Riv. Mat. Univ. Parma (2) **5** (1964), 151-157

GIULIO MATTEI (*)

Sul principio dell'effetto giroscopico per un solido asimmetrico autoeccitato. (**)

1. – Il principio dell'effetto giroscopico fu giustificato teoricamente per la prima volta da SIGNORINI **[1]** (¹) per i solidi a struttura giroscopica con un punto fisso O. Successivamente STOPPELLI **[2]** ha esteso il principio al caso di un generico solido $\mathfrak{R}$ asimmetrico. Precisamente, detti: $S(O;\, \boldsymbol{i},\, \boldsymbol{j},\, \boldsymbol{k})$ una terna solidale principale d'inerzia d'origine O; A, B, C i momenti d'inerzia di $\mathfrak{R}$ rispetto agli assi $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ rispettivamente; $\boldsymbol{\omega}_0 = p_0\boldsymbol{i} + q_0\boldsymbol{j} + r_0\boldsymbol{k}$ la velocità di rotazione iniziale di S rispetto a una terna fissa, nelle ipotesi:

1) $A + B \neq C$,

2) $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} = 0$, con $\boldsymbol{M}$ momento rispetto ad O delle forze applicate, supposte indipendenti dalla velocità di rotazione equatoriale oltre che dall'angolo di rotazione propria,

3) p_0, q_0, $1/r_0$ infinitesimi dello stesso ordine per $r_0 \to \infty$,

STOPPELLI ha stabilito che l'espressione al primo ordine di $\dot{\boldsymbol{k}}$ è:

$$C r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M} + \frac{A-B}{A+B-C}\boldsymbol{M}_1 + \boldsymbol{M}_2, \tag{1.1}$$

(*) Indirizzo: Istituto di Matematiche Applicate, Facoltà di Ingegneria, Università, Pisa, Italia.

(**) Ricevuto il 23-XII-1963.

(¹) I numeri in neretto e in parentesi quadre si riferiscono alla Bibliografia posta alla fine del lavoro.

dove $\boldsymbol{M}_1 = M_x \boldsymbol{i} - M_y \boldsymbol{j}$ è il vettore simmetrico di $\boldsymbol{M}$ rispetto ad $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{M}_2$ un opportuno vettore di modulo finito, nullo solo se $p_0 = q_0 = 0$ e $\boldsymbol{M} = 0$ per $t = 0$. Inoltre ha stabilito che, a meno di infinitesimi di ordine superiore a $1/r_0$, gli angoli di EULERO della terna mobile S rispetto alla terna fissa hanno gli stessi valori che avrebbero se $\dot{\boldsymbol{k}}$ fosse dato dalla forma classica del principio:

$$C\, r_0\, \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}\,, \tag{1.1'}$$

concludendo quindi che il principio dell'effetto giroscopico in quest'ultima forma è ancora valido per un solido asimmetrico come una approssimazione della posizione e non dell'atto di moto del solido. Successivamente lo stesso STOPPELLI [3] ha esteso questo risultato al caso più generale di $\boldsymbol{M} \times \boldsymbol{k} \neq 0$ con ancora però l'ipotesi $A + B \neq C$, mentre il caso piano, $A + B = C$, è stato studiato da QUILGHINI [4]. Recentemente poi la dr.sa BATTAGLIA [5] ha trovato la forma del principio relativa al caso di corpi rigidi, a struttura giroscopica, che, in conseguenza di una emissione di particelle, presentano massa variabile in maniera tale però da non alterare sensibilmente i momenti d'inerzia, e sono soggetti ad un momento delle forze attive di direzione invariabile nel corpo. Questo tipo di corpi corrisponde al primo tipo di solidi autoeccitati studiati da GRAMMEL [6] che da ora in poi chiamo, per semplicità, solidi di GRAMMEL.

Precisamente BATTAGLIA ha trovato che, per un giroscopio di asse $\boldsymbol{k}$, sotto le ipotesi:

a) $p_0 = q_0 = 0; \quad r_0 \to \infty$,

b) $\boldsymbol{M}$ inizialmente nullo,

c) $\boldsymbol{M}$ costantemente normale all'asse giroscopico e funzione al più del tempo,

assumendo $\boldsymbol{M}/M = \boldsymbol{i}$, il principio prende la forma:

$$(C - A) r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}\,. \tag{1.2}$$

Il problema, sempre nel caso simmetrico, fu poi affrontato sotto ipotesi più generali (momenti d'inerzia comunque variabili nel tempo, momento delle forze esterne comunque variabile entro il corpo) in un lavoro di MANACORDA [7], nel quale si mostra che la forma classica (1.1') del principio si ristabilisce se il momento equatoriale delle forze esterne ha direzione variabile nel corpo.

