Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 83-90

CARLO BALLARDINI (*)

Pulsazioni effettive e smorzamenti in cavità con pareti assorbenti. (**)

1. – Come è noto, è possibile calcolare le pulsazioni proprie (complesse) dei campi e.m. armonici, che possono avere sede in una cavità, con pareti non tutte perfettamente conduttrici, quali soluzioni di equazioni trascendenti (nel campo complesso); e di tali soluzioni è relativamente semplice la determinazione di valori approssimati, quando si possa considerare sufficientemente piccolo l'assorbimento dovuto alla non perfetta conducibilità delle pareti.

Di tale procedimento ci si è valsi qui per determinare, in seconda approssimazione (1), le pulsazioni effettive e le costanti di smorzamento relative al campo e.m. in una cavità di cui possano considerarsi perfette tutte le pareti, eccetto una — perpendicolare alla direzione di propagazione del campo — e della quale, però, si è ammesso sufficientemente piccolo l'assorbimento e valida l'ipotesi di SCHELKUNOFF (2).

In particolare si trova che, contrariamente a quanto potrebbe apparire da un primo esame della relazione di SCHELKUNOFF, la parete assorbente non determina alcun accoppiamento fra i due modi (uno TM, l'altro TE) che nella cavità, supposta perfetta, potrebbero sussistere con autovalori uguali. Più precisamente si trova che, nella cavità in esame, possono sussistere due campi smorzati, uno di tipo TM, l'altro di tipo TE. Inoltre le costanti di smorzamento

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Ricevuto: 25-II-1968.

(1) Rispetto ad un piccolo parametro legato alla (piccola) impedenza superficiale.

(2) In questa maniera si può ritenere schematizzata una cavità della quale tutte le pareti (ad esempio argentate) possano ritenersi perfette, meno una che, o per essere costituita da materiale assorbente (attenuatori), o per essere sede di (piccoli) prelievi di energia (ad esempio attraverso fenditure irradianti), non può considerarsi perfettamente riflettente.

e le pulsazioni effettive di tali campi (ciascuna delle quali risulta identica a quella che competerebbe al rispettivo campo, presente da solo nella cavità) sono fra loro di poco differenti; infine le pulsazioni differiscono da quella comune ai due modi nella cavità supposta perfetta, come è ovvio, di quantità dell'ordine della perturbazione introdotta dall'assorbimento ([2 bis]), ma, mentre nelle costanti di smorzamento compaiono anche termini del secondo ordine, nelle pulsazioni effettive termini di tale ordine non figurano.

2. – Si consideri una cavità a forma di parallelepipedo rettangolo (che si supporrà riferita ad un sistema cartesiano ortogonale con origine in un vertice della cavità e gli assi x, y, z, di versori rispettivamente $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, orientati lungo gli spigoli della cavità stessa, di rispettive lunghezze a, b, l) e si supponga che tutte le sue pareti siano costituite da conduttori perfetti, ad eccezione di quella appartenente al piano $z = l$, che si supporrà di conducibilità γ' finita, seppure sufficientemente grande nel senso che fra breve sarà precisato, e di permeabilità magnetica μ' ([3]).

In queste ipotesi, la cavità potrà essere sede di quelli, fra i campi che possono propagarsi nella guida perfetta (parallela all'asse z, e della quale la cavità stessa può considerarsi un tronco), che verificano le condizioni al contorno sulle sezioni nei piani $z = 0$ e $z = l$.

