Riv. Mat. Univ. Parma (2) 9 (1968), 47-57

BIANCA MANFREDI (*)

Legami fra trasformazioni termoelastiche di mezzi comprimibili e incomprimibili nel caso lineare e non stazionario. (**)

Introduzione.

In un precedente lavoro [7]$_1$ ho provato (limitandomi a campi di problemi linearizzati e stazionari) che un opportuno cambiamento della distribuzione della temperatura, insieme con una conveniente definizione della pressione di incomprimibilità, è sufficiente perchè lo spostamento e gli stresses caratteristici di una trasformazione termoelastica di un solido comprimibile individuino, a parità di forze esterne, anche una trasformazione termoelastica di un solido incomprimibile. E viceversa.

In questa Nota dimostro che lo stesso risultato sussiste anche nei problemi termoelastici linearizzati, *non stazionari* e *accoppiati*, con forze d'inerzia trascurabili (1), quando fra le costanti termiche e le costanti elastiche dei mezzi si pongano convenienti legami [cfr. le relazioni (4)].

Mi pare opportuno sottolineare che nell'equazione del calore la presenza del termine d'accoppiamento (conseguenza della non stazionarietà della trasformazione) complica notevolmente la risoluzione di ogni problema termoelastico: ciò perchè, contrariamente al caso stazionario, le distribuzioni della temperatura e degli stresses devono essere determinate contemporaneamente.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, 43100 Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1967-68. — Ricevuto: 4-I-1968 .

(1) La validità dell'ipotesi di «forze di inerzia trascurabili», già sottolineata dal DUHAMEL (cfr. [3]) nel caso di trasformazioni a lenta variazione della temperatura (ciò che avviene nelle trasformazioni termoelastiche linearizzate), è stata comprovata sperimentalmente per una vasta classe di mezzi naturali comprimibili (cfr. [1] e [4]).

Per i mezzi *comprimibili* si suppone, in generale, che il termine d'accoppiamento sia trascurabile (²), ed allora il problema termico si riconduce ad un problema non stazionario di conduzione del calore. Questa ipotesi, assai semplificativa, non può ritenersi valida in tutti i fenomeni termoelastici dissipativi, dove la variazione di temperatura è da attribuirsi principalmente alla variazione di strains che il solido comprimibile subisce per effetto delle assegnate forze esterne.

Per i mezzi *incomprimibili* l'equazione generale del calore, ottenuta recentemente in [6], contiene la derivata temporale della dilatazione cubica (come nel caso comprimibile) e la derivata temporale della pressione di incomprimibilità. Però, se si presume che la velocità di variazione della pressione di incomprimibilità sia dello stesso ordine di grandezza di quella della temperatura, il problema termico, in virtù del vincolo di incomprimibilità, viene ad essere indipendente dal problema termoelastico. Allora, la trasformazione incomprimibile può determinarsi con i metodi classici della termoelasticità, mentre la corrispondenza provata in questa Nota permette di individuare [cfr. le relazioni (10)] la trasformazione termoelastica comprimibile nella quale non si fa alcuna ipotesi restrittiva sul termine d'accoppiamento.

Osservo, infine, che i risultati ottenuti mi hanno permesso di dedurre facilmente un teorema di unicità per una classe di problemi termoelastici incomprimibili.

§ 1.

1.1. - Alcune premesse.

Sia S un mezzo termoelastico *comprimibile* omogeneo ed isotropo, di costanti termiche ed elastiche α, β, h, a, l, m.

A partire da una configurazione C^* a contorno regolare $\sum^*$, di equilibrio naturale e stabile, il mezzo S subisce una trasformazione termoelastica per effetto delle assegnate sollecitazioni esterne seguenti: forza di massa (³) $\mathscr{F}(P, t)$ conservativa e a potenziale armonico, forza superficiale $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(P, t)$, temperatura superficiale $\Theta=\Theta(P, t)$.