In questa nota mi propongo di trovare la forma del principio nel caso di GRAMMEL asimmetrico.

Considero inoltre (in corrispondenza anche a studi di GRAMMEL sui solidi autoeccitati successivi al lavoro [6]) il caso più generale in cui la direzione di $\boldsymbol{M}$

(fissa in $\mathfrak{R}$) non sia più coincidente con un asse principale, come nel lavoro della BATTAGLIA, mantenendo però ancora l'ipotesi che $|\boldsymbol{M}|$ sia funzione solo del tempo.

2. – Riferendomi a un solido $\mathfrak{R}$ di GRAMMEL asimmetrico, sia: $S(O;\, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$ una terna principale d'inerzia con centro nel punto fisso O; $A \neq B \neq C$ i momenti d'inerzia relativi; $\boldsymbol{M}$ il momento rispetto ad O autoprodotto con le caratteristiche indicate alla fine del n. 1; $\boldsymbol{\omega} = p\boldsymbol{i} + q\boldsymbol{j} + r\boldsymbol{k}$ la velocità di rotazione di S rispetto a una terna fissa.

Posto

$$\text{(2.1)} \qquad \begin{cases} (C-B)/A = a; & (C-A)/B = b; & (A-B)/C = c; \\ M_x/A = m_x; & M_y/B = m_y; & M_z/C = m_z, \end{cases}$$

con m_x, m_y, m_z funzioni al più del tempo che suppongo continue e limitate con le loro prime due derivate, l'equazione dei momenti proiettata su S dà le tre equazioni di EULERO del problema:

$$\text{(2.2)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\dot{p} + aqr = m_x \\ &\dot{q} - bpr = m_y \\ &\dot{r} - cpq = m_z\,. \end{aligned} \right.$$

Supponendo $a \cdot b > 0$, cioè l'asse z asse di momento d'inerzia massimo o minimo (e quindi asse di rotazione permanente stabile) si dimostra (cfr. [2], pag. 19), con una opportuna applicazione del metodo di variazione delle costanti arbitrarie, che la soluzione del sistema (2.2) relativa alle condizioni iniziali:

$$\text{(2.3)} \qquad p(0) = p_0, \quad q(0) = q_0, \quad r(0) = r_0,$$

è anche soluzione del sistema di equazioni integrali del tipo di VOLTERRA non lineari:

$$\text{(2.4}_1\text{)} \qquad p = p_0 \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) - \sqrt{a/b}\, q_0 \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \\ + \int_0^t m_x(\tau) \cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\, d\tau - \sqrt{a/b} \int_0^t m_y(\tau) \operatorname{sen}\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\, d\tau\,,$$

$$\text{(2.4}_2\text{)} \qquad q = q_0 \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \sqrt{b/a}\, p_0 \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \\ + \sqrt{b/a} \int_0^t m_x(\tau) \operatorname{sen}\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\, d\tau + \int_0^t m_y(\tau) \cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\, d\tau\,,$$

$$r = r_0 + c\int_0^t pq\,\mathrm{d}\tau + \int_0^t m_z(\tau)\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{2.4$_3$}$$

con $r_t^* = \int_0^t r(\tau)\,\mathrm{d}\tau$.

3. – Mi propongo ora di valutare asintoticamente per $r_0 \to \infty$ gli integrali che compaiono nelle (2.4).