Ciò premesso, si ricordi che, ammessi i vettori del campo della forma ([4])

$$\vec{\mathscr{E}}(x, y, z) = \mathscr{E}_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k} + \vec{\mathscr{E}}_t(x, y, z) = [E_z(x, y)\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{E}_t(x, y)]\,e^{-j\beta z}\ ,$$
$$\vec{\mathscr{H}}(x, y, z) = \mathscr{H}_z(x, y, z)\,\boldsymbol{k} + \vec{\mathscr{H}}_t(x, y, z) = [H_z(x, y)\,\boldsymbol{k} + \boldsymbol{H}_t(x, y)]\,e^{-j\beta z}\ ,$$

([2 bis]) In sostanza, si verifica qui, per le costanti di propagazione, quindi per smorzamenti e pulsazioni, un comportamento analogo a quello delle attenuazioni e pulsazioni in guide d'onda con pareti (longitudinali) assorbenti (cfr. R. MÜLLER, *Über Stabilität und Dämpfung von Rohrwellen elektrischen und magnetischen Typs gleicher Grenzfrequenz*, Z. Naturforsch 4 (1949), 218-224; V. M. PAPADOPOULOS, *Propagation of electromagnetic waves in cylindrical wave-guides with imperfectly conducting walls*, Quart. J. Mech. Appl. Math. 7 (1954), 326-334; A. E. KARBOWIAK, *Theory of imperfect wave-guides: the effect of wall impedance*, Proc. Inst. Elec. Engrs. **102** (1955), 698-708; M. L. DE SOCIO, *Sulla instabilità delle onde e. m. in una guida a pareti non perfettamente conduttrici*, Memorie Accad. Sci. Ist. Bologna (10) **10** (1952-53), 47-50; L. CAPRIOLI, *Sull'attenuazione nelle guide circolari con pareti assorbenti*, Bol. Un. Mat. Ital. **12** (1957), 526-534; L. CAPRIOLI, *Stabilità ed attenuazione dei modi degeneri nelle guide a pareti assorbenti*, Accad. Sci. Torino **97** (1962-63), 65-86.

([3]) Al solito sia isotropo, omogeneo e perfetto il dielettrico interno di permeabilità magnetica μ e costante dielettrica ε. Per i conduttori reali della tecnica γ' è dell'ordine di $(0{,}6 \div 10)10^7(\Omega\cdot m)^{-1}$.

([4]) Con direzione di propagazione nel verso positivo dell'asse z e omettendo, come di consueto, il fattore temporale $e^{j\omega t}$.

le equazioni di MAXWELL implicano per gli scalari E_z, H_z e per i vettori $\boldsymbol{E}_t$, $\boldsymbol{H}_t$ le relazioni [5]

$$\nabla^2 E_z + h^2 E_z = 0 \,, \tag{1}$$

$$\nabla^2 H_z + h^2 H_z = 0 \,, \tag{2}$$

$$\boldsymbol{E}_t = \frac{j}{h^2}[-\beta \nabla E_z + \omega \mu \boldsymbol{k} \times \nabla H_z], \tag{3}$$

$$\boldsymbol{H}_t = \frac{j}{h^2}[-\beta \nabla H_z - \omega \varepsilon \boldsymbol{k} \times \nabla E_z], \tag{4}$$

dove è

$$h^2 = \varepsilon \mu \omega^2 - \beta^2 \,. \tag{5}$$

Si ricordi che nella guida perfetta debbono inoltre risultare verificate le seguenti condizioni per ogni punto del contorno s della generica sezione σ normale all'asse z:

$$[E_z]_s = 0 \,, \tag{6}$$

$$\left[\frac{\partial H_z}{\partial n}\right]_s = 0 \,. \tag{7}$$

È noto che i due problemi al contorno (1), (6) e (2), (7) ammettono autosoluzioni (che dànno luogo ai rispettivi modi TM e TE) relative agli autovalori

$$h_{pq}^2 = \pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right) , \tag{8}$$

ove, per i modi TM_{pq}, p e q sono numeri naturali non nulli e, per i modi TE_{pq}, p e q sono numeri naturali non entrambi nulli [6].

Più in generale, ed in vista dello studio della cavità, nella guida potranno sussistere — e per ogni coppia di valori possibili di p e q — coppie di modi (TM o TE), propagantisi nei due versi dell'asse z, sicchè il campo totale, dovuto

---

[5] Cfr., ad esempio, D. GRAFFI, *Onde elettromagnetiche*, Consiglio Nazionale delle Ricerche (C.N.R.), Roma 1965 (pp. 117 e seguenti).