Nella teoria linearizzata, con forze d'inerzia trascurabili, indicando $\boldsymbol{U}(P, t)$ lo spostamento e $T=T(P, t)$ l'incremento unitario della temperatura

(²) Con ciò, nel bilancio energetico, si suppone trascurabile la conversione dell'energia meccanica in calore.

(³) Specifica per unità di massa.

assoluta, la trasformazione $(\boldsymbol{U},\ T)$ è definita dal sistema

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta T = \alpha \dfrac{\partial T}{\partial t} + \beta \dfrac{\partial}{\partial t} \nabla . \boldsymbol{U} & \ldots\ C^*, \quad t > 0 \\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}n} = h(T - \Theta) & \ldots\ \Sigma^*, \quad t > 0 \\[2ex] T = 0\,, \quad \boldsymbol{U} = 0 & \ldots\ C^* + \Sigma^*, \quad t = 0 \\[2ex] m\, \Delta \boldsymbol{U} + (l + m) \nabla\nabla . \boldsymbol{U} - \nabla(aT) = \mathscr{F} & \ldots\ C^*, \quad t > 0 \\[2ex] \Phi \boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \ldots\ \Sigma^*, \quad t > 0, \end{cases}$$

essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale esterna e

$$(2)\qquad \Phi = \| \Phi_{hk} \|\,, \qquad \Phi_{hk} = 2mE_{hk} + l\, \nabla . \boldsymbol{U}\, \delta_{hk} - aT\delta_{hk}\,.$$

Quando le quantità α, β, h, m, $3l + 2m$ sono tutte positive, la soluzione $(\boldsymbol{U},\ T)$ di (1), se esiste, è *unica* (cfr. [**10**]).

Sia ora s un mezzo continuo termoelastico, omogeneo ed isotropo, soggetto al vincolo interno di incomprimibilità (4).

A partire da una configurazione di equilibrio naturale (5) e stabile, una qualunque trasformazione interessante il mezzo s verrà indicata con $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$, dove $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(P,\ t)$ è lo spostamento, $\tau = \tau\,(P,\ t)$ è l'incremento unitario della temperatura assoluta, $q = q\,(P,\ t)$ è l'incremento della pressione di incomprimibilità.

1.2. - Passaggio dal caso comprimibile a quello incomprimibile.

Teorema 1. *La trasformazione termoelastica comprimibile* $(\boldsymbol{U},\ T)$ *determina univocamente una trasformazione termoelastica incomprimibile* $(\boldsymbol{u},\ \tau,\ q)$

---

(4) Cfr. [8]. La condizione di incomprimibilità [che nella teoria linearizzata si traduce in una proporzionalità fra la dilatazione cubica e la variazione di temperatura assoluta dallo stato di riferimento, supposto a temperatura uniforme] interviene, in virtù dei principi classici della termodinamica, nella relazione sforzi-deformazione e nell'equazione del calore (cfr. [**6**]). Nella relazione sforzi-deformazione figura, infatti, una grandezza scalare che può riguardarsi come una pressione, *pressione di incomprimibilità*, mentre nell'equazione del calore figura la derivata temporale della pressione di incomprimibilità.

(5) Con l'ipotesi « equilibrio naturale » i valori della pressione d'incomprimibilità nella configurazione di riferimento risultano univocamente determinati [cfr. annotazione (4)].

mediante le relazioni

(3) $$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}, \qquad \tau = \nabla.\,\boldsymbol{U}/b\,, \qquad q = a\,(T - \nabla.\,\boldsymbol{U}/b)\,.$$

Precisamente: a partire dalla configurazione $C^* + \sum^*$ la distribuzione non stazionaria di spostamenti, strains e stresses individuata nel mezzo comprimibile S da $(\boldsymbol{U}, T)$, compete anche ad un mezzo incomprimibile s le cui costanti α', β', h, a, b, γ, l, m *soddisfano le relazioni*