Pongo

$$I_1 = \int_0^t m_x(\tau)\cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad I_2 = \int_0^t m_x(\tau)\,\mathrm{sen}\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Integrando per parti ho:

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{ab}}\frac{m_{x0}}{r_0}\,\mathrm{sen}\,(\sqrt{ab}\,r_t^*) + \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^t \frac{\dot m_x(\tau)}{r(\tau)}\,\mathrm{sen}\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^t \frac{m_x(\tau)}{r^2(\tau)}\,\dot r(\tau)\,\mathrm{sen}\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau\,,$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{ab}}\frac{m_x}{r} - \frac{1}{\sqrt{ab}}\frac{m_{x0}}{r_0}\cos\,(\sqrt{ab}\,r_t^*) + \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^t \frac{m_x(\tau)\,\dot r(\tau)}{r^2(\tau)}\cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau -$$

$$- \frac{1}{\sqrt{ab}}\int_0^t \frac{\dot m_x(\tau)}{r(\tau)}\cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Pongo ora:

$$I_3 = \int_0^t \frac{\dot m_x(\tau)}{r(\tau)}\,\mathrm{sen}\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad I_4 = \int_0^t \frac{m_x(\tau)\,\dot r(\tau)}{r^2(\tau)}\,\mathrm{sen}\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau,$$

$$I_5 = \int_0^t \frac{\dot m_x(\tau)}{r(\tau)}\cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau\,, \qquad I_6 = \int_0^t \frac{m_x(\tau)\,\dot r(\tau)}{r^2(\tau)}\cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\}\,\mathrm{d}\tau.$$

Dalle (2.4) e dalle ipotesi su m_x, m_y, m_z segue che p, q, $r - r_0$ sono funzioni limitate per $r_0 \to \infty$ e per conseguenza $r \xrightarrow[r_0\to\infty]{} \infty$. Inoltre da (2.2) risulta che $\dot r$ è limitata per $r_0 \to \infty$. Ho allora che I_4 e I_6 sono infinitesimi almeno come $1/r_0^2$ per $r_0 \to \infty$.

Riguardo ad I_3 integrando per parti ho:

$$I_3 = \frac{1}{\sqrt{ab}} \left\{ \frac{\dot{m}_x}{r^2} - \frac{\dot{m}_{x0}}{r_0^2} \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) - \int_0^t \frac{\ddot{m}_x(\tau)}{r^2(\tau)} \cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\} \mathrm{d}\tau + \right.$$

$$\left. + 2 \int_0^t \frac{\dot{m}_x(\tau)\, \dot{r}(\tau)}{r^3(\tau)} \cos\{\sqrt{ab}\,(r_t^* - r_\tau^*)\} \mathrm{d}\tau \right\},$$

quindi $I_3 \xrightarrow[r_0 \to \infty]{} 0$ almeno come $1/r_0^2$.

Analogamente $I_5 \xrightarrow[r_0 \to \infty]{} 0$ almeno come $1/r_0^2$.

Procedendo allo stesso modo per gli altri integrali che compaiono nelle (2.4_1) e (2.4_2) ho:

$$(3.1_1) \quad p = p_0 \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) - \sqrt{a/b}\, q_0 \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \frac{m_{x0}}{r_0 \sqrt{ab}} \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) -$$

$$- \frac{1}{b} \frac{m_y}{r} + \frac{m_{y0}}{r_0 b} \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) + O(1/r_0^2),$$

$$(3.1_2) \quad q = p_0 \sqrt{b/a} \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + q_0 \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \frac{1}{a} \frac{m_x}{r} -$$

$$- \frac{1}{a} \frac{m_{x0}}{r_0} \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{m_{y0}}{r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + O(1/r_0^2),$$

da cui supponendo p_0, q_0, $1/r_0$ infinitesimi dello stesso ordine:

$$(3.1_3) \quad r = r_0 + \int_0^t m_z(\tau)\, \mathrm{d}\tau + O(1/r_0^2).$$

Dalla (3.1_3) ho poi:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0} = \frac{-\int_0^t m_z(\tau)\, \mathrm{d}\tau - O(1/r_0^2)}{r_0 \left(r_0 + \int_0^t m_z(\tau)\, \mathrm{d}\tau + O(1/r_0^2) \right)} = O(1/r_0^2).$$

