otimes \alpha\, Z)\,. \end{aligned}$$

Sostituendo poi nella (25), in virtù delle $(10)_1$, $(8)_1$ si perviene subito alla (27).

Si moltiplichino ora a destra per h i due membri della (27) e si operi la contrazione c_3^1. Si ottiene

$$\begin{aligned} 2\, c_3^1\big(s(Z) \otimes h\big) &= -3\, c_3^1\big(\sigma\, Z \otimes c_2^1(h \otimes h)\big) - \sigma\, c_3^1\big(h \otimes c_3^1(\alpha\, Z \otimes h)\big) \\ &= 3\, c_3^1(\sigma\, Z \otimes \delta) - \sigma\, c_3^1\big(h \otimes \alpha\, c_3^1(Z \otimes h)\big)\,, \end{aligned}$$

in virtù delle (1), (11), tenuta presente ancora la condizione $\overline{\mathrm{A}}_1$ e la (12), si

---

([21]) In virtú della $(8)_1$ del n. **3**.

perviene a

$$(28) \qquad 2\, c_3^1(s(Z)\otimes h) = 3\,\sigma\, Z + c_3^1(h\otimes c_3^1(h\otimes \sigma\, Z))\,.$$

Dalla (28), moltiplicando a sinistra per $h\otimes h$ e saturando i primi due indici contravarianza con i due indici di covarianza, si ottiene una relazione che, a causa della (1), diviene

$$(29) \qquad 2\, c_3^1(h\otimes c_3^1(h\otimes c_3^1(s(Z)\otimes h))) = 3\, c_3^1(h\otimes c_3^1(h\otimes \sigma\, Z)) + \sigma\, Z.$$

Ciò premesso, poichè per ipotesi è $s(Z) = 0$, le (28), (29) si riducono a

$$3\,\sigma\, Z + c_3^1(h\otimes c_3^1(h\otimes \sigma\, Z)) = 0\,,$$

$$3\, c_3^1(h\otimes c_3^1(h\otimes \sigma\, Z)) + \sigma\, Z = 0\,,$$

da cui segue ovviamente

$$(30) \qquad \sigma\, Z = 0\,.$$

D'altra parte, essendo $R(A) = S(A) = 0$, sommate membro a membro le (24), (25) e tenuto conto della (30), risulta $c_3^1(h\otimes \varepsilon Z) = 0$. Di qui, moltiplicando a sinistra per h ed operando la contrazione c_2^1, a causa della (1), segue

$$(31) \qquad \varepsilon\, Z = 0\,.$$

Dalle (30), (31) discende infine $Z = 0$ ed il Lemma è provato.

8. - Teoremi generali.

Il Lemma stabilito al n. **7** consente di stabilire diversi risultati Precisamente, sussiste il *Teorema*:

$\boldsymbol{T}_1$: *Se A, A^* sono due connessioni su V e risulta $R(A) = R(A^*)$ ed $S(A) = S(A^*)$, allora è $D_A\, h = D_{A^*}\, h$.*

Per dimostrare $\boldsymbol{T}_1$ basta notare che il tensore $Z = D_A\, h - D_{A^*}\, h$ (come $D_A\, h$ e $D_{A^*}\, h$) soddisfa alla condizione $\bar{\mathrm{A}}_1$ del n. **5**. Inoltre, tenuta presente la (26) e la linearità degli operatori r, s introdotti al n. **7**, risulta $r(Z) = s(Z) = 0$. Sono quindi soddisfatte le ipotesi del Lemma $\boldsymbol{L}$ e segue subito la conclusione.