(4) $$\alpha' + b\,\beta' = a\,(\alpha + b\,\beta)/b(l + 2m), \qquad \gamma = \alpha/b(l + 2m), \qquad \alpha' + b\,\beta' > a\,\gamma,$$

quando, posto per definizione

(5) $$q = a\,(T - \tau)\,,$$

il mezzo incomprimibile s, sotto l'azione delle forze esterne $\mathscr{F}$ e $\boldsymbol{F}$, viene assoggettato ad una conveniente distribuzione della temperatura superficiale θ data da

(6) $$h\,\theta = -\frac{1}{b}\left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}n}\,\nabla\cdot\boldsymbol{U} - h\,\nabla.\boldsymbol{U}\right\}.$$

D i m o s t r a z i o n e. Sotto le ipotesi del Teorema, una trasformazione $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ subita dal mezzo incomprimibile s è definita dal sistema differenziale lineare [6]:

(7) $$\begin{cases} \Delta\tau = \alpha'\,\dfrac{\partial\tau}{\partial t} + \beta'\,\dfrac{\partial}{\partial t}\nabla.\,\boldsymbol{u} + \gamma\,\dfrac{\partial q}{\partial t} & \ldots\ C^*, \quad t > 0 \\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}\tau}{\mathrm{d}n} = h\,(\tau - \theta) & \ldots\ \sum^*, \quad t > 0 \\[2mm] \tau = 0, \quad q = 0, \quad \boldsymbol{u} = 0 & \ldots\ C^* + \sum^*, \quad t = 0 \\[2mm] m\,\Delta\boldsymbol{u} + (l + m)\nabla\nabla.\,\boldsymbol{u} - \nabla(q + a\,\tau) = \mathscr{F} & \ldots\ C^*, \quad t > 0 \\[2mm] \nabla.\,\boldsymbol{u} = b\,\tau & \ldots\ C^*, \quad t > 0 \\[2mm] \varphi\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{F} & \ldots\ \sum^*, \quad t > 0\,, \end{cases}$$

---

[6] Cfr. [6], p. 158.

essendo $\boldsymbol{n}$ il versore della normale esterna e

$$(8)\qquad \varphi = \| \varphi_{hk} \| , \qquad \varphi_{hk} = 2\, m\, e_{hk} + l\, \nabla .\, \boldsymbol{u}\, \delta_{hk} - (q + a\, \tau) \delta_{hk} .$$

Poichè per ipotesi è nota la trasformazione comprimibile $(\boldsymbol{U}, T)$, osservo che la relazione (5) rende il problema termico di (7) indipendente dal problema termoelastico dato dalle equazioni $(7)_4$, $(7)_5$, $(7)_6$. Infatti, in virtù del legame di incomprimibilità $(7)_5$, l'equazione indefinita $(7)_1$ assume la forma

$$\Delta \tau = (\alpha' + b\, \beta') \frac{\partial \tau}{\partial t} + \gamma \frac{\partial q}{\partial t} ,$$

cioè, per (5),

$$(9)\qquad \Delta \tau = A \frac{\partial \tau}{\partial t} + a\, \gamma \frac{\partial T}{\partial t} \qquad (A = \alpha' + b\, \beta' - a\, \gamma) ,$$

dove l'ultimo termine (funzione nota del posto e del tempo) può interpretarsi come una sorgente di calore interna al mezzo s. Allora, essendo per $(4)_3$ la costante $A > 0$, il problema termico di (7) dato da (9), $(7)_2$ e dalla condizione iniziale $\tau = 0$, se ha una soluzione, ne ha una sola (cfr. [1], p. 157).