[6] Cfr. D. GRAFFI, opera citata, pp. 136 e seguenti.

al modo TM_{pq}, avrà per componenti longitudinali [7]

$$\mathscr{E}_z = (G_1\, e^{-j\beta z} + G_2\, e^{j\beta z}) \ \operatorname{sen} \frac{p\pi x}{a} \ \operatorname{sen} \frac{q\pi y}{b}\,, \qquad \mathscr{H}_z \equiv 0 \tag{9}$$

e quello dovuto al modo TE_{pq} le componenti

$$\mathscr{H}_z = (C_1\, e^{-j\beta z} + C_2\, e^{j\beta z}) \ \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b}\,, \qquad \mathscr{E}_z \equiv 0 \tag{10}$$

(dove G_1, G_2, C_1 e C_2 sono costanti per ora indeterminate). Dalle (3), (4) segue che i componenti trasversali del campo totale saranno, per entrambi i modi, del tipo

$$\vec{\mathscr{E}}_t = \boldsymbol{E}_{t1}\, e^{-j\beta z} + \boldsymbol{E}_{t2}\, e^{j\beta z}\,, \qquad \vec{\mathscr{H}}_t = \boldsymbol{H}_{t1}\, e^{-j\beta z} + \boldsymbol{H}_{t2}\, e^{j\beta z}\,. \tag{11}$$

Infine, secondo quanto si è premesso, il campo nella cavità in esame dovrà soddisfare le due ulteriori condizioni al contorno:

a) in ogni punto della sezione normale sul piano $z = 0$ sia

$$[\vec{\mathscr{E}}_t]_{z=0} = 0\,, \tag{12}$$

b) in ogni punto della sezione normale sul piano $z = l$ sia

$$[\vec{\mathscr{E}}_t]_{z=l} = \sqrt{\frac{\mu'\,\omega}{2\gamma'}}\,(1 + j)\,[\vec{\mathscr{H}}_t]_{z=l} \times \boldsymbol{k} \tag{13}$$

(ipotesi di SCHELKUNOFF).

3. – Si considerino presenti nella cavità sia il modo TM_{pq} che il modo TE_{pq} con gli stessi valori di p e q, entrambi diverzi da zero.

Dalle (9), (10), (11), tenuto conto della condizione al contorno (12), risulta che deve essere $C_1 = -\,C_2$, $G_1 = G_2$, sicchè, posto $C_1 = C/2$, $G_1 = G/2$, le componenti longitudinali ed i componenti trasversali del campo totale assumono la forma:

$$\mathscr{E}_z = G \ \operatorname{sen}(\beta z) \ \operatorname{sen} \frac{p\pi x}{a} \ \operatorname{sen} \frac{q\pi y}{b}\,,$$

$$\mathscr{H}_z = -\,C\,j \ \operatorname{sen}(\beta z) \ \cos \frac{p\pi x}{a} \ \cos \frac{q\pi y}{b}\,,$$

---

[7] L'indice 1 si riferisce ai modi propagantisi nel verso positivo dell'asse z, l'indice 2 ai modi propagantisi nel verso opposto.

$$
(14) \quad \begin{cases} \vec{\mathscr{E}}_t = \dfrac{\pi}{h^2}\left(\dfrac{\omega\mu q}{b}\, C - \dfrac{\beta p}{a}\, G\right) \operatorname{sen}(\beta z) \cos\dfrac{p\pi x}{a} \operatorname{sen}\dfrac{q\pi y}{b}\, \boldsymbol{i} - \\[2ex] \quad - \dfrac{\pi}{h^2}\left(\dfrac{\omega\mu p}{a}\, C + \dfrac{\beta q}{b}\, G\right) \operatorname{sen}(\beta z) \operatorname{sen}\dfrac{p\pi x}{a} \cos\dfrac{q\pi y}{b}\, \boldsymbol{j}\,, \end{cases}
$$

