Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 85-132

ALBERT CRUMEYROLLE (*)

Sur quelques interprétations physiques et théoriques des équations du champ unitaire d'Einstein-Schrödinger. (II) (**)

CHAPITRE IV.

LE TENSEUR D'IMPULSION-ENERGIE.

1. - Introduction.

Nous allons maintenant essayer de montrer dans ce chapitre, du moins de manière approchée, qu'il est possible de trouver une métrique $a_{\alpha\beta}$, $a^{\alpha\beta}$ telle que les équations:

$$P^{(\alpha\beta)} - (1/2)\, a^{\alpha\beta}\, P_{(\lambda\mu)}\, a^{\lambda\mu} = 0 \,, \tag{4.1}$$

équivalentes aux équations:

$$P_{(\alpha\beta)} = 0 \,, \tag{4.2}$$

puissent s'écrire sous la forme:

$$S^{\alpha\beta} - \chi\, T^{\alpha\beta} = 0 \,, \tag{4.3}$$

en identifiant les premiers membres de (4.1) et (4.3), $S^{\alpha\beta}$ désignant le tenseur

---

(*) Indirizzo: Faculté des Sciences, Université, Toulouse, France.

(**) Continuazione e fine della Memoria: A. CRUMEYROLLE, *Sur quelques interprétations physiques et théoriques des équations du champ unitaire d'Einstein-Schrödinger*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 331-391.

d'EINSTEIN associé à $a^{\alpha\beta}$ et $T^{\alpha\beta}$ un tenseur d'impulsion-énergie qui se trouve défini par:

$$P^{(\alpha\beta)} - (1/2)\, a^{\lambda\mu}\, a^{\alpha\beta}\, P_{(\lambda\mu)} - S^{\alpha\beta} = -\chi\, T^{\alpha\beta} \tag{4.4}$$

et que nous comparerons à celui de la relativité générale dans le cas extérieur purement électromagnétique, le champ étant lié, comme il a été dit au chapitre I, à la partie antisymétrique du tenseur de RICCI $P_{[\alpha\beta]}$.

Les coordonnées étant fixées, nous supposerons que $a^{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$ ne peut différer que par des termes d'ordre 4 au moins en $1/c$ de $h^{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$. La structure de (4.1) montre alors que son premier membre est défini parfaitement à l'ordre 4 (ou 5 selon les indices) malgré l'imprécision de $a^{\alpha\beta}$, simplement connu à l'ordre 2 (ou 3 selon les indices). Par contre $S^{\alpha\beta}$ comme le montrera en détail un calcul effectué plus bas dépend à l'ordre 4 (ou 5) des termes d'ordre 4 (ou 5) de $a^{\alpha\beta}$, ce qui fait que nous nous trouvons devant la difficulté suivante:

ou nous admettons comme connu le tenseur d'impulsion-énergie de la relativité générale (tiré de la relativité restreinte) et notre méthode peut déterminer $a^{\alpha\beta}$ à l'ordre 4 (ou 5 selon les indices);

ou nous postulons que $a^{\alpha\beta}$ a une certaine forme (tirée d'études antérieures) et la méthode donne un tenseur d'impulsion-énergie que nous comparons à celui de la relativité générale.

Une méthode assez souple que nous appliquerons consiste à choisir pour $a^{\alpha\beta}$ le tenseur $h^{\alpha\beta}$ et à étudier ensuite les modifications de $S^{\alpha\beta}$ quand on remplace $h^{\alpha\beta}$ par un tenseur qui n'en diffère que par des termes d'ordre 4 au moins. Comme nous le constaterons on obtient avec $h^{\alpha\beta}$ un accord presque parfait avec les résultats de la relativité générale extrapolés de la relativité restreinte: ceci nous permettra d'écrire facilement le système qui donne toutes les métriques en accord avec ces résultats.

2. – Les identités de conservation.

Nous devons vérifier qu'en première approximation, c'est-à-dire en tenant compte des équations du champ à l'ordre 2 ou 3 selon les indices comme il a été dit au premier chapitre,

$$\overset{a}{\nabla}_\alpha\, T^{\alpha\beta} = 0,$$

or le premier membre de (4.1) est égal, en négligeant des termes d'ordre 8, à

$$\mathfrak{S}^{\alpha\beta} \qquad \text{ou} \qquad \mathfrak{S}^{*\alpha\beta},$$

ce qui fait que nous devons vérifier que

$$-\overset{(a)}{\nabla}_\alpha T^{\alpha\beta} = \overset{(a)}{\nabla}_\alpha \mathfrak{S}^{*\alpha\beta} - \overset{(a)}{\nabla}_\alpha S^{\alpha\beta} = 0,$$

$\mathfrak{S}^{*\alpha\beta}$ étant d'ordre 4 (ou 5 selon les indices), cela se ramène d'après:

$$\overset{(a)}{\nabla}_\alpha S^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{à} \quad \overset{(a)}{\nabla}_\alpha \mathfrak{S}^{*\alpha\beta} = 0 - \text{Or } \overset{(a)}{\nabla}_\alpha \mathfrak{S}^{*\alpha\beta} = \partial_\alpha \mathfrak{S}^{*\alpha\beta} + o\left[\frac{1}{c^6}\right]$$

$$= \partial_\alpha \mathfrak{S}^{\alpha\beta} + o\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

D'après la formule (3.1), on aura donc bien:

$$\overset{(a)}{\nabla}_\alpha T^{\alpha\beta} = 0 \quad \text{mod } o\left[\frac{1}{c^6}\right],$$

$T^{\alpha\beta}$ étant d'ordre 4 ou 5 selon les indices.

Donc à l'approximation indiquée, et qui nous suffit, les conditions de conservation sont bien satisfaites.

3. – Calcul des coefficients $\mathfrak{S}^{*ik}$ et $\mathfrak{S}^{*00}$ à l'ordre 4.

Nous avons trouvé plus haut:

$$\mathfrak{S}^{*\alpha\beta} = S^{\alpha\beta} + h^{\alpha\mu} h^{\beta\nu} A_{\mu\nu} - (1/2)\, h^{\alpha\beta} h^{\mu\nu} A_{\mu\nu}\,,$$

$S^{\alpha\beta}$ étant construit avec la métrique $h^{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$; $A_{\mu\nu} = P_{(\mu\nu)} - R_{\mu\nu}$ [voir (3.2), $A_{\mu\nu}$ est au moins d'ordre 4 en $1/c$].