Dal Teorema $\boldsymbol{T}_1$ discendono varie conseguenze. Invero, posto formalmente $\Lambda = \Gamma + T$ (n. 4), sussistono i Teoremi:

$\boldsymbol{T}_2$: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè una connessione di Martinelli sia una connessione ϱ_+ è che risulti $K(T) = 0$.*

$\boldsymbol{T}_3$: *L'essere il campo $\mathscr{H}$ parallelo nella connessione Λ equivale all'annullarsi su V dei tensori $R(\Lambda)$ e $S(\Lambda)$.*

$\boldsymbol{T}_4$: *Condizione necessaria e sufficiente affinchè in una connessione di Martinelli il campo $\mathscr{H}$ della struttura complessa riesca parallelo, è che risulti $S(\Gamma) = 0$, inoltre, che il tensore $T - N$ soddisfi alla condizione A di Rizza.*

Conviene notare esplicitamente che i Teoremi $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$, $\boldsymbol{T}_4$ ora enunciati sono *teoremi di caratterizzazione.* Invero essi permettono di caratterizzare rispettivamente le connessioni ϱ_+ (tra quelle di MARTINELLI), le connessioni nelle quali il campo $\mathscr{H}$ è parallelo e, entro queste, quelle che sono anche connessioni di MARTINELLI.

Nelle dimostrazioni (al numero successivo) interviene come elemento essenziale il *teorema di confronto* $\boldsymbol{T}_1$.

9. - Dimostrazioni dei Teoremi $\boldsymbol{T}_2$, $\boldsymbol{T}_3$, $\boldsymbol{T}_4$.

Per provare $\boldsymbol{T}_2$ si ricordi che per le connessioni ϱ_+ è $D_\Lambda h = D_\Gamma h$ [22] e quindi $R(\Lambda) = R(\Gamma)$ (n. 4). Dalle (17), (18) segue immediatamente $K(T) = 0$. Inversamente, se Λ è una connessione di MARTINELLI, risulta $S(\Lambda) = S(\Gamma)$ [23], mentre dall'ipotesi $K(T) = 0$, in virtù delle (17), (18) segue $R(\Lambda) = R(\Gamma)$. Il Teorema $\boldsymbol{T}_1$ porta allora alla conclusione $D_\Lambda h = D_\Gamma h$ e pertanto Λ è una connessione ϱ_+ [24].

Poichè la condizione sul campo $\mathscr{H}$ significa che su ogni punto di V è $D_\Lambda h = 0$, (n. 6), la dimostrazione di $\boldsymbol{T}_3$ si riduce a mostrare che da $R(\Lambda) = S(\Lambda) = 0$ segue $D_\Lambda h = 0$, la parte inversa essendo evidente (n. 4).

A questo scopo sia Λ^* una qualunque connessione di ECKMANN-FRÖLICHER [25] è allora $D_{\Lambda^*} h = R(\Lambda^*) = S(\Lambda^*) = 0$ (n. 6). Basta ora applicare il teorema $\boldsymbol{T}_1$ per giungere immediatamente all'asserto.

La dimostrazione di $\boldsymbol{T}_4$ può ottenersi così. Accanto alla connessione $\Lambda = \Gamma + T$ di cui all'enunciato si consideri la connessione $\Lambda^* = \Gamma + T - N$, notando

---

([22]) G. B. RIZZA, [8], Teorema T_{12}, p. 249.
([23]) G. B. RIZZA, [8], Teorema T_{10}, p. 249.
([24]) Vedasi l'annotazione ([22]).
([25]) Per l'esistenza di connessioni di ECKMANN-FRÖLICHER si veda, per es., G. B. RIZZA, [8], p. 251.

che, nel caso attuale, il tensore $\sum$ (differenza delle connessioni simmetriche associate) risulta nullo, mentre il tensore E (differenza delle torsioni) si riduce ad $-N$ (26).