$$
(15) \quad \begin{cases} \vec{\mathscr{H}}_t = j\, \dfrac{\pi}{h^2}\left(\dfrac{\beta p}{a}\, C + \dfrac{\omega\varepsilon q}{b}\, G\right) \cos(\beta z) \operatorname{sen}\dfrac{p\pi x}{a} \cos\dfrac{q\pi y}{b}\, \boldsymbol{i} + \\[2ex] \quad + j\, \dfrac{\pi}{h^2}\left(\dfrac{\beta q}{b}\, C - \dfrac{\omega\varepsilon p}{a}\, G\right) \cos(\beta z) \cos\dfrac{p\pi x}{a} \operatorname{sen}\dfrac{q\pi y}{b}\, \boldsymbol{j}\,. \end{cases}
$$

Inoltre dalle (5) e (8) si ha, nelle ipotesi ammesse,

$$
(5') \qquad \beta^2 = \varepsilon\mu\omega^2 - \pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}\right).
$$

È ora di immediata verifica che i componenti (14) e (15) possono soddisfare l'ultima condizione al contorno (13) se e solo se è soddisfatto il sistema:

$$
(13') \quad \begin{cases} C\, a\, q \left[\mu\omega \operatorname{sen}(\beta l) + (1-j)\sqrt{\dfrac{\mu'\omega}{2\gamma'}}\, \beta \cos(\beta l)\right] - \\[2ex] \qquad - G\, b\, p \left[\beta \operatorname{sen}(\beta l) + (1-j)\sqrt{\dfrac{\mu'\omega}{2\gamma'}}\, \varepsilon\omega \cos(\beta l)\right] = 0 \\[2ex] C\, b\, p \left[\mu\omega \operatorname{sen}(\beta l) + (1-j)\sqrt{\dfrac{\mu'\omega}{2\gamma'}}\, \beta \cos(\beta l)\right] + \\[2ex] \qquad + G\, a\, q \left[\beta \operatorname{sen}(\beta l) + (1-j)\sqrt{\dfrac{\mu'\omega}{2\gamma'}}\, \varepsilon\omega \cos(\beta l)\right] = 0 \end{cases}
$$

con valori di C e G non entrambi nulli.

Il sistema (13') ammette la soluzione $C = 0$ e $G \neq 0$ se è

$$
(16) \qquad \beta \operatorname{sen}(\beta l) + (1-j)\sqrt{\frac{\mu'\omega}{2\gamma'}}\, \varepsilon\omega \cos(\beta l) = 0\,,
$$

oppure la soluzione $C \neq 0$ e $G = 0$ se è

$$
(17) \qquad \mu\omega \operatorname{sen}(\beta l) + (1-j)\sqrt{\frac{\mu'\omega}{2\gamma'}}\, \beta \cos(\beta l) = 0 \quad (^8)\,.
$$

---

(8) La (16) è l'equazione che si ottiene se nella cavità è presente solo il modo TM_{pq}, la (17) quella che si ottiene con la sola presenza del modo TE_{pq}.

Le (16), (17) costituiscono due equazioni trascendenti, nella incognita complessa ω (dalla quale dipende anche la costante di propagazione β: cfr. la (5')), che ci si propone qui di risolvere per via approssimata.

A tale scopo si osservi innanzitutto che, nell'ipotesi di riflessione perfetta anche sulla parete del piano $z = l$ ($\gamma' \to \infty$), sia la (16) che la (17) assumono la forma

$$\operatorname{sen}\left[l \sqrt{\varepsilon\,\mu\,\omega^2 - \pi^2 \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} \right)} \right] = 0 , \tag{18}$$

che ammette le ben note soluzioni (9)

$$\omega_{r0} = \pi \sqrt{\frac{1}{\varepsilon\mu} \left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{l^2} \right)} . \tag{19}$$