Rappelons aussi que les formules (3.5) et (3.7) donnent:

$$\underset{(4)}{\mathfrak{S}^{*12}} \quad \text{et} \quad \underset{(4)}{\mathfrak{S}^{*22}}.$$

Nous devons calculer:

$$\mathfrak{S}^{*00} = S^{00} + h^{0\mu} h^{0\nu} A^{\mu\nu} - (1/2)\, h^{00} h^{\mu\nu} A_{\mu\nu}$$

$$= S^{00} + (1/2) \sum_i A_{ii} + o\left[\frac{1}{c^6}\right],$$

ce qui donne:

$$c^4\, \mathfrak{S}^{*00} = c^4\, S^{00} - (3/4) \sum_i \Delta\, (\beta'_i)^2 + (\partial_1 \beta'_3)^2 + (\partial_2 \beta'_3)^2 + (\partial_2 \beta'_1)^2 + (1/4) \sum_i (\partial_i \beta'_i)^2$$

$$- (1/2)\, (\partial_3\, \beta'_3\, \partial_1 \beta'_1 + \partial_2 \beta'_2\, \partial_1 \beta'_1 + \partial_2 \beta'_2\, \partial_3 \beta'_3) + o\left[\frac{1}{c^2}\right].$$

Ainsi $\mathfrak{S}^{*ik} - S^{ik}$, $\mathfrak{S}^{*00} - S^{00}$ sont d'ordre 4, ce sont donc les termes en $1/c^4$ de ces dernières différences qui représenteront $-\chi\, T^{ik}$ et $-\chi\, T^{00}$.

Posant:

$$\mathfrak{S}^{*ik} = S^{ik} + \pi^{ik}, \qquad \mathfrak{S}^{*00} = S^{00} + \pi^{00},$$

nous aurons donc:

$$\pi^{ik} = -\chi\, T^{ik}, \qquad \pi^{00} = -\chi\, T^{00}$$

et en conséquence nous allons calculer: π^{12}, π^{22}, π^{00}. $\underset{(4)}{\pi^{12}}$ peut s'écrire:

$$(1/2)\, (\Delta\, \beta'_1)\, \beta'_2 + (1/2)\, (\Delta\, \beta'_2)\, \beta'_1 - (1/2)\, \partial_{12} \sum_i (\beta'_i)^2 - 2\, \partial_2 \beta'_1 \cdot \partial_3 \beta'_3 + 2\, \partial_3 \beta'_1 \cdot \partial_3 \beta'_2 .$$

Nous avons posé:

$$\varphi = A/r + Cr, \qquad \beta'_i = \lambda\, (x^i - \xi^i), \qquad \lambda = -A/r^3 + C/r,$$

alors:

$$\Delta\varphi = 2C/r, \qquad \Delta\beta'_i = -2\; C\, (x^i - \xi^i)/r^3 .$$

Nous écrirons x^i pour $(x^i - \xi^i)$, pour abréger. D'où:

$$\underset{(4)}{\pi^{12}} = \left[2\, \frac{AC}{r^6} - \frac{6A^2}{r^8}\right] x^1\, x^2 , \tag{4.5}$$

$$\underset{(4)}{\pi^{22}} = \frac{\Delta\, (\beta'_2)^2}{2} + \frac{1}{4} \sum_i \Delta\, (\beta'_i)^2 - \frac{1}{2}\, \partial_{22} \sum_i (\beta'_i)^2 - (\partial_1 \beta'_3)^2 + \partial_3 \beta'_3 \cdot \partial_1 \beta'_1$$

$$- (\partial_2 \beta'_2)^2 + \frac{1}{4}\, (\partial_1 \beta'_1 + \partial_3 \beta'_3 - \partial_2 \beta'_2)^2 .$$

Il vient après réduction:

$$\underset{(4)}{\pi^{22}} = 2\,\frac{AC}{r^6}\,(x^2)^2 - \frac{AC}{r^4} + 0\left[\frac{1}{r^6}\right]. \tag{4.6}$$

Enfin calculons $\underset{(4)}{\pi^{00}} = \underset{(4)}{\mathfrak{S}^{*00}} - \underset{(4)}{S^{00}}$ (cf. plus haut):

$$\underset{(4)}{\pi^{00}} = \frac{AC}{r^4} - \frac{6A^2}{r^6}. \tag{4.7}$$

Afin de contrôler nos calculs nous devons vérifier que:

$$\partial_i\,\pi^{i2} = 0 \qquad \mathrm{mod}\ o\left[\frac{1}{c^6}\right] \qquad \text{et mod}\ o\left[\frac{1}{r^7}\right],$$

$$\partial_1\,\pi^{12} = \frac{2AC}{r^6}\,x^2 - \frac{12\,AC}{r^8}\,(x^1)^2\,x^2\,,$$

$$\partial_3\,\pi^{32} = \frac{2\,AC}{r^6}\,x^2 - \frac{12\,AC}{r}\,(x^3)^2\,x^2\,,$$

$$\partial_2\,\pi^{22} = \frac{4\,AC}{r^6}\,x^2 - \frac{12\,AC}{r^8}\,(x^2)^2\,x^2 + \frac{4\,AC}{r^6}\,x^2\,,$$

en additionnant nous trouvons bien 0.

4. – Comparaison de T^{ij}, T^{00} avec le tenseur tiré de la relativité restreinte.

$F^{\alpha\beta}$ désignant les composantes du champ électromagnétique nous considérons le tenseur $\tau^{\alpha\beta}$ tel que:

$$\chi\,\tau^{\alpha\beta} = \frac{\chi}{4\pi c^2}\left[\frac{1}{4}\,h^{\alpha\beta}\,F_{\lambda\mu}\,F^{\lambda\mu} - F^{\alpha\varrho}\,F^{\beta}_{\varrho}\right]$$

où $\chi = \dfrac{8\pi G}{c^2}$, $\qquad G = 6{,}6\cdot 10^{-8}$ C.G.S..

Nous avons posé au Chapitre I:

$$F^{12} = 2K\,c^2\,P_{[30]} \qquad\qquad F^{10} = 2\,Kc^2\,P_{[23]}$$

$$= K/c\,\Delta\,\beta_3 \qquad\qquad = -K\,\Delta\,\beta_{23}$$

en première approximation.

Il vient ainsi en négligeant des termes d'ordre supérieur à 4 en $1/c$:

$$\chi\,\tau^{12} = -\frac{\chi}{4\pi c^2}\,F^{1\varrho}\,F^2_{\varrho} = -\frac{\chi\,K^2\,C^2}{\pi c^2\,r^6}\,x^1\,x^2\,,$$

$$\chi\tau^{22} = \frac{\chi K^2}{8\pi c^2}\sum_i (\Delta\,\beta'_i)^2 - \frac{\chi K^2}{4\pi c^2}\,(\Delta\,\beta'_2)^2 = \frac{\chi\,K^2\,C^2}{\pi c^2}\left[\frac{1}{2r^4} - \frac{(x^2)^2}{r^6}\right],$$

$$\chi\tau^{00} = \frac{\chi}{4\pi c^2}\left[-\frac{K^2}{2}\sum_i (\Delta\,\beta'_i)^2 - F^{0i}\,F^0_i\right] = \frac{\chi\,KC^2}{2\pi c^2}\,\frac{1}{r^4}\,.$$

On peut vérifier que

$$T^{12} = \tau^{12}, \qquad T^{22} = \tau^{22}, \qquad T^{00} = -\,\tau^{00},$$

en négligeant des termes d'ordre 6 en $1/r$. Pour T^{12} cela se ramène à

$$\frac{2AC}{r^6}\,x^1\,x^2 = \frac{\chi\,K^2\,C^2}{\pi c^2\,r^6}\,x^1\,x^2\,,$$

ce qui s'écrit, compte tenu de $A = 4K^2\,GC$,

$$\chi = \frac{8\pi G}{c^2}\,,$$

valeur classique de la constante de gravitation χ. Pour T^{22} cela se ramène à:

$$\frac{2\,A\,C}{c^4\,r^6}\,(x^2)^2 - \frac{AC}{c^2\,r^4} = \frac{\chi\,K^2\,C^2}{\pi c^2}\left[-\frac{1}{2r^4} + \frac{1}{r^6}\,(x^2)^2\right]$$

et redonne le résultat obtenu pour T^{12}. Enfin pour T^{00} on trouve: $\dfrac{AC}{c^2\,r^4} = \chi\tau^{00}$ et non $-\chi\tau^{00}$.