Poichè N soddisfa alle condizioni B, C di RIZZA (27), dai Teoremi T_4, T_7 di questo Autore (28) segue

$$S(A^*) = S(A)\,, \qquad R(A^*) = R(A) + N\,.$$

Se ora per ipotesi, il campo $\mathscr{H}$ è parallelo nella connessione A, si ha $R(A) = S(A) = 0$ (Teorema $\boldsymbol{T}_3$), onde

$$S(A^*) = 0\,, \qquad R(A^*) = N\,. \tag{32}$$

D'altra parte A è una connessione di MARTINELLI, quindi $S(A) = S(\Gamma)$ (29). Ma $S(A) = 0$, perciò *necessariamente* $S(\Gamma) = 0$.

Ora, poichè $R(\Gamma) = N$ (n. 4), dalla (32) discende

$$S(A^*) = S(\Gamma)\,, \qquad R(A^*) = R(\Gamma)\,,$$

onde, in base al Teorema $\boldsymbol{T}_1$ si conclude che $D_{A^*}h = D_\Gamma h$. Il Teorema T_{12} di G. B. RIZZA assicura allora che *A^* è una connessione ϱ_+* (30); la sua torsione *$T - N$ soddisfa quindi alla condizione* A (n. 5). Inversamente la condizione $S(\Gamma) = 0$, essendo A una connessione di MARTINELLI, conduce subito a $S(A) = 0$ (31). Inoltre, dalla (17) segue

$$R(A) = N - K(T) = - K(T - N)\,,$$

e l'ultima espressione riesce nulla se $T - N$ soddisfa alla condizione A (32).

In conclusione risulta $R(A) = S(A) = 0$ ed il Teorema $\boldsymbol{T}_3$ conduce all'asserto.

Il Teorema $\boldsymbol{T}_4$ è ora completamente dimostrato.

---

(26) G. B. RIZZA, [8], n. 5.
(27) G. B. RIZZA, [8], n. 10.
(28) G. B. RIZZA, [8], n. 15.
(29) G. B. RIZZA, [8], Teorema T_{10}, p. 249.
(30) G. B. RIZZA, [8], Teorema T_{12}, p. 249.
(31) G. B. RIZZA, [8], Teorema T_{10}, p. 249.
(32) G. B. RIZZA, [8], Osservazione O_8, p. 242.

10. - Connessioni simmetriche.

Come si è accennato ai nn. 5, 6, le connessioni soddisfacenti alle condizioni ϱ_+, ϱ_-, ϱ_0, le connessioni di MARTINELLI, le connessioni semisimmetriche e $\boldsymbol{J}$-semisimmetriche, costituiscono sei classi di connessioni, ciascuna delle quali può riguardare come una generalizzazione della classe delle ordinarie *connessioni simmetriche*. Appare quindi interessante esaminare sotto quali condizioni aggiuntive una connessione appartenente ad una delle classi sopra accennate divenga simmetrica.

In questo ordine di idee si segnalano questi Teoremi:

$\boldsymbol{T}_5$: *Una connessione di Martinelli semisimmetrica, ovvero $\boldsymbol{J}$-semisimmetrica, è necessariamente simmetrica.*

$\boldsymbol{T}_6$: *Per una connessione di Martinelli la condizione ϱ_0 implica la simmetria.*

$\boldsymbol{T}_7$: *Una connessione che soddisfi simultaneamente alle condizioni ϱ_+ e ϱ_- è necessariamente simmetrica.*

Infine, sono immediati i Corollari:

$\boldsymbol{C}_1$: *Per una connessione ϱ_+ (oppure ϱ_-) la semisimmetria, ovvero la $\boldsymbol{J}$-semisimmetria implica la simmetria.*

$\boldsymbol{C}_2$: *Per una connessione ϱ_0 la condizione ϱ_+, ovvero la condizione ϱ_-, implica la simmetria.*

11. - Dimostrazioni dei Teoremi $\boldsymbol{T}_5$, $\boldsymbol{T}_6$, $\boldsymbol{T}_7$.