Introdotto il vettore:

$$\boldsymbol{M}^* = r_0 \left\{ -\left(p_0 \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) - \sqrt{a/b}\, q_0 \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \frac{m_{x0}}{r_0 \sqrt{ab}} \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \right. \right.$$

$$\left. + \frac{m_{y0}}{r_0\, b} \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) \right) \boldsymbol{j} + \left(p_0 \sqrt{b/a} \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) + q_0 \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) - \right.$$

$$\left. \left. - \frac{1}{a} \frac{m_{x0}}{r_0} \cos(\sqrt{ab}\, r_t^*) + \frac{1}{\sqrt{ab}} \frac{m_{y0}}{r_0} \operatorname{sen}(\sqrt{ab}\, r_t^*) \right) \boldsymbol{i} \right\},$$

nullo solo se $p_0 = q_0 = m_{x0} = m_{y0} = 0$, dalla $\dot{\boldsymbol{k}} = q\boldsymbol{i} - p\boldsymbol{j}$ ottengo allora per (2.1) la cercata approssimazione al primo ordine di $\dot{\boldsymbol{k}}$:

$$r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \frac{M_x}{C-B}\boldsymbol{i} + \frac{M_y}{C-A}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{M}^* . \tag{3.2}$$

Confrontando con (1.1) risulta quindi che nel caso di GRAMMEL asimmetrico non vale più la forma stabilita da STOPPELLI del principio dell'effetto giroscopico, come già, nel caso simmetrico, la forma classica di SIGNORINI.

Ciò, data l'ipotesi che i momenti d'inerzia non varino sensibilmente nel tempo a causa dell'emissione, è dovuto essenzialmente alla invariabilità in $\mathfrak{N}$ della direzione di $\boldsymbol{M}$.

4. - Casi particolari.

1) Nelle ipotesi di SIGNORINI:

$$p_0 = q_0 = 0, \qquad M(0) = 0 ,$$

ho:

$$r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \frac{M_x}{C-B}\boldsymbol{i} + \frac{M_y}{C-A}\boldsymbol{j} .$$

2) Se, oltre alle ipotesi in 1), è $A = B$ e $\boldsymbol{M}/M = \boldsymbol{i}$, ritrovo il risultato della BATTAGLIA:

$$(C - A)\, r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M} , \tag{4.1}$$

con A momento d'inerzia rispetto a un qualsiasi asse per O normale a z.

3) $A + B = C$ (caso piano): questo caso, quando il solido è soggetto a sollecitazione di tipo classico, ha richiesto una trattazione separata dovuta a QUILGHINI [4] in quanto l'approssimazione del primo ordine per $\dot{\boldsymbol{k}}$ trovata da STOPPELLI cade in difetto (2).

Per il solido autoeccitato invece tale anomalia non si presenta e la (3.2) assume la forma:

$$r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = (M_x/A)\,\boldsymbol{i} + (M_y/B)\,\boldsymbol{j} + \boldsymbol{M}^*. \tag{4.2}$$

Se, inoltre, $\mathfrak{N}$ ha struttura giroscopica:

$$A\, r_0 \dot{\boldsymbol{k}} = \boldsymbol{M}_e + \boldsymbol{M}^* \cdot A .$$

---

(2) La ragione di questo comportamento singolare, che si presenta anche nel caso sferico, è stata messa in luce da STOPPELLI in un recente lavoro [8].

Bibliografia.

[1] A. SIGNORINI, *Complementi alla dinamica dei giroscopi e equazioni del problema completo della Balistica esterna,* Atti Acc. Naz. Lincei. Mem. (8) **1** (1946), 1-41.

[2] F. STOPPELLI, *Sul principio dell'effetto giroscopico,* Giorn. Mat. Battaglini (4) **80** (1950-51), 14-38.

[3] F. STOPPELLI, *Sui fenomeni giroscopici in un solido qualsiasi,* Rend. Sem. Mat. Padova **21** (1952), 25-43.

[4] D. QUILGHINI, *Sul principio dell'effetto giroscopico,* Ricerche Mat. **7** (1958), 205-231.

[5] L. BATTAGLIA, *Sul principio dell'effetto giroscopico nei solidi autoeccitati,* Riv. Mat. Univ. Parma **8** (1957-58), 73-80.

[6] R. GRAMMEL, *Der selbsterregte unsymmetrische Kreisel,* Ing.-Arch. **22** (1954), 73-97.

[7] T. MANACORDA, *Sul principio dell'effetto giroscopico per i solidi di massa variabile,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) **48** (1959), 183-191.

[8] F. STOPPELLI, *Un fenomeno di risonanza nei solidi in rapida rotazione,* Ricerche Mat. **9** (1960), 213-241.

Summary.

The author finds the equation of «the principle of the gyroscopic effect» in the case of an asymmetrical selfexcited solid moving around a fixed point. This equation does not coincide with the one that Stoppelli found concerning solids under classical forces.

* * *