5. – Calcul de $\mathfrak{S}^{*i0}$ (à l'ordre 5).

$$\mathfrak{S}^{*i0} = S^{i0} + h^{i\mu} h^{0\nu} \Lambda_{\mu\nu} - (1/2)\, h^{i0} h^{\mu\nu} \Lambda_{\mu\nu},$$

où le dernier terme est d'ordre 7 au moins.

$\cong$ désignera dans ce paragraphe une égalité où l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 5 en $1/c$.

$$\mathfrak{S}^{*i0} \cong S^{i0} - \Lambda_{i0}.$$

Avec les notations utilisées plus haut nous poserons:

$$\pi^{i0} \cong -\Lambda_{i0} \cong -\chi\, \tau^{i0},$$

$$\Lambda_{10} \cong -S^l_{1r} S^r_{l0} + \partial_r U^r_{10} - (1/2)\,(\overset{h}{\nabla}_0 U_1 + \overset{h}{\nabla}_1 U_0).$$

Un résultat utilisé au Chapitre III nous permet d'écrire:

$$(1/2)\,(\overset{h}{\nabla}_0 U_1 + \overset{h}{\nabla}_1 U_0) \cong (1/2c^5)\, \partial_{t1} \sum_i (\beta'_i)^2.$$

Compte tenu des résultats du Chapitre I, nous trouvons ensuite:

$$S^l_{1r} S^r_{l0} \cong \frac{\partial_2 \beta'_3}{c^5}(\partial_3 \beta_3 - \partial_2 \beta_2) + \frac{\partial_2 \beta_3 + \partial_3 \beta_2}{2c^5}(\partial_2 \beta'_2 - \partial_3 \beta'_3) + \frac{1}{2c^5}\, \partial_t \beta'_1 \cdot \partial_1 \beta'_1$$

$$- \frac{\partial_1 \beta'_3}{2c^5}(\partial_2 \beta_1 + \partial_1 \beta_2 - \partial_t \beta'_3) + \frac{1}{2c^5}\, \partial_1 \beta'_2\, (\partial_3 \beta_1 + \partial_1 \beta_3 + \partial_t \beta'_2),$$

$$\partial_r U^r_{10} \cong -\frac{1}{2c^5}(\Delta \beta_2)\, \beta'_3 + S^2_{0r} \frac{\partial_r \beta'_3}{c^2} + \frac{(\Delta \beta_3)}{2c^5}\, \beta'_2 - S^3_{0r} \frac{\partial_r \beta'_2}{c^2} + S^1_{1r} \frac{\partial_r \beta_1}{c^3}$$

$$+ S^2_{1r} \frac{\partial_r \beta_2}{c^3} + S^3_{1r} \frac{\partial_r \beta_3}{c^3} + \frac{1}{2c^5}(\beta'_2\, \Delta \beta_3 - \beta_2\, \Delta \beta'_3),$$

d'où on tire:

$$\underset{(5)}{\Lambda_{10}} \cong \partial_1 \beta'_1 (\partial_2 \beta_3 - \partial_3 \beta_2) + \partial_1 \beta'_2 (\partial_3 \beta_1 - \partial_1 \beta_3) + \partial_1 \beta'_3 (\partial_1 \beta_2 - \partial_2 \beta_1)$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_i (\partial_i \beta'_i)(\partial_3 \beta_2 - \partial_2 \beta_3) - \frac{\Delta\varphi}{2}\, \partial_t \beta'_1 + \frac{1}{2} \Delta (\beta'_2 \beta_3 - \beta_2 \beta'_3) - \frac{1}{2}\, \partial_{t1} \sum (\beta'_i)^2.$$

Tenant compte de

$$\varphi = \frac{A}{r} + Cr, \qquad \beta'_i = \partial_i \varphi, \qquad \vec{\beta} = -\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \varphi \wedge \vec{v},$$

il vient:

$$\underset{(5)}{A_{10}} \cong -\frac{1}{2} \Delta \varphi \left[\Delta \varphi \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}t} + 4\, \partial_t \beta'_1 \right] + \frac{1}{2} \Delta \sum (\beta'_1)^2 \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}t} + $$

$$+ \frac{1}{2} (\Delta (\beta'_1 \cdot \partial_t \varphi) - \sum_i \beta'_i\, \partial_{1t} \beta'_i \,;$$

on trouve alors après des calculs assez longs (et en remplaçant $x^i - \xi^i$ par x^i):

$$-\underset{(5)}{\pi^{10}} \cong \underset{(5)}{A_{10}} \cong \frac{2A^2}{r^6} \frac{\mathrm{d}\xi'}{\mathrm{d}t} - \frac{2AC}{r^6} x^1 x^i \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \frac{6\, A^2}{r^8} x^1 x^i \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} \qquad \text{(en sommant en } i).$$

Nous allons comparer cette expression à $\chi \tau^{10}$ tiré de la relativité restreinte:

$$\tau^{10} = \frac{1}{4\pi c^2} \left[(1/4)\, h^{10} F_{\lambda\mu} F^{\lambda\mu} - F^{1\varrho} F^0_\varrho \right],$$

$$F^{12} = (K/c)\, \Delta\, \beta_3\,, \qquad F^{10} = -K\, \Delta\, \beta'_1\,;$$

$$\tau^{10} = \frac{1}{4\pi c^2} \left[F^{12} F^{02} + F^{13} F^{03} \right] \qquad \text{(en première approximation)}$$

$$= \frac{K^2\, C^2}{\pi c^3\, r^6} \left[\left\{ (x^2)^2 + (x^3)^2 \right\} \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}t} - x^2 x^1 \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}t} - x^3 x^1 \frac{\mathrm{d}\xi^3}{\mathrm{d}t} \right].$$

Nous négligeons les termes en $1/r$ d'ordre supérieur à 4.

Nous allons, avant de comparer π^{i0} et $-\chi\tau^{10}$, vérifier qu'avec les approximations admises:

$$\partial_i \underset{(5)}{\pi^{i0}} + \partial_0 \underset{(4)}{\pi^{00}} = 0\,,$$

ce qui nous donnera un contrôle de nos calculs:

$$c\, \partial_0 \underset{(4)}{\pi^{00}} = \frac{4\, AC}{r^6} x^i \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}\,,$$

$$\partial_i \underset{(5)}{\pi^{i0}} = \frac{6\, AC}{r^6} x^i \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} - \frac{12\, AC}{r^6} x^i \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} + \frac{2\, AC}{r^6} x^i \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}\,,$$

et la somme est bien nulle.