Per stabilire il Teorema $\boldsymbol{T}_5$ si noti che dalle ipotesi di semisimmetria (n. 6) segue

$$\Omega(\beta) = - c_1^2\,(c_1^2\,(t \otimes \delta) \otimes \beta)\,.$$

Poichè $\boldsymbol{J}\beta$ è dato dalla (4) del n. 2, tenute presenti le (1), (2), (3), si perviene a

$$\Omega(\boldsymbol{J}\beta) = c_1^2(c_1^2(\boldsymbol{J}t \otimes h) \otimes \beta)\,.$$

Ora, se Λ è una connessione di MARTINELLI, sussiste la (16) e poichè β è un bivettore arbitrario si giunge alla relazione

$$t \otimes \delta = \boldsymbol{J}t \otimes h\,.$$

Operando nei due membri la contrazione c_2^1 e sommando, si perviene alla conclusione che i vettori t e $\boldsymbol{J}t$ sono linearmente dipendenti. Ciò implica $t = 0$ (33) e l'asserto è provato.

Un procedimento del tutto analogo conduce all'asserto nell'ipotesi di $\boldsymbol{J}$-semisimmetria.

Per ottenere il Teorema $\boldsymbol{T}_6$ si consideri un bivettore semplice $\tilde{\beta}$ arbitrario. Posto poi $\beta = -\boldsymbol{J}\tilde{\beta}$, poichè per ipotesi sussistono entrambe le (20), risulta

$$0 = \Omega(\boldsymbol{J}\beta) = \Omega(-\boldsymbol{J}\boldsymbol{J}\tilde{\beta}) = \Omega(\tilde{\beta})\,.$$

Ciò implica che la torsione $T(\varLambda)$ della connessione considerata è nulla, vale a dire che la connessione è simmetrica.

Analogamente, per dimostrare il Teorema $\boldsymbol{T}_7$, posto $\beta = \boldsymbol{J}_{3\pi/4}\tilde{\beta}$, con $\tilde{\beta}$ arbitrario, sussistono per ipotesi entrambe le (19). In particolare, per $\varphi = \pi/4$, si ha

$$0 = \Omega(\boldsymbol{J}_{\pi/4}\,\beta) = \Omega(\boldsymbol{J}_{\pi/4}\,\boldsymbol{J}_{3\pi/4}\tilde{\beta}) = \Omega(\tilde{\beta}) \quad (^{34})\,.$$

Ciò, come nel caso precedente, conduce subito all'asserto.

I corollari $\boldsymbol{C}_1$ e $\boldsymbol{C}_2$, infine, discendono immediatamente dai Teoremi $\boldsymbol{T}_5$ e $\boldsymbol{T}_6$, rispettivamente, non appena si tenga presente che le connessioni ϱ_+ e ϱ_- sono connessioni di MARTINELLI (n. **5**).

12. - Connessioni e struttura complessa.

È naturale pensare che opportune condizioni concernenti l'appartenenza di una connessione $\varLambda$ alle classi indicate ai nn. **5**, **7** o relative ai tensori $R(\varLambda)$, $S(\varLambda)$, $D_\varLambda h$ associati a $\varLambda$ possano riflettersi in informazioni sulla struttura della varietà. Così è di fatto e questo numero ne è una conferma.

Precisamente, si suppone ora che la classe della varietà V (di dimensione $2n$) sia $\mathscr{C}^{2n+1}$, quella del campo $\mathscr{H}$ sia $\mathscr{C}^{2n}$. In questa ipotesi è noto che l'annullarsi del tensore N su V implica l'esistenza di una *struttura complessa* sulla varietà (35).

Ciò premesso, nell'ordine di idee accennato all'inizio, è interessante segnalare alcune condizioni per l'annullamento di N (36).

---

(33) Basta ricordare il carattere anti-involutorio di $\boldsymbol{J}$ (n. **1**).

(34) Le rotazioni caratteristiche (n. **2**) si compongono come le rotazioni piane ordinarie.

(35) Vedasi, per esempio, A. NEWLANDER - L. NIRENBERG, [7], p. 393.