La funzione $\nabla . \boldsymbol{U}/b$ è proprio la soluzione. Invero, applicando l'operatore $\nabla .$ ad ambo i membri di $(1)_4$ risulta (essendo la forza $\mathscr{F}$ conservativa e a potenziale armonico):

$$(l + 2m)\, \Delta \nabla .\, \boldsymbol{U} = \Delta (aT) ,$$

ed anche

$$\Delta \nabla .\, \boldsymbol{U}/b = B\, \Delta T \qquad [B = a/(b(l + 2m))],$$

da cui per $(1)_1$

$$(9')\qquad \Delta \nabla .\, \boldsymbol{U}/b = B' \frac{\partial}{\partial t} \nabla .\, \boldsymbol{U}/b + \alpha\, B \frac{\partial T}{\partial t} \qquad [B' = a\, \beta/(l + 2m)] .$$

Pertanto, quando si tengano presenti le relazioni (4), il confronto di (9) e (9′) porta a concludere che la funzione $\nabla .\, \boldsymbol{U}/b$ soddisfa l'equazione indefinita $(7)_1$. Inoltre si verifica subito che la funzione $\nabla .\, \boldsymbol{U}/b$, nulla nell'istante iniziale, soddisfa la condizione al contorno $(7)_2$ dove θ ha l'espressione (6). Pertanto nel sistema (7) è $\tau = \nabla .\, \boldsymbol{U}/b$, cioè vale la $(3)_2$ e quindi la $(3)_3$.

Nota così la funzione incognita τ, per il problema termoelastico dato dalle equazioni $(7)_4$, $(7)_5$, $(7)_6$ (dove la variabile tempo figura come parametro) sussiste un teorema di unicità (cfr. [8]). Allora, dal confronto delle equazioni $(7)_4$ e $(7)_6$ rispettivamente con le equazioni $(1)_4$ e $(1)_5$ segue $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}$, cioè la $(3)_1$, rimanendo poi senz'altro verificata la $(7)_5$.

Il Teorema 1 è così provato.

1.3. - Passaggio dal caso incomprimibile a quello comprimibile.

A partire dalla configurazione $C^* + \sum^*$ sia ora assegnata una trasformazione $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ linearizzata, non stazionaria che un mezzo incomprimibile s (di costanti α', β', h, a, b, γ, l, m) subisce per effetto delle sollecitazioni esterne $\mathscr{F}$, $\boldsymbol{F}$, θ, essendo trascurabili le forze d'inerzia. Tale trasformazione è manifestamente soluzione del sistema (7).

Vale allora il seguente

Teorema 2. *La trasformazione termoelastica incomprimibile* $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ *determina univocamente una trasformazione termoelastica comprimibile* $(\boldsymbol{U}, T)$ *mediante le relazioni*

$$\boldsymbol{U} = \boldsymbol{u}\,, \qquad T = (q + a\,\tau)/a\,. \tag{10}$$

Precisamente: A partire dalla configurazione $C^* + \sum^*$ la distribuzione non stazionaria di spostamenti, strains e stresses individuata, nel mezzo incomprimibile s, da $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$ compete anche ad un mezzo comprimibile S le cui costanti α, β, h, a, l, m soddisfano le relazioni (4), quando il mezzo S, sotto l'azione delle forze esterne $\mathscr{F}$ e $\boldsymbol{F}$, viene assoggettato ad una conveniente distribuzione della temperatura superficiale Θ data da

$$h\,\Theta = h\,\theta - \frac{1}{a}\left\{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}n} - h\,q\right\}. \tag{11}$$

Dimostrazione. Sotto le ipotesi del Teorema, una trasformazione $(\boldsymbol{U}, T)$ subita dal mezzo comprimibile S è definita dal sistema differenziale lineare (1).

Poichè per ipotesi è nota la trasformazione incomprimibile $(\boldsymbol{u}, \tau, q)$, osservo che, in virtù del vincolo d'incomprimibilità, l'equazione indefinita $(7)_1$ può scriversi

$$\Delta\tau = (\alpha' + b\,\beta')\,\frac{\partial\tau}{\partial t} + \gamma\,\frac{\partial q}{\partial t}\,,$$

ed anche

$$\Delta\tau = C\,\frac{\partial\tau}{\partial t} + \gamma\,\frac{\partial(q + a\,\tau)}{\partial t} \qquad (C = \alpha' + b\,\beta' - a\,\gamma). \tag{12}$$