Posant $\pi^{i0} = -\chi\, T^{i0}$, on trouve alors:

$$\tau^{i0} = T^{i0} + \frac{K^2\, C^2}{\pi c^3\, r^4}\, \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = T^{i0} + \frac{e^2}{\pi c^3\, r^4}\, \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}\,,$$

e désignant la charge de la particule.

En résumé: avec le tenseur $h_{\alpha\beta}$ nous trouvons:

$$T^{ij} = \tau^{ij}, \qquad T^{00} = \tau^{00} - 2\tau^{00}, \qquad T^{i0} = \tau^{i0} - \frac{e^2}{\pi c^3\, r^4}\, \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}\,.$$

L'accord avec la relativité générale n'est donc pas absolument parfait. Il est à noter les résultats trouvés pour les indices d'espace i, j. Nous pourrions nous estimer satisfaits car le tenseur impulsion-énergie de la relativité générale:

n'a été déduit que par extrapolation de celui de la relativité restreinte;

ne possède pas une signification intrinsèque car il n'est défini que modulo un tenseur de divergence nulle.

Cependant les travaux de M. Lichnerowicz et de M·me Maurer-Tison ont montré qu'il y avait trois cônes caractéristiques possibles pour définir les surfaces d'ondes:

le cône C_γ associé à $\gamma_{\alpha\beta} = \dfrac{g}{2h + 2k - g}\,(2h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta})$,

$$\gamma^{\alpha\beta} = \frac{2h}{g}\, h^{\alpha\beta} - l^{\alpha\beta}\,;$$

le cône C_h associé à $h^{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$;

le cône C_l associé à $l^{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$.

C'est le cône C_γ qui définit la « plus grande vitesse » et le cône C_l « la plus petite », moyennant la condition

$$2h + 2k - g < 0$$

(voir [18], pages 81-82) qui est bien satisfaite ici, où:

$$g = h = -1 - \frac{4\, U_{00}}{c^2} \quad \mathrm{mod}\ o\left[\frac{1}{c^4}\right], \qquad k = o\left[\frac{1}{c^{10}}\right].$$

Nous allons montrer qu'il est possible de trouver un système d'équations permettant de déterminer toutes les métriques qui donnent à l'ordre 4 ou 5 selon les indices un tenseur d'impulsion-énergie égal à $\tau^{\alpha\beta}$.

6. – Modification de $S^{\alpha\beta}$ quand on remplace $h^{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ par un tenseur $a^{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$ qui en diffère par des termes du 4e ordre au moins en $1/c$.

Posons:

$$a^{ij} = h^{ij} + \frac{\varepsilon^{ij}}{c^4}, \qquad a_{ij} = h_{ij} + \frac{\varepsilon_{ij}}{c^4},$$

$$a^{00} = h^{00} + \frac{\varepsilon^{00}}{c^4}, \qquad a_{00} = h_{00} + \frac{\varepsilon_{00}}{c^4},$$

$$a^{i0} = h^{i0} + \frac{\varepsilon^{i0}}{c^5}, \qquad a_{i0} = h_{i0} + \frac{\varepsilon_{i0}}{c^5}.$$

On en déduit:

$$\varepsilon_{ji} + \varepsilon^{ij} = o\left[\frac{1}{c^2}\right], \qquad \varepsilon_{00} + \varepsilon^{00} = o\left[\frac{1}{c^2}\right], \qquad \varepsilon_{i0} - \varepsilon^{i0} = o\left[\frac{1}{c^2}\right].$$

Nous désignerons par des lettres accentuées les nouveaux éléments construits avec $a^{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$.

Nous pouvons supposer pour simplifier nos calculs que l'on a choisi les coordonnées isothermes relativement à $h_{\alpha\beta}$, ce sont ces coordonnées que l'on utilise dans les deux cas.

$$S^{12} = R^{12} - (1/2)\, R\, h^{12} \qquad (R^{12},\ R,\ h^{12}\ \text{ sont d'ordre 4 en } 1/c),$$

$$S'^{12} - S^{12} = R'^{12} + o\left[\frac{1}{c^8}\right].$$

D'après une formule classique (voir [8], page 11):

$$R'^{12} = (1/2)\, a^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta}\, a^{12} - \Gamma'^{1}_{\alpha\gamma}\, \Gamma'^{2}_{\beta\delta}\, a^{\alpha\beta}\, a^{\gamma\delta} - (1/2)\,(a^{1\varrho}\, \partial_\varrho\, F'^2 + a^{2\varrho}\, \partial_\varrho\, F'^1 - F'^\varrho\, \partial_\varrho\, a^{12})$$

avec $F'^i = -a^{\alpha\beta}\, \Gamma'^{i}_{\alpha\beta}$, expression nulle si les coordonnées sont isothermes (les

$\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma}$ désignent ici les symboles de CHRISTOFFEL construits avec $a_{\alpha\beta}$); on en déduit:

$$R'^{12} = R^{12} - \frac{\Delta\varepsilon^{12}}{2c^4} + \frac{1}{2}(\partial_1 F'^2 + \partial_2 F'^1) + o\left[\frac{1}{c^6}\right],$$

$$F'^1 = -a^{\alpha\beta}\Gamma'^1_{\alpha\beta} = -\frac{\varepsilon^1_{00}}{c^4} + \sum_k \frac{\varepsilon^1_{kk}}{c^4} + o\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

On désigne par $\frac{\varepsilon^{\alpha}_{\beta\gamma}}{c^4}$ la différence $\Gamma'^{\alpha}_{\beta\gamma} - \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma}$ que nous allons calculer:

$$\Gamma'^1_{00} = \frac{a^{1\varrho}}{2}(\partial_\varrho a_{\varrho 0} + \partial_0 a_{0\varrho} - \partial_\varrho a_{00}) = \Gamma^1_{00} + \frac{1}{2c^4}\partial_1 \varepsilon_{00},$$

$$\varepsilon^1_{00} = (1/2)\,\partial_1 \varepsilon_{00},$$

$$\Gamma'^1_{kk} = \Gamma^1_{kk} - \frac{\partial_k \varepsilon_{1k}}{c^4} + \frac{1}{2c^4}\partial_1 \varepsilon_{kk} \qquad \text{(sans sommation en } k),$$

$$\varepsilon^1_{kk} = (1/2)(\partial_1 \varepsilon_{kk} - 2\partial_k \varepsilon_{1k}) \qquad \text{(sans sommation en } k),$$

$$F'^1 = \frac{1}{2c^4}\left[\sum_k (\partial_1 \varepsilon_{kk} - 2\partial_k \varepsilon_{1k} - \partial_1 \varepsilon_{00}\right],$$

$$S'^{12} - S^{12} = \frac{1}{2c^4}\left[\partial_{12}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{00}) - \partial_3(\partial_2 \varepsilon_{13} + \partial_1 \varepsilon_{23} - \partial_3 \varepsilon_{12})\right]. \tag{4.9}$$