(36) Altri risultati di questo tipo sono, per esempio, i Corollari C_3, C_4, C_5 a p. 250 del lavoro [8] di G. B. RIZZA.

$\boldsymbol{T}_8$: *Se Λ è una connessione ϱ_+ ed in essa il campo $\mathscr{H}$ risulta parallelo, allora $N = 0$ e la varietà V è a struttura complessa.*

$\boldsymbol{T}_9$: *Se Λ è una connessione ϱ_0 ed in essa il campo $\mathscr{H}$ risulta parallelo, allora $N = 0$ e la varietà V è a struttura complessa.*

Questi risultati si ottengono senza difficoltà.

Precisamente, l'ipotesi ϱ_+ di $\boldsymbol{T}_8$ implica $D_\Lambda h = D_\Gamma h$ (37), onde, per le (14), (23), risulta $R(\Gamma) = 0$ e la (18) conduce subito all'asserto.

Il Teorema $\boldsymbol{T}_9$ discende immediatamente, tenuto conto delle (23), (14), dalla relazione $R(\Lambda) = N$, valida per le connessioni ϱ_0 (38).

Infine, non è banale la Osservazione:

$\boldsymbol{O}_1$: *Se la connessione Λ soddisfa ad una delle condizioni ϱ_+, ϱ_0, semisimmetria, **J**-semisimmetria, allora una condizione sufficiente perchè la varietà V sia a struttura complessa è che il tensore $D_\Lambda h$ risulti simmetrico.*

Invero, la simmetria di $D_\Lambda h$ porta all'annullarsi del tensore $R(\Lambda)$ (n. 4). Dai Corollari C_3, C_5 di G. B. RIZZA (39) segue $N = 0$ e quindi l'asserto.

Bibliografia.

[1] N. BOURBAKI, *Algèbre*, Hermann, Paris 1958 (cf. Ch. 3).

[2] B. ECKMANN, *Sur les structures complexes et prèsque complexes*, Colloque Int. de Géometrie Différentielle (C. N. R. S.), Strasbourg 1953.

[3] B. ECKMANN, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Int. Mat. Estivo (C. I. M. E.), Cremonese, Roma 1956.

[4] A. FRÖLICHER, *Zur Differentialgeometrie der complexen Strukturen*, Math. Ann. **129** (1955), 50-95.

[5] E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, Centro Int. Mat. Estivo (C. I. M. E.), Cremonese, Roma 1956.

[6] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, Ann. Mat. (6) **43** (1957), 313-324.

[7] A. NEWLANDER and L. NIRENBERG, *Complex analytic coordinates in almost complex manifolds*, Ann. of Math. **65** (1957), 391-404.

[8] G. B. RIZZA, *Sulle connessioni di una varietà quasi complessa*, Ann. Mat. (4) **68** (1965), 233-254.

---

(37) G. B. RIZZA, [8], Teorema T_{12}, p. 249.
(38) G. B. RIZZA, [8], Teorema T_{11}, p. 249.
(39) G. B. RIZZA, [8], p. 250.

[9] G. B. RIZZA, *Varietà quasi complesse e connessioni*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano **35** (1965), 88-95.

[10] J. A. SCHOUTEN, *Ricci Calculus*, 2nd ed., Springer, Berlin 1954.

[11] T. J WILLMORE, *An Introduction to Differential Geometry*, Claredon Press, Oxford 1959.

[12] K. YANO, *The Theory of Lie Derivatives and its Applications*, North-Holland, Amsterdam 1955.

[13] K. YANO, *Differential Geometry on Complex and Almost Complex Spaces*, Pergamon Press, Oxford 1965.

Summary.

Suitable conditions on some remarkable tensor fields of an almost complex manifold V lead to characterize some classes of affine connections, considered by B. Eckmann, A. Frölicher, E. Martinelli, K. Yano, G. B. Rizza and others. The existence on V of special classes of connections implies that V has a complex structure.

* * *