Ora, applicando l'operatore $\nabla\cdot$ ad ambo i membri di $(7)_4$ risulta (essendo la forza $\mathscr{F}$ conservativa e a potenziale armonico)

$$b(l + 2m)\,\Delta\tau = \Delta(q + a\,\tau)\,,$$

cioè

$$\Delta\tau = (1/C')\,\Delta(q + a\tau) \qquad [C' = b\,(l + 2m)]\,.$$

Sostituendo in (12), si ottiene

$$(12') \qquad \Delta(q + a\,\tau) = C\,C'\,\frac{\partial\tau}{\partial t} + C'\,\gamma\,\frac{\partial(q + a\,\tau)}{\partial t}\,.$$

Posto per brevità

$$(13) \qquad v = (q + a\,\tau)/a\,,$$

la (12′) diventa, per $(7)_5$,

$$(12'') \qquad \Delta v = \{C\,C'/(ab)\}\,\frac{\partial}{\partial t}\,\nabla.\,\boldsymbol{u} + C'\,\gamma\,\frac{\partial v}{\partial t}\,,$$

mentre la $(7)_4$ prende la forma

$$(14) \qquad m\,\Delta\boldsymbol{u} + (l + m)\,\nabla\nabla.\,\boldsymbol{u} - \nabla\,(a\,v) = \mathscr{F}.$$

Allora, il confronto di (12″) e (14) rispettivamente con $(1)_1$ e $(1)_4$, valendo le relazioni (4), porta ad affermare che le funzioni $\boldsymbol{u}$ e v, formanti una soluzione di (12″) e (14), sono anche una soluzione delle equazioni indefinite del sistema (1). D'altra parte, le funzioni $\boldsymbol{u}$ e v, in virtù di $(7)_3$, soddisfano le condizioni iniziali di (1), mentre dalla (8), scritta nella forma [cfr. (13)]

$$(8') \qquad \varphi_{hk} = 2\,m\,e_{hk} + l\,\nabla.\,\boldsymbol{u}\,\delta_{hk} - a\,v\,\delta_{hk}\,,$$

segue che le funzioni $\boldsymbol{u}$ e v verificano anche la condizione al contorno $(1)_5$. Infine, poichè per $(7)_2$ la relazione (11) diventa

$$a\,h\,\Theta = -\left\{\frac{\mathrm{d}(q + a\,\tau)}{\mathrm{d}n} - h\,(q + a\,\tau)\right\},$$

cioè, per (13),

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}n} = h\,(v - \Theta),$$

risulta che la funzione v verifica la condizione al contorno $(1)_2$.

Pertanto, le funzioni $\boldsymbol{u}$, v rappresentano una soluzione del sistema (1), anzi [per un noto teorema di unicità (cfr. [8])] la soluzione di (1).

Il Teorema 2 è così concluso.

Osservazione. Procedendo in modo completamente analogo, si prova che sussiste ancora una corrispondenza biunivoca fra trasformazioni comprimibili ed incomprimibili del tipo ora esaminato, anche quando sul contorno $\sum^*$, invece di una distribuzione di forze superficiali, venga assegnata una distribuzione di spostamenti.

§ 2.

2.1. - Un teorema di unicità relativo ad una classe di mezzi incomprimibili.

Dal Teorema 2 (cfr. n. **1.3**) discende facilmente il seguente

Teorema. *Il sistema differenziale* (7), *dove le costanti* a, h, $3l + 2m$ *sono positive, e le costanti* α', β', γ, b *verificano le relazioni* (4) *con* $\alpha > 0$, $\beta > 0$, *ha al più una soluzione formata da funzioni di classe* $\mathscr{C}^{(2)}$.