Toujours en négligeant les termes d'ordre supérieur à 4, il vient:

$$R' - R = (R'^{00} - R^{00}) - \sum_k (R'^{kk} - R^{kk}),$$

$$S^{22} = R^{22} + \frac{1}{2}R, \qquad R'^{22} = R^{22} - \frac{1}{2}\frac{\Delta\varepsilon^{22}}{c^4} + \partial_2 F'^2,$$

$$S'^{22} - S^{22} = \frac{\Delta}{2c^4}(\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) + \frac{1}{2c^4}\partial_{22}\left(\sum_k \varepsilon_{kk} - \varepsilon_{00}\right) + \tag{4.10}$$

$$+ \frac{1}{2c^4}\sum_{kl}\partial_{kl}\varepsilon_{kl} - \frac{1}{c^4}\sum_k \partial_{k2}\varepsilon_{k2},$$

$$S'^{00} - S^{00} = \frac{1}{2c^4}\sum_k \Delta\varepsilon_{kk} - \frac{1}{2c^4}\sum_{kl}\partial_{kl}\varepsilon_{kl}. \tag{4.11}$$

Il nous reste à calculer:

$$S'^{i0} - S^{i0} \quad \text{à l'ordre 5 en} \quad 1/c\,,$$

$$S^{10} = R^{10} - \frac{1}{2}\, h^{10}\, R = R^{10} + o\left[\frac{1}{c^7}\right],$$

$$S'^{10} = R'^{10} + o\left[\frac{1}{c^7}\right], \qquad S'^{10} - S^{10} = R'^{10} - R^{10} + o\left[\frac{1}{c^7}\right],$$

$$R'^{10} = R^{10} - \frac{1}{2}\,\frac{\Delta\varepsilon^{10}}{c^5} - \frac{1}{2}\,(\partial_0 F'^1 - \partial_1 F'^0)\,,$$

$$F'^0 = -\frac{\varepsilon^0_{00}}{c^5} + \sum_k \frac{\varepsilon^0_{kk}}{c^5}\,, \qquad \Gamma'^{0}_{00} = \frac{a^{0\varrho}}{2}\,(\partial_0\, a_{\varrho 0} + \partial_0\, a_{0\varrho} - \partial_\varrho\, a_{00})\,,$$

$$\frac{\varepsilon^0_{00}}{c^5} = \frac{1}{2}\,\partial_0\,\frac{\varepsilon_{00}}{c^4}\,, \qquad \Gamma'^{0}_{kk} = \Gamma^{0}_{kk} + \frac{\partial_k \varepsilon_{0k}}{c^5} - \frac{1}{2}\,\partial_0\,\frac{\varepsilon_{kk}}{c^4}\,,$$

$$\frac{\varepsilon^0_{kk}}{c^5} = \partial_k\,\frac{\varepsilon_{0k}}{c^5} - \frac{1}{2}\,\partial_0\,\frac{\varepsilon_{kk}}{c^4} \qquad \text{(sans sommation en } k\text{)},$$

$$F'^0 = -\frac{1}{2}\,\partial_0\,\frac{\varepsilon_{00}}{c^4} + \sum_k \left[\frac{\partial_k\,\varepsilon_{0k}}{c^5} - \frac{1}{2c^4}\,\partial_0\,\varepsilon_{kk}\right].$$

D'où l'on tire enfin:

$$S'^{10} - S^{10} = -\frac{1}{2c^5}\,\Delta\varepsilon_{10} - \frac{\sum}{2c^5}\,\partial_{1t}\,\varepsilon_{kk} + \frac{1}{2c^5}\sum_k\,(\partial_{1k}\,\varepsilon_{0k} + \partial_{tk}\,\varepsilon_{1k})\,. \tag{4.12}$$

Nous avons posé:

$$\mathfrak{S}^{*\alpha\beta} - S^{\alpha\beta} = -\chi\, T^{\alpha\beta},$$

et nous avons maintenant:

$$\mathfrak{S}^{*\alpha\beta} - S'^{\alpha\beta} = -\chi T'^{\alpha\beta},$$

$$S'^{\alpha\beta} - S^{\alpha\beta} = \chi\,(T'^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}) = \chi(\tau^{\alpha\beta} - T^{\alpha\beta}).$$

Les équations qui déterminent $a^{\alpha\beta}$, $a_{\alpha\beta}$ sont alors:

$$S'^{12} - S^{12} = \frac{1}{2c^4}\,[\partial_{12}\,(\varepsilon_{33} - \varepsilon_{00}) - \partial_3\,(\partial_2\,\varepsilon_{13} + \partial_1\,\varepsilon_{23} - \partial_3\,\varepsilon_{12})] = 0$$

et deux équations analogues.

$$S'^{22} - S^{22} = \frac{1}{2c^4} \Delta (\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) + \frac{1}{2c^4} \partial_{22} \sum_k (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{00}) +$$

$$+ \frac{1}{2c^4} \sum_{kl} \partial_{kl} \varepsilon_{kl} - \frac{1}{c^4} \sum_k \partial_{k2} \varepsilon_{k2} = 0$$

et deux équations analogues.

$$S'^{00} - S^{00} = \chi (\tau^{00} - T^{00}) = 2\chi \tau_{00},$$

d'où:

$$\frac{1}{2c^4} \sum_k \Delta \varepsilon_{kk} - \frac{1}{2c^4} \sum_{kl} \partial_{kl} \varepsilon_{kl} = \frac{\chi K^2 C^2}{\pi c^2 r^4},$$

$$S'^{10} - S^{10} = \chi (\tau^{10} - T^{10}) = \frac{\chi K^2 C^2}{\pi c^3 r^4} \frac{d\xi^1}{dt},$$

d'où:

$$-\frac{1}{2c^5} \Delta \varepsilon_{10} - \frac{1}{2c^5} \sum_k \partial_{1t} \varepsilon_{kk} + \frac{1}{2c^5} (\sum_k \partial_{1k} \varepsilon_{0k} + \partial_{tk} \varepsilon_{ik}) = \frac{\chi K^2 C^2}{\pi c^2 r^4} \frac{d\xi^1}{dt}.$$

