

F. R. MARSICANO (\*)

## Curvas de Velocidad Nula Correspondientes a las Soluciones Triangulares Isosceles del Problema de Tres Cuerpos. (\*\*)

### Introducción.

Entre los innumerables investigadores que se ocuparon del problema de los tres cuerpos de la mecánica celeste, ocupa un lugar sobresaliente J. L. LAGRANGE quien con su *Essai sur le problème des trois corps* (Oeuvres t. 6, p. 229) establece los siguientes avances.

1) Consigue reducir el orden de integración de las ecuaciones del movimiento, del octavo al séptimo. Este paso es definitivo y pese al esfuerzo de todos los sabios que le siguen no podrá disminuirse el orden de integración.

2) Utiliza exclusivamente como coordenadas, y demuestra que es suficiente, a las tres distancias mutuas  $r_i$  ( $i = 0, 1, 2$ ) y establece un sistema de tres ecuaciones diferenciales entre ellas; dos del segundo orden y una del tercero.

3) Obtiene por primera vez las soluciones triangulares equiláteras y reencuentra las soluciones lineales de EULER.

Esta obra constituye una fuente inagotable de sugerencias y en ella se basó SUNDMAN [1] para obtener, más de un siglo después su famosa desigualdad.

En el lapso de tiempo que media entre la aparición de estas dos fundamen-

---

(\*) Indirizzo: Dep.to de Física, Facultad de Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina. (Miembro de la carrera del investigador científico del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina.)

(\*\*) Ricevuto: 19-II-1968.

tales obras, otros investigadores obtuvieron soluciones particulares del problema de tres cuerpos, de los cuales nos interesa aquí las soluciones triangulares isósceles [2]. Como veremos, estas soluciones pueden obtenerse como una aplicación interesante del sistema Lagrangeano y sus propiedades más destacables surgen naturalmente del hecho de utilizar las distancias mutuas como parámetros del movimiento.

### I. - Las soluciones isósceles a eje de simetría.

De los tres casos de configuraciones isósceles, estudiaremos solamente aquella que posee un eje de simetría [2], único caso en el cual no pueden existir choques binarios [3]. Sea  $P_0$  el cuerpo de masa  $m_0$  situado sobre el eje de simetría  $k$ ;  $P_1, P_2$  los otros dos cuerpos de masas iguales  $m$ , que giran alrededor del eje de simetría  $k$ ;  $u_0, u_1, u_2$  los tres vectores dados en un mismo sentido, que unen los puntos  $P_0, P_1, P_2$  tal que  $u_0$  sea opuesto a  $P_0$ .

$\Gamma_0, \Gamma_1, \Gamma_2$  las tres distancias mutuas, con  $\Gamma_1$  siempre igual a  $\Gamma_2$  y  $\Gamma_0$  opuesto a  $P_0$ .

Tomando una terna de referencia fija en el espacio con origen en el baricentro, el conocimiento de las coordenadas del punto  $P_1$ , permite conocer, por razones de simetría y por las propiedades del baricentro; las de los otros dos.

Las ecuaciones del movimiento del punto  $P_1$  consisten en tres del segundo orden, pero la existencia de la integral de las fuerzas vivas y del momento de la cantidad de movimiento permite bajar el orden de integración al cuarto.

Con el sistema de LAGRANGE las ecuaciones resolventes son la (L) y (P) ([4], [5], [6]).

La ecuación (L) no es otra que la integral de la energía escrita en función de las distancias mutuas:

$$(L) \quad \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} \sum_{i=0}^2 \frac{\Gamma_i^2}{m_i} = \frac{MU}{m_0 m^2} - C_0,$$

con  $C_0 = \text{constante}$ ,

$$U \text{ (función potencial)} = \frac{m^2}{\Gamma_0} + \frac{2m_0 m}{\Gamma} \quad (\Gamma = \Gamma_1 = \Gamma_2, \quad m = m_1 = m_2),$$

$$M \text{ (masa total)} = m_0 + 2m.$$

Con la introducción de los parámetros de LAGRANGE:

$$(1) \quad \begin{cases} p_0 = \frac{1}{2} (2\Gamma^2 - \Gamma_0^2), & p = p_1 = p_2 = \frac{\Gamma_0^2}{2} \\ q_1 = -q_2 = \frac{1}{\Gamma^3} - \frac{1}{\Gamma_0^3}, & q_0 = 0 \end{cases}$$

la (L) se transforma en una ecuación diferencial del segundo orden en  $p_0, p$ :

$$(2) \quad \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{p}{m_0} + \frac{p_0 + p}{m} \right) = \frac{M}{m_0 m^2} [m^2 (2p)^{-1/2} + 2m_0 m (p_0 + p)^{-1/2}] - C_0.$$