Dimostrazione. Infatti, se (7) avesse due soluzioni $(\boldsymbol{u}', \tau', q')$, $(\boldsymbol{u}'', \tau'', q'')$, esse sarebbero necessariamente eguali. Ciò perchè, associato a (7) il sistema differenziale (1), il sistema (1) ha, in virtù delle ipotesi, al più una soluzione (cfr. [10]); d'altra parte per il Teorema 2, si ha $\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{u}'' = \boldsymbol{U}$ da cui

$$\boldsymbol{u}' = \boldsymbol{u}'' .$$

Ma per $(10)_2$, $q' + a\,\tau' = aT$, $q'' + a\,\tau'' = aT$ onde

$$q' - q'' = a\ (\tau'' - \tau') ,$$

da cui, essendo $\nabla .\ \boldsymbol{u}' = b\,\tau'$ e $\nabla .\ \boldsymbol{u}'' = b\,\tau''$, segue

$$\tau' = \tau'', \qquad q' = q'' .$$

Osservazione. In virtù dell'Osservazione alla fine del n. **1.3**, il sistema differenziale ottenuto da (7) sostituendo la $(7)_6$ con una distribuzione di spostamenti, ha pure al più una soluzione.

2.2 - Una ipotesi presumibile nel caso incomprimibile.

Posto, per semplicità, $\dot{\tau} = \partial\tau/\partial t$, $\dot{q} = \partial q/\partial t$, l'equazione $(7)_1$ può scriversi, in virtù del vincolo d'incomprimibilità $(7)_5$, nella forma

$$\Delta\tau = (\alpha' + b\,\beta')\,\dot{\tau}\{1 + k\,\dot{q}/\dot{\tau}\} \qquad [k = \gamma/(\alpha' + b\,\beta')] .$$

Ne segue che, se il termine d'accoppiamento $k\,\dot{q}/\tau$ è trascurabile di fronte all'unità, il sistema (7) rientra nei problemi termoelastici « non accoppiati » per mezzi incomprimibili, già studiati in [6] e [7].

Ora, per lente e continue variazioni di temperatura (ciò che si ammette nelle trasformazioni termoelastiche linearizzate) è presumibile che la velocità di variazione della pressione d'incomprimibilità sia dello stesso ordine di grandezza della velocità di variazione della temperatura. Ne segue che il termine $k\dot{q}/\tau$ può ritenersi trascurabile di fronte all'unità, certamente per $|k| \ll 1$ (7). D'altra parte, quando in (7) può ritenersi trascurabile il termine d'accoppiamento, ciò non avviene in generale nel caso comprimibile (1). In questi casi, il Teorema 2 appare vantaggioso perchè individua, mediante le (10), la soluzione di problemi comprimibili « accoppiati ». Un esempio di ciò sarà dato nel n. 2.3.

2.3. - Su un particolare problema a simmetria sferica.

Il mezzo incomprimibile s, di parametro $|k| \ll 1$, riempia lo spazio esterno ad una superficie sferica. Sulla superficie sferica sia assegnata una distribuzione uniforme (rispetto al posto), non stazionaria della temperatura (8) e degli sforzi; inoltre le forze di massa siano di tipo gravitazionale. In queste condizioni, il mezzo s subisce una trasformazione non stazionaria e a simmetria sferica, caratterizzata dal sistema differenziale (7), ove si faccia $h = \infty$, $\theta = \theta(t)$, $\mathscr{F} = \mathscr{F}(r)$ (essendo r la distanza di un punto qualunque di s dal centro della sfera) e $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}(t)$. Essendo $|k| \ll 1$, nell'equazione $(7)_1$ scompare il termine di accoppiamento e il problema termico rientra nei problemi trattati in [2]. Supposta allora nota l'espressione della temperatura (9), la trasformazione termoelastica definita dalle equazioni $(7)_4$, $(7)_5$, $(7)_6$ si può ottenere dalla sovrapposizione di uno stato elastico isotermo (incomprimibile) relativo alle assegnate forze di massa, con uno stato termoelastico (incomprimibile) in assenza di forze di massa (10). Limitandomi al caso termoelastico in assenza di forze di massa (11), osservo che la soluzione completa delle equazioni indefinite $(7)_4$ e $(7)_5$ [ove si faccia $\mathscr{F} = 0$] dipende da una sola funzione potenziale, in conseguenza della simmetria sferica del problema (12).