Soit en résumé:

$$\partial_{12} (\varepsilon_{33} - \varepsilon_{00}) - \partial_3 (\partial_2 \varepsilon_{13} + \partial_1 \varepsilon_{23} - \partial_3 \varepsilon_{12}) = 0 , \tag{4.13}$$

$$\partial_{23} (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{00}) - \ldots = 0 , \tag{4.14}$$

$$\partial_{31} (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{00}) - \ldots = 0 , \tag{4.15}$$

$$\sum_k (\Delta \varepsilon_{kk}) - \sum_{kl} \partial_{kl} \varepsilon_{kl} = \frac{2\chi K^2 c^2}{\pi r^4} C^2 , \tag{4.16}$$

$$-\Delta \varepsilon_{10} - \sum_k (\partial_{tk} \varepsilon_{1k} + \partial_{1k} \varepsilon_{0k} - \partial_{1t} \varepsilon_{kk} = \frac{2\chi K^2 c^2}{\pi r^4} C^2 \frac{d\xi^1}{dt}, \tag{4.17}$$

$$-\Delta \varepsilon_{20} - \ldots = \frac{2\chi K^2 c^2}{\pi r^4} C^2 \frac{d\xi^2}{dt} , \tag{4.18}$$

$$-\Delta \varepsilon_{30} - \ldots = \frac{2\chi K^2 c^2}{\pi r^4} C^2 \frac{d\xi^3}{dt} . \tag{4.19}$$

$$(4.20) \qquad \Delta\,(\varepsilon_{00} - \varepsilon_{11} - \varepsilon_{33}) + \partial_{22} \sum_k (\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{00}) + \sum_{kl} \partial_{kl}\, \varepsilon_{kl} - 2 \sum_k \partial_{k2}\, \varepsilon_{2k} = 0\,,$$

$$(4.21) \qquad \Delta\,(\varepsilon_{00} - \varepsilon_{22} - {}_{11}) + \ldots = 0\,,$$

$$(4.22) \qquad \Delta\,(\varepsilon_{00} - \varepsilon_{33} - {}_{22}) + \ldots = 0\,.$$

Nous allons en tirer quelques conséquences:

Additionnons (4.20), (4.21), (4.22), il vient:

$$2\Delta\, \varepsilon_{00} = \Delta \sum_k \varepsilon_{kk} + \sum_{kl} \partial_{kl}\, \varepsilon_{kl} = 0$$

ce qui rapproché de (4.16) donne:

$$\frac{2\chi\, K^2\, c^2\, C^2}{\pi r^4} = 2\Delta\varepsilon_{00}\,,$$

comme nous avons trouvé plus haut:

$$\frac{2\,AC}{r^4} = \frac{\chi\, K^2\, c^2\, C^2}{\pi r^4}\,,$$

$$(4.23) \qquad \Delta\varepsilon_{00} = \frac{2\,AC}{r^4}\,,$$

or:

$$\frac{1}{2}\,\Delta \sum (\beta_1')^2 = -\frac{2\,AC}{r^4} + o\left[\frac{1}{r^6}\right].$$

Donc une solution particulière de (4.23) est:

$$(4.24) \qquad \varepsilon_{00} = -\frac{1}{2} \sum_i (\beta_i')^2 \qquad \operatorname{mod}\ o\left[\frac{1}{r^6}\right].$$

Si on admet que ε_{00} ne dépend que de r nous aurons donc la solution générale:

$$(4.25) \qquad \varepsilon_{00} = -\frac{1}{2} \sum_i (\beta_i')^2 + \frac{\alpha}{r} + \delta \qquad \operatorname{mod}\ o\left[\frac{1}{r^6}\right],$$

α et δ désignant des constantes; on peut faire $\delta = 0$, la constante δ disparaissant dans les calculs d'utilisation de ε_{00}.

1°) Examinons si nous pouvons choisir un tenseur métrique proportionnel à $h^{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$:

$$a_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}\,\mu \qquad (\mu = 1 + \varepsilon\,, \qquad \varepsilon \text{ d'ordre 4 en } 1/c)\,,$$

$$a_{00} = h_{00}\,(1 + \varepsilon), \qquad \varepsilon = \frac{\varepsilon_{00}}{c^4}\,, \qquad a_{ii} = h_{ii}\,(1 + \varepsilon)\,;$$

donc:

$$\frac{\varepsilon_{ii}}{c^4} = -\,\frac{\varepsilon_{00}}{c^4}\,, \qquad a_{ij} = h_{ij}\,(1 + \varepsilon) \text{ avec } i \neq j\,, \qquad \frac{\varepsilon_{ij}}{c^4} = 0\,.$$

(4.16) est satisfaite mais (4.13), (4.14) et (4.15) donneraient $\partial_{12}\,\varepsilon_{00} = 0$ (si $\alpha = 0$), or:

$$\partial_{12}\,\varepsilon_{00} = \frac{8\,AC}{r^6}\,x^1\,x^2 \qquad \operatorname{mod}\, o\left[\frac{1}{c^6}\right];$$

tandis que (4.20), (4.21) et (4.22) donneraient $\Delta\varepsilon_{00} - \partial_{22}\,\varepsilon_{00} = 0$, or cette expression est égale à:

$$\frac{4\,AC}{r^4} - \frac{8\,AC}{r^6}\,(x^2)^2 \qquad (\alpha \neq 0 \text{ donne un accord moins bon encore}).$$

Il semble donc que parmi les métriques proportionnelles à $h_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ donne les résultats les plus proches de ceux de la relativité restreinte.

2°) Cherchons un tenseur métrique proportionnel à $l_{\alpha\beta}$.

$$l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\varrho}\,k_{\beta\sigma}\,h^{\varrho\sigma} \qquad [\text{voir } (1)],$$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_{00}}{c^4} = -\,\frac{1}{2c^4}\sum_i\,(\beta'_i)^2 \qquad (\alpha = 0),$$

avec $a_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta}\,(1 + \varepsilon)$.

La valeur approchée de $\sqrt{\dfrac{g}{l}}$ est précisément égale à $1 - \dfrac{1}{2c^4}\sum_i\,(\beta'_i)^2$, donc le tenseur à utiliser serait $\sqrt{\dfrac{g}{l}}\,l_{\alpha\beta}$, expression déjà préconisée par certains auteurs.

On trouve alors:

$$\frac{\varepsilon_{ij}}{c^4} = -\sum_l \frac{\beta_{il}\,\beta_{jl}}{c^4} \qquad (i \neq j) \qquad \text{soit} \quad \frac{\beta'_i\,\beta'_j}{c^4},$$

$$\frac{\varepsilon_{ii}}{c^4} = \frac{(\beta'_i)^2}{c^4} - \frac{1}{2c^4}\sum_k (\beta'_k)^2,$$

(4.13) donnerait:

$$\partial_{12}\,\varepsilon_{33} = \frac{16\,AC}{r^6}\,x^1\,x^2 - \frac{2\,C^2}{r^4}\,x^1\,x^2 - \left[\frac{-8\,C^2}{r^6} + \frac{48\,AC}{r^8}\right](x^3)^2\,x^1\,x^2,$$

or comme:

$$\varepsilon_{33} = (\beta'_3)^2 - \frac{1}{2}\sum_k (\beta'_k)^2,$$

$$\partial_{12}\,\varepsilon_{33} = \frac{8\,AC}{r^6}\,x^1\,x^2 - \frac{48\,AC}{r^8}\,x^1\,x^2\,(x^3)^2 + \frac{8\,C^2}{r^6}\,x^1\,x^2\,(x^3)^2.$$

On voit que les termes trouvés dans les deux cas pour $\partial_{12}\,\varepsilon_{33}$ diffèrent cette fois par des termes d'ordre 2 en $\frac{1}{r}$, ce qui fait que le tenseur $\sqrt{\frac{g}{l}}\,l_{\alpha\beta}$ ne saurait convenir pour retrouver les résultats de la relativité restreinte en adoptant notre point de vue et même en prenant (4.25) au lieu de (4.24) pour ε_{00}.