La otra ecuación del movimiento es la ecuación (P) de LAGRANGE que no es otra cosa que la expresión en función de los  $\Gamma_i$  de la integral del momento de la cantidad de movimiento ([4], [5], [6]):

$$(P) \quad \sum_{i=0}^2 \frac{\pi_i}{m_i^2} + 2 \sum_{i=0}^2 \frac{\psi_i}{m_{i+1} m_{i+2}} = \frac{C_1^2 M^2}{m_0^2 m_1^2 m_2^2},$$

donde:

$$\pi_i = \Gamma_i^2 (\dot{\mathbf{u}}_i^2 + \dot{\Gamma}_i^2), \quad \psi_i = p_i \gamma_i + \frac{1}{4} (\sigma^2 - \dot{p}_i^2),$$

$$\gamma_i = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{u}}_{i+1}^2 + \dot{\mathbf{u}}_{i+2}^2 - \dot{\mathbf{u}}_i^2),$$

$$\dot{\mathbf{u}}_i^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (\Gamma_i)^2 + \frac{M}{\Gamma_i} + m_i (p_{i+1} q_{i+1} - p_{i+2} q_{i+2}),$$

$\sigma$  es la función auxiliar de LAGRANGE dada por  $\sigma = \mathbf{u}_i \times \dot{\mathbf{u}}_{i+1} - \mathbf{u}_{i+1} \times \dot{\mathbf{u}}_i$ .

Esta función satisface la ecuación (H) de LAGRANGE:

$$(H) \quad \frac{d\sigma}{dt} = - \sum_0^2 m_i p_i q_i.$$

En nuestro caso el segundo miembro de (H) es nulo por las (1), luego  $\sigma = \text{c.te.}$ , pero como en la configuración isósceles estudiada hay simetría entre  $\mathbf{u}_1$  y  $\mathbf{u}_2$  basta con tomar el índice  $i$  de la definición de  $\sigma$  igual a 1 para observar que siempre  $\mathbf{u}_1 \times \dot{\mathbf{u}}_2 = \mathbf{u}_2 \times \dot{\mathbf{u}}_1$  luego  $\sigma$  es constantemente nulo.

Para los demás parámetros se tiene, en nuestro caso,

$$\dot{\mathbf{u}}_0^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (2p) + M (2p)^{-1/2} + 2m_0 p [(p_0 + p)^{-3/2} - (2p)^{-3/2}],$$

$$\dot{\mathbf{u}}_1^2 = \dot{\mathbf{u}}_2^2 = \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (p_0 + p) + M (p_0 + p)^{-1/2} - mp [(p_0 + p)^{-3/2} - (2p)^{-3/2}],$$

$$\pi_0 = 2p \dot{\mathbf{u}}_0^2 - \dot{p}^2, \quad \pi_1 = \pi_2 = (p_0 + p) \dot{\mathbf{u}}_1^2 - \frac{(\dot{p}_0 - \dot{p})^2}{4},$$

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= \frac{1}{2} [2\dot{\mathbf{u}}_1^2 - \dot{\mathbf{u}}_0^2], & \gamma_1 &= \gamma_2 = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{u}}_0^2, \\ \psi_0 &= \frac{p_0}{2} [2\dot{\mathbf{u}}_1^2 - \dot{\mathbf{u}}_0^2] - \frac{\dot{p}_0^2}{4}, & \psi_1 &= \psi_2 = \frac{p}{2} \dot{\mathbf{u}}_0^2 - \frac{\dot{p}^2}{4},\end{aligned}$$

con lo que la ecuación (P) se transforma en una ecuación diferencial del segundo orden en  $p_0, p$ :