Allora per γ' finito, ma sufficientemente grande, i secondi termini di (16) e (17) risulteranno, in modulo, sufficientemente piccoli, tali che le soluzioni di (16) e (17) stesse possano ritenersi sufficientemente prossime alle soluzioni (19) della (18), cioè della forma

$$\omega = \omega_{r0}\,(1 + \alpha) , \tag{20}$$

dove il modulo del complesso $\alpha = \alpha' + j\,\alpha''$ (con $\alpha'' > 0$ (10)) deve ammettersi sufficientemente piccolo e tale da poterne trascurare, con un certo criterio di approssimazione, che ora sarà precisato, le potenze superiori ad un certo ordine.

Tenendo conto della (20) e introdotte le quantità adimensionali

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu'}{2\gamma'\omega_{r0}\,\mu^2\,l^2}} , \qquad K = \frac{\varepsilon\,\mu\,\omega_{r0}^2\,l^2}{\pi^2\,r^2} ,$$

la ricerca delle soluzioni approssimate di (16) e (17) è condotta a quella delle

(9) Si è posto per brevità ω_{r0} in luogo di un più significativo ω_{rpq}^0, ove l'indice ^{0} in alto starebbe a distinguere il caso delle pareti tutte perfette, mentre gl'indici in basso indicherebbero i valori degl'interi r, p, q ($r \neq 0$) dei modi presenti nella cavità.

(10) Infatti sarà $\omega = \omega_{r0} + \omega_{r0}\,\alpha' + j\,\omega_{r0}\,\alpha''$, sicchè $\omega_{r0}\,\alpha''$ sarà il coefficiente (positivo) di smorzamento del campo effettivo (reale); si noti poi che $\omega_{r0}\,\alpha'$ è la correzione additiva da apportare alla pulsazione del caso perfetto per ottenere la pulsazione (reale) del campo effettivo.

soluzioni delle equazioni adimensionali rispettive:

$$(16') \quad \sqrt{1+2K\alpha+K\alpha^2}\,\mathrm{sen}[\pi r\sqrt{1+2K\alpha+K\alpha^2}]+ \\ +\eta\,(1-j)K\pi r\sqrt{(1+\alpha)^3}\cos[\pi r\sqrt{1+2K\alpha+K\alpha^2}]=0\,,$$

$$(17') \quad \sqrt{1+\alpha}\,\mathrm{sen}[\pi r\sqrt{1+2K\alpha+K\alpha^2}]+ \\ \eta\,(1-j)\pi r\sqrt{1+2K\alpha+K\alpha^2}\,\cos[\pi r\sqrt{1+2K\alpha+K\alpha^2}]=0$$

nella incognita complessa α.

Ai fini dell'approssimazione che qui ci si propone di conseguire è ora opportuno esprimere la quantità α nella forma

$$\alpha = a_1\eta + a_2\eta^2 + o(\eta^3)\,,$$

cioè in funzione del piccolo parametro η (11), che caratterizza la non perfetta conducibilità della parete assorbente, sicchè la valutazione di α, e quindi di ω, è ridotta, per entrambe le equazioni, alla determinazione dei coefficienti (complessi) a_1 e a_2.

Sviluppando in serie di η e trascurando nel risultato i termini non essenziali, le (16′) e (17′) comportano rispettivamente le seguenti identità rispetto ad η:

$$(16'') \qquad \tfrac{1}{2}\eta\,[2a_2+a_1^2+Ka_1^2+3a_1-3ja_1]+a_1+1-j\equiv 0\,,$$

$$(17'') \qquad \eta K\left[a_2+a_1^2-\frac{K}{2}a_1^2+a_1-ja_1\right]+Ka_1+1-j\equiv 0\,,$$

dalle quali si ottengono rispettivamente le coppie di valori per a_1 e a_2:

$$\begin{cases} a_1 = -1+j \\ a_2 = j\,(K-2)\,, \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = (-1+j)/K \\ a_2 = j(2-3K)/K^2\,. \end{cases}$$