3°) Prenons maintenant $\gamma_{\alpha\beta} = \frac{g}{2h + 2k - g}\,(2h_{\alpha\beta} - l_{\alpha\beta})$, avec

$$\frac{g}{2h + 2k - g} = 1 + \frac{2}{c^4}\sum_i (\beta'_i)^2 + o\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

Si $a_{\alpha\beta} = \gamma_{\alpha\beta}\,(1 + \varepsilon)$ comme $h_{00} = l_{00} + o\left[\frac{1}{c^6}\right]$ l'on conclut que $(1 + \varepsilon) = 1 - \frac{5}{2c^4}\sum_i (\beta'_i)^2$ en vertu de la valeur de ε_{00} tirée de (4.24), alors:

$$\varepsilon_{ij} = -\beta'_i\,\beta'_j \qquad \text{car} \qquad \underset{(4)}{l_{ij}} = \underset{(4)}{h_{ij}} - \sum_l \beta_{il}\,\beta_{jl},$$

$$\varepsilon_{ii} = \sum_k \frac{3}{2}\,(\beta'_k)^2 - (\beta'_i)^2.$$

(4.13) s'écrit alors:

$$\partial_{12}\,[2\sum_i (\beta'_i)^2 - (\beta'_3)^2] =$$

$$= \frac{2\,C^2}{r^4}\,x^1\,x^2 - \frac{8\,AC}{r^6}\,x^1\,x^2 + \left[\frac{48\,AC}{r^8} - \frac{8\,C^2}{r^6}\right] x^1\,x^2\,(x^3)^2 + o\left[\frac{1}{r^6}\right],$$

$$2\,\partial_{12}\sum_i (\beta'_i)^2 = \frac{-\,32\,AC}{r^6}\,x^1\,x^2 + o\left[\frac{1}{r^6}\right],$$

$$\partial_{12}\,(\beta'_3)^2 = -\,\frac{48\,AC}{r^8}\,x^1\,x^2\,(x^3)^2 + \frac{8\,C^2}{r^6}\,x^1\,x^2\,(x^3)^2 + o\left[\frac{1}{r^6}\right].$$

Par différence il vient:

$$-\,\frac{32\,AC}{r^6}\,x^1\,x^2 + \frac{48\,AC}{r^8}\,x^1\,x^2\,(x^3)^2 - \frac{8\,C^2}{r^6}\,x^1\,x^2\,(x^3)^2\,,$$

ce qui fait que (4.13) se ramème à:

$$\frac{2\,C^2}{r^4}\,x^1\,x^2 + \frac{24\,AC}{r^6}\,x^1\,x^2 = 0\,,$$

condition qui n'est pas satisfaite et met en jeu un terme d'ordre 2 en $1/r$.

Donc un tenseur proportionnel à $\gamma_{\alpha\beta}$ ne saurait convenir pour construire le tenseur d'impulsion-énergie électromagnétique.

4°) Cherchons une solution particulière du système (4.13) à (4.22).
Supposons

$$\varepsilon_{ij} = 0 \qquad (i \neq j)\,, \qquad \varepsilon_{ii} = \varepsilon_{00}\,,$$

alors (4.13), (4.14) et (4.15) sont trivialement satisfaites. (4.16) se reduit à

$$\Delta\,\varepsilon_{00} = \frac{\chi\,K^2\,c^2\,C^2}{\pi r^4}$$

et nous retrouvons:

$$\varepsilon_{00} = -\,\frac{1}{2}\sum_i (\beta'_i)^2$$

comme solution particulière.

(4.20), (4.21) et (4.22) sont aussi trivialement satisfaites et il reste à déterminer ε_{i0} par l'équation:

$$-\Delta\varepsilon_{i0} + \sum_k \partial_{ik}\,\varepsilon_{0k} = \frac{2\chi\,K^2\,c^2\,C^2}{\pi r^4}\,\frac{d\xi^i}{dt} + \sum_k (\partial_{it}\,\varepsilon_{kk} - \partial_{tk}\,\varepsilon_{ik}) =$$

$$= \frac{8\,AC}{r^4}\,\frac{d\xi^i}{dt} - \frac{16\,AC}{r^6}\,x^i\,x^k\,\frac{d\xi^k}{dt},$$

où l'on néglige les termes d'ordre supérieur à 4 en $1/r$.

Une solution particulière de cette équation est:

$$\varepsilon_{i0} = -\frac{2A\,C}{r^2}\,\frac{d\xi^i}{dt} \qquad \text{ou encore} \qquad \varepsilon_{i0} = \sum_k (\beta'_i)^2\,\frac{d\xi^i}{dt}.$$

Donc la métrique:

$$a_{00} = h_{00} - \frac{1}{2c^4}\sum_k (\beta'_k)^2 = l_{00}\sqrt{\frac{g}{l}} + o\left[\frac{1}{c^5}\right],$$

$$a_{ij} = h_{ij} - \frac{1}{2c^4}\,\delta_{ij}\sum_k (\beta'_k)^2, \qquad a_{0i} = h_{0i} + \frac{1}{c^5}\sum_k (\beta'_k)^2\,\frac{d\xi^i}{dt}$$

permet de retrouver un tenseur d'impulsion-énergie identique à celui de la relativité restreinte si on néglige les termes d'ordre supérieur à 4 en $1/r$.

Conclusion.

Au terme de cette étude, et en adoptant le point de vue qui est le nôtre sur la construction d'un tenseur impulsion-énergie, il apparaît impossible de trouver une métrique proportionnelle à $\gamma_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$ ou $l_{\alpha\beta}$ qui redonne exactement le tenseur impulsion énergie de la relativité restreinte. Comme on n'a aucune raison de considérer comme seule valable l'expression du tenseur-énergie de la relativité restreinte, il semble logique de choisir la métrique donnant les résultats qui s'en rapprochent le plus, compte tenu de l'ordre en $1/r$.

La métrique $h_{\alpha\beta}$ répond le mieux à ces exigences.

Notons aussi que le point de vue corpusculaire adopté ici n'est pas celui où l'on se place dans l'étude du problème de Cauchy. Nous négligeons les termes d'ordre élevé en $1/r$, termes qui deviendraient prépondérants au voisinages de masses réparties de façon continue.

Deuxième partie

TRADUCTION DANS UN NOUVEAU FORMALISME DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER ET APPLICATION À UNE THÉORIE UNITAIRE ÉLARGIE.

I. – Preliminaires.

Les derivations (+) et (—).

Sur une variété différentiable de coordonnées (x^α) considérons une connexion linéaire de coefficients $\mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma}$.