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & \left( \frac{2p(m+m_0)}{m_0^2 m} - \frac{p_0}{m^2} \right) \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (2p) + M(2p)^{-1/2} + 2pm_0 [(p_0+p)^{-3/2} - (2p)^{-3/2}] \right\} + \\ & + \frac{2(2p_0+p)}{m^2} \left\{ \frac{1}{2} \frac{d^2}{dt^2} (p_0+p) + M(p_0+p)^{-1/2} - mp [(p_0+p)^{-3/2} - (2p)^{-3/2}] \right\} - \\ & - \left[ \frac{\dot{p}^2}{m_0^2} + \frac{(\dot{p}_0 + \dot{p})^2}{2m^2} + \frac{\dot{p}_0^2}{2m^2} + \frac{\dot{p}^2}{m_0 m} \right] = \frac{C_1^2 M^2}{m_0^2 m^4}. \end{aligned} \right.$$

Las dos ecuaciones (2), (3) constituyen un sistema del cuarto orden en las variables  $p_0, p$  que una vez integradas permiten hallar, por medio de las (1), las distancias mutuas  $\Gamma_0, \Gamma$ .

Como ejemplo de aplicación del sistema (2), (3), supongamos que: para  $t=0$ ,  $\Gamma_0 = \Gamma = 1$  las velocidades de los puntos  $p_0, p_1, p_2$  sean  $|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = 1$  tal que  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{u}_0 = 0$ ,  $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{u}_0 = 0$ ,  $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{k} = 0$ ,  $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{k} = 0$  o sea  $\mathbf{v}_1$  y  $\mathbf{v}_2$  son vectores perpendiculares al plano de los tres cuerpos.

Supongamos también  $m_0 = 1$ ,  $m_1 = m_2 = m = 2$  luego  $M = 5$ ,  $U = 8$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_0^2 = 4$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_1^2 = 1$  de donde  $C_0 = \frac{2MU}{m_0 m^2} - \sum_0^2 \frac{\dot{\mathbf{u}}_i^2}{m_i}$  (ver. [5], [6]) o sea  $C_0 = 15$ .

También es fácil calcular  $\gamma_1 = \gamma_2 = 2$ ,  $\gamma_0 = -1$ ,

$$\pi_0 = (\mathbf{u}_0 \wedge \dot{\mathbf{u}}_0)^2 = 4, \quad \pi_1 = \pi_2 = (\mathbf{u}_1 \wedge \dot{\mathbf{u}}_1)^2 = 1;$$

$$\psi_0 = (\mathbf{u}_1 \wedge \dot{\mathbf{u}}_1) \times (\mathbf{u}_2 \wedge \dot{\mathbf{u}}_2) = -1/2, \quad \psi_1 = \psi_2 = (\mathbf{u}_2 \wedge \dot{\mathbf{u}}_2) \times (\mathbf{u}_0 \wedge \dot{\mathbf{u}}_0) = 1,$$

con lo que se calcula, por aplicación de la (P), la segunda constante:  $C_1 = 2$ .

El resultado del cómputo del sistema (2), (3) con las condiciones iniciales dadas, puede verse en la Fig. 1.

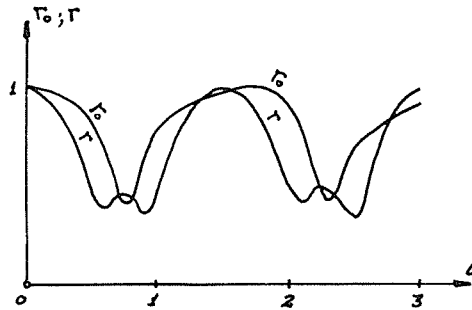


Fig. 1.

## 2. - Curvas de velocidad nula.

Hallaremos ahora la ecuación, en el plano  $\Gamma_0, \Gamma$ , de las curvas de velocidad nula, es decir de las curvas sobre las cuales  $\dot{\Gamma}_0 = \dot{\Gamma} = 0$  simultáneamente, sin ser necesariamente  $\dot{\Gamma}_i = 0$  ( $i = 0, 1$ ).

El estado de velocidad instantánea consiste, por lo tanto, en una rotación pura alrededor del eje de simetría  $\mathbf{k}$ , de intensidad  $\omega$ .