(7) Invero, espresso k in funzione delle costanti del mezzo comprimibile S mediante le relazioni (4), è stato verificato sperimentalmente (cfr. [1]) che esistono mezzi naturali per i quali $|k|$ è molto inferiore all'unità.

(8) È di particolare interesse tecnico il caso in cui la temperatura superficiale sia una funzione periodica del tempo.

(9) Nel caso indicato nell'annotazione (8) cfr. [1], p. 260.

(10) Cfr. $[7]_2$.

(11) Per l'espressione della soluzione nel caso isotermo si veda [5].

(12) Cfr. [6], p. 164. Per mezzi a simmetria assiale la trasformazione dipende da due funzioni potenziali, di cui una armonica.

Precisamente si ottiene

$$(15) \qquad \boldsymbol{u} = \nabla g\,, \qquad\qquad q = (l + 2m - b/a)\,\Delta g\,,$$

essendo la funzione g soluzione dell'equazione di POISSON ($\Delta g = b\,\tau$) e tale da rendere soddisfatta la condizione al contorno $(7)_6$. È da notare che, almeno limitatamente al caso in cui siano nulle le forze di massa, la variazione della pressione di incomprimibilità risulta, per $(15)_2$, proporzionale all'incremento unitario della temperatura.

Nota allora la trasformazione incomprimibile ($\boldsymbol{u}$, τ, q), in virtù delle (10) rimane individuata, nello stesso spazio esterno alla sfera, una trasformazione comprimibile nella quale non si fa alcuna ipotesi restrittiva circa il termine di accoppiamento. Osserviamo infine che, almeno in assenza di forze di massa, dalle (10) [quando si tengano presenti le (15)] risulta che la dilatazione cubica del mezzo comprimibile è proporzionale all'incremento unitario della temperatura T, come appare fisicamente plausibile.

Bibliografia.

[1] B. A. BOLEY and J. H. WEINER, *Theory of Thermal Stresses*, Wiley, New York 1960.

[2] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford 1948.

[3] J. M. C. DUHAMEL, *Second mémoire sur les phénomènes thermo-mécaniques*, J. de l'École Polytechnique **15** (1837), 1-57.

[4] J. N. GOODIER, *Thermal stresses and deformations*, J. Appl. Mech. **24** (1957), 467-474.

[5] A. E. LOVE, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover Publication, New York 1927.

[6] T. MANACORDA, *Sulla termoelasticità dei solidi incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **1** (1960), 149-170.

[7] B. MANFREDI: *Una relazione fra le trasformazioni termoelastiche linearizzate di mezzi comprimibili ed incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **3** (1962), 193-204; *Sulla riducibilità dei problemi termoelastici a problemi isotermi*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **4** (1963), 137-148.

[8] A. SIGNORINI, *Trasformazioni termoelastiche finite*, Mem. I, II, III, IV, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **22** (1943), 33-143; (4) **30** (1949), 1-72; (4) **39** (1955), 147-201; (4) **51** (1960), 329-372.

[9] C. TRUESDELL, *The mechanical fundations of elasticity and fluid dynamics*, J. Rational Mech. Anal. **1** (1952), 125-300.

[10] J. H. WEINER, *A uniqueness theorem for the coupled thermoelastic problem*, Quart. Appl. Math. **15** (1957), 102-105.

Summary.

In continuing [7]$_1$, *here is obtained a relation between linear, thermoelastic,* c o u p l e d *transformations of compressible bodies and those of incompressible bodies, withc onservative body-forces and a disregarded inertia term.*

For temperature distributions with no sharp variations or discontinuities in their time histories, it is intuitively expected that the time rate of change of the « incompressibility constraint » is of the same order of magnitudine as that of the temperature; thus the incompressible problem is uncoupled and the obtained relation defines the compressible coupled transformation.

Finally is given a uniqueness theorem for a class of incompressible problems.

* * *