---

(11) Per $a \cong b \cong 4.10^{-2}\,m$, $l \cong 8.10^{-2}\,m$, $\gamma' \cong 10^8(\Omega\cdot m)^{-1}$, $\sqrt{1/(\varepsilon\mu)} \cong 3.10^8\,m.\,\mathrm{sec}^{-1}$, $\mu \cong \mu' \cong 4\pi\;10^{-7}\,h\cdot m^{-1}$, $p=q=r=1$ (del resto fino ad alcune decine di unità essi non incidono sull'ordine di grandezza di ω_{r0} e quindi di η e K) si ottiene: $\eta \cong 4,1\cdot 10^{-6} \ll 1$, $K \cong 9$; inoltre è sempre $K = 1+(l^2/r^2)\,\{(p^2/a^2)+(q^2/b^2)\} > 1$.

Risulta così provato che termini del secondo ordine sono sensibili soltanto sulle costanti di smorzamento.

Infine, dai valori di a_1 e a_2 segue che

$$\alpha_{TM} = \alpha'_{TM} + j\,\alpha''_{TM}\,, \qquad \alpha_{TE} = \alpha'_{TE} + j\,\alpha''_{TE}\,,$$

con

$$\alpha'_{TM} = -\sqrt{\frac{\mu'}{2\gamma'\,\omega_{r0}\,\mu^2\,l^2}}\,,$$

$$\alpha''_{TM} = \sqrt{\frac{\mu'}{2\gamma'\,\omega_{r0}\,\mu^2\,l^2}} + \frac{\mu'}{2\gamma'\,\omega_{r0}\,\mu^2\,l^2}\,\frac{\varepsilon\,\mu\,\omega_{r0}^2\,l^2 - 2\pi^2\,r^2}{\pi^2\,r^2}\,,$$

$$\alpha'_{TE} = -\sqrt{\frac{\mu'}{2\gamma'\,\omega_{r0}\,\mu^2\,l^2}}\,\frac{\pi^2\,r^2}{\varepsilon\,\mu\,\omega_{r0}^2\,l^2}$$

$$\alpha''_{TE} = \sqrt{\frac{\mu'}{2\gamma'\,\omega_{r0}\,\mu^2\,l^2}}\,\frac{\pi^2\,r^2}{\varepsilon\,\mu\,\omega_{r0}^2\,l^2} + \frac{\mu'}{2\gamma'\,\omega_{r0}\,\mu^2\,l^2}\,\frac{2\pi^4\,r^4 - 3\,\varepsilon\,\mu\,\omega_{r0}^2\,l^2\,\pi^2\,r^2}{\varepsilon^2\,\mu^2\,\omega_{r0}^4\,l^4}\,,$$

sono le soluzioni approssimate rispettive delle (16′) e (17′), da cui si deducono immediatamente, tramite la (20), i valori delle costanti di smorzamento e delle pulsazioni effettive [12].

Summary.

See n. 1.

([12]) Nelle ipotesi numeriche della annotazione ([11]) si ha $\omega_{r0} \cong 3{,}5\cdot 10^{10}\ \mathrm{sec}^{-1}$, $\alpha'_{TM} \cong -\,4{,}1\cdot 10^{-6}$, $\alpha''_{TM} \cong 4{,}1\cdot 10^{-6}$, $\alpha'_{TE} \cong -\,4{,}6\cdot 10^{-7}$, $\alpha''_{TE} \cong 4{,}6\cdot 10^{-7}$, e quindi la pulsazione effettiva risulta $\cong \omega_{r0}$ per entrambe le soluzioni, mentre i coefficienti di smorzamento risultano, rispettivamente,

$$\omega_{r0}\,\alpha''_{TM} \cong 1{,}4\cdot 10^5\ \mathrm{sec}^{-1}\,, \qquad \omega_{r0}\,\alpha''_{TE} \cong 1{,}6\cdot 10^4\ \mathrm{sec}^{-1}\,.$$

* * *