La constante del momento de la cantidad de movimiento vale  $C_1 = \frac{m \omega \Gamma_0^2}{2}$ ,

de donde  $\omega = \frac{2C_1}{m\Gamma_0^2}$ ,

$$|\mathbf{v}_1| = |\mathbf{v}_2| = \frac{\omega \Gamma_0}{2}, \quad \dot{\mathbf{u}}_0^2 = \omega^2 \Gamma_0^2, \quad \dot{\mathbf{u}}_1^2 = \dot{\mathbf{u}}_2^2 = \frac{\omega^2 \Gamma_0^2}{4},$$

luego, de la integral de las fuerzas vivas, se tiene:

$$\frac{1}{2} \left[ \frac{\omega^2 \Gamma_0^2}{m_0} + \frac{2\omega^2 \Gamma_0^2}{4m} \right] = \frac{(2m + m_0)U}{m_0 m^2} - \frac{C_0}{2}.$$

Reemplazando  $\omega$  por su valor en función de  $C_1$  se obtiene la ecuación de las curvas de velocidad nula:

$$(4) \quad \frac{2m_0 m}{\Gamma} = \frac{C_1^2}{m \Gamma_0^2} - \frac{m^2}{\Gamma_0} + \frac{C_0 m_0 m^2}{2(2m + m_0)}.$$

Aplicando la (4) al ejemplo que acabamos de ver, se tiene  $m_0 = 1, m = 2, C_1 = 2, C_0 = 15$ ; la curva es del tercer grado, pasa por el origen y tiene una asíntota con tangente horizontal  $\Gamma = 2/3$  (Fig. 2). Como debe cumplirse siempre

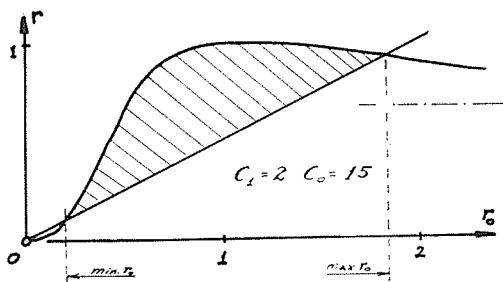


Fig. 2.

$\Gamma \geq \Gamma_0/2$  trazando la recta  $\Gamma = \Gamma_0/2$  queda delimitada una superficie, rayada en la figura, única zona donde son compatibles valores de  $\Gamma_0$  y  $\Gamma$ . Como se ve

existe un máximo y un mínimo para  $\Gamma_0$  y  $\Gamma$  y los tres cuerpos permanecen siempre a distancia finita.

Para otras condiciones iniciales puede ocurrir que la recta  $\Gamma = \Gamma_0/2$  sea tangente a la curva dada por (4), en cuyo caso obtenemos la solución estacionaria lineal de EULER, con  $\frac{d\Gamma}{d\Gamma_0} = 1/2$ ,  $\Gamma_0 = 2\Gamma$ . Si derivamos  $\Gamma$  con respecto a  $\Gamma_0$  de la (4) e igualamos a 1/2 se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{C_1^2 \Gamma^2}{m_0 m^2 \Gamma_0^3} - \frac{m^2 \Gamma^2}{2 \Gamma_0^2 m_0 m},$$

que por la relación  $\Gamma_0 = 2\Gamma$  permite hallar:

$$(5) \quad \Gamma_0 = \frac{2C_1^2}{m^2 (4m_0 + m)}, \quad \Gamma = \frac{C_1^2}{m^2 (4m_0 + m)}.$$

Reemplazando (5) en (4) se obtiene el límite máximo de  $C_1^2 C_0$  pasado el cual no hay solución [la recta  $\Gamma = 1/2 \Gamma_0$  no corta a la curva (4)]:

$$(6) \quad \lim (C_1^2 C_0) = \frac{m(4m_0 + m)^2 (2m + m_0)}{2m_0}.$$

Para los valores  $m_0 = 1$ ,  $m = 2$  de nuestro ejemplo, ese límite es 180.

Manteniendo las masas invariables pero cambiando las condiciones iniciales, varía la forma de la curva (4); así por ejemplo, para  $C_0 = 16$ ,  $C_1 = 1$  existen dos ramas con sendas asíntotas verticales (Fig. 3). El punto representativo puede

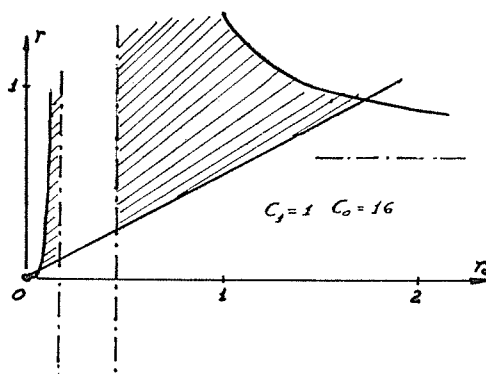


Fig. 3.

estar en una o en otra de las zonas rayadas (excluyéndose mutuamente);  $\Gamma_0$  tiene límites inferior y superior, pero  $\Gamma$  puede receder al infinito, es decir el

cuerpo de masa  $m_0$  puede alejarse indefinidamente, mientras los otros dos adquieren su separación máxima (primera zona rayada) ó mínima (segunda zona rayada). Entre las dos asíntotas existe otra rama de la curva, pero está en el semiplano negativo  $\Gamma < 0$  y no tiene significado físico.

Para otros valores de  $C_0, C_1$  las dos asíntotas coinciden, en cuyo caso si  $\Gamma \rightarrow \infty, \Gamma_0$  tiende a un único valor límite finito.

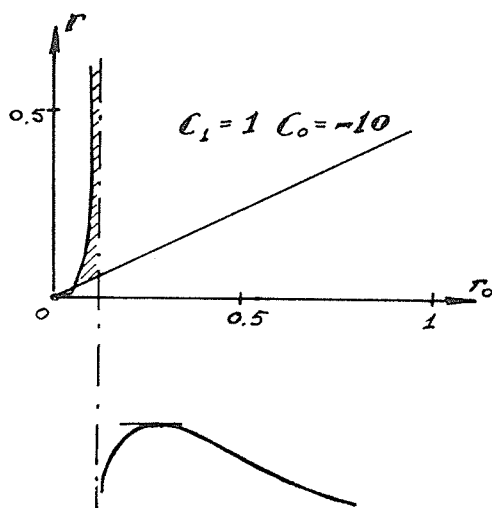


Fig. 4.

En la Fig. 4 se destaca otra circunstancia; existe una única zona rayada en el semiplano  $\Gamma > 0$ ,  $\Gamma$  puede receder al infinito, en cuyo caso  $\Gamma_0 \rightarrow$  (límite finito).

Obsérvese que en ningún caso pueden obtenerse soluciones estacionarias, salvo las de EULER (los tres cuerpos en línea recta con  $m_0$  coincidente con el baricentro).

#### Bibliografía.

- [1] K. F. SUNDMAN, *Memoire sur le problème des trois corps*, Acta Math. **36** (1913), 105-179.
- [2] A. FRANSÉN, *Ett specialfall af tre-kroppar-problemet*, Stockh Ölfv. **52** (1895), 783-805.
- [3] F. R. MARSICANO, *Demostración elemental de la conjetura de Weierstrass*, An. Soc. Ci. Argentina **175** (1965), p. 39.
- [4] J. L. LAGRANGE, *Essai sur le problème des trois corps*, Oeuvres **6**, p. 229.

- [5] C. AGOSTINELLI, *Sul problema dei tre corpi*, Rend. Sem. Mat. Fis. Milano 21 (1950), 165 - 195.
- [6] F. R. MARSICANO, *La memoria de Lagrange relativa al movimiento de los tres cuerpos*, Ci. y Téc. 123 (1957), p. 75.

#### S u m m a r y .

*The properties of curves of zero velocity (simultaneously null mutual distances derivatives with respect of time) in the case of isosceles triangles solutions are analyzed and discussed here.*

*The knowledge of masses and energy and kinetic moment integral enables to establish in each case, the qualitative properties of movement (maximum and minimum limits of mutual distances, conditions for one of the bodies to recede to infinite, etc.).*

*In this study, Lagrange's system of differential equations for mutual distances to solve the general problem of three bodies, is used.*

\* \* \*