Si la connexion est symétrique $\mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma} = \mathfrak{L}^\alpha_{\gamma\beta}$, le déplacement parallèle d'un vecteur ($\mathfrak{V}^\alpha$) est défini sans ambiguité par la relation:

$$\delta \mathfrak{V}^\alpha = - \mathfrak{L}^\alpha_{\sigma\varrho} \mathfrak{V}^\sigma \, dx^\varrho$$

(cf. [24], pages 17-18).

Si la connexion est quelconque on peut définir le déplacement parallèle par l'une ou l'autre des relations:

$$\underset{(+)}{\delta} \mathfrak{V}^\alpha = - \mathfrak{L}^\alpha_{\sigma\varrho} \mathfrak{V}^\sigma \, dx^\varrho,$$

$$\underset{(-)}{\delta} \mathfrak{V}^\alpha = - \mathfrak{L}^\alpha_{\varrho\sigma} \mathfrak{V}^\sigma \, dx^\varrho$$

qui conservent l'une et l'autre le caractère tensoriel de

$$\partial_\varrho \mathfrak{V}^\alpha + \mathfrak{L}^\alpha_{\sigma\varrho} \mathfrak{V}^\sigma,$$

ce qui conduit à deux sortes de dérivations covariantes:

$$\underset{(+)}{D_\varrho} \mathfrak{V}^\alpha = \partial_\varrho \mathfrak{V}^\alpha + \mathfrak{L}^\alpha_{\sigma\varrho} \mathfrak{V}^\sigma, \qquad \underset{(+)}{D_\varrho} \mathfrak{V}_\alpha = \partial_\varrho \mathfrak{V}_\alpha - \mathfrak{L}^\sigma_{\alpha\varrho} \mathfrak{V}_\sigma,$$

$$\underset{(-)}{D_\varrho} \mathfrak{V}^\alpha = \partial_\varrho \mathfrak{V}^\alpha + \mathfrak{L}^\alpha_{\varrho\sigma} \mathfrak{V}^\sigma, \qquad \underset{(-)}{D_\varrho} \mathfrak{V}_\alpha = \partial_\varrho \mathfrak{V}_\alpha - \mathfrak{L}^\sigma_{\varrho\alpha} \mathfrak{V}_\sigma,$$

puis à poser pour un tenseur de second ordre $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$:

$$\underset{(+-)}{D_\varrho}\, \mathcal{G}_{\alpha\beta} = \partial_\varrho \mathcal{G}_{\alpha\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\alpha\varrho} \mathcal{G}_{\sigma\beta} - \mathcal{L}^{\sigma}_{\varrho\beta} \mathcal{G}_{\alpha\sigma} .$$

Si dét $|\mathcal{G}_{\alpha\beta}| = g$ et si $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$ désigne le mineur normalisé de $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ on est conduit à poser, par convention,

$$\underset{(+-)}{D_\varrho} \sqrt{|g|} = \partial_\varrho \sqrt{|g|} - \sqrt{|g|}\ \mathcal{L}^{\sigma}_{(\sigma\varrho)} .$$

La définition du tenseur de courbure peut se donner à partir de la connexion $\mathcal{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ ou de la connexion transposée $\mathcal{L}^{\alpha}_{\gamma\beta}$; il existera donc deux sortes de tenseurs susceptibles de généraliser le tenseur de RIEMANN-CHRISTOFFEL, donc par contraction deux tenseurs susceptibles de géneraliser le tenseur de RICCI.

On sait que dans la théorie unitaire d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER on est conduit au système $\underset{(+-)}{D_\varrho} \mathcal{G}_{\alpha\beta} = 0$ qui généralise d'une certaine manière le théorème de RICCI; mais le tenseur $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ n'est pas symétrique, on ne peut à l'aide de ce tenseur élever et abaisser les indices comme on le fait en géométrie riemannienne, le théorème de RICCI n'étant plus valable on ne peut permuter les opérations de dérivation covariante avec la multiplication contractée par $\mathcal{G}^{\alpha\beta}$, enfin les identités de RICCI et de BIANCHI ne sont pas d'un maniement aussi souple ce qui complique l'obtention des identités de conservation.

Nous nous proposons de plonger la variété W_4 de coordonnées (X^α) dans une variété à huit dimensions V_8 de coordonnées (x^α), (x^{α^*}), α et $\alpha^* = 1, 2, 3, 4$, et W_4 correspondant à $x^{\alpha^*} = 0$, de manière:

1°) à n'utiliser qu'une sorte de dérivation covariante, la dérivation notée $(+)$;

2°) cette dérivation se fera relativement à une connexion

$$\pi^{\alpha}_{\beta}, \qquad \pi^{\alpha^*}_{\beta^*}, \qquad \pi^{\alpha}_{\beta^*}, \qquad \pi^{\alpha^*}_{\beta}$$

(α et β, et tout indice grec $= 1, 2, 3, 4$) attachée à des repères de V_8;

3°) on identifiera sur W_4 le tenseur $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ à certaines composantes d'un tenseur g_{ij} tel que $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0$ et

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha} ;$$

4°) pour tout chemin de W_4 on a

$$\nabla g_{\alpha\beta^*} = 0 , \tag{1}$$

c'est-à-dire que la restriction à W_4 de la connexion π^i_j $(i, j = 1, 2, ..., 8)$ sera euclidienne (à la signature près du tenseur $g_{\alpha\beta^*}$);

5°) les identités de conservation se déduiront des identités de BIANCHI.

Nous constaterons alors que, comme dans la plupart des problèmes de prolongement, nous allons au-delà du but que nous nous étions proposé: notre formalisme redonne la théorie unitaire ordinaire comme cas particulier, mais plus riche que le formalisme habituel, il permet d'élargir la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER par l'introduction de nouvelles variables de champ et de nouvelles équations.

Développons quelques conséquences des 3° et 4°, nous voulons poser:

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta^*} \qquad \text{en tout point de } W_4$$

et indépendamment du repère choisi, comme:

$$\mathcal{G}_{\alpha'\beta'} = A^\lambda_{\alpha'} A^\mu_{\beta'} \mathcal{G}_{\lambda\mu}, \qquad A^\lambda_{\alpha'} = \left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\alpha'}}\right]_{x^{\alpha^*}=0}$$

$$g_{\alpha'\beta^{*\prime}} = A^\lambda_{\alpha'} A^{\mu^*}_{\beta^{*\prime}} g_{\lambda\mu^*} \qquad \text{puisque} \qquad g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0\,,$$

donc:

$$A^\alpha_{\beta'} = A^{\alpha^*}_{\beta^{*\prime}} \qquad \text{sur } W_4\,,$$

de plus

$$g_{\alpha'\beta'} = (A^\lambda_{\alpha'} A^{\mu^*}_{\beta'} + A^{\mu^*}_{\alpha'} A^\lambda_{\beta'})\, g_{\lambda\mu^*} = 0$$

pour une infinité de valeurs des $g_{\lambda\mu^*}$; donc

$$A^\lambda_{\alpha'} A^{\mu^*}_{\beta'} + A^{\mu^*}_{\alpha'} A^\lambda_{\beta'} = 0\,, \qquad A^\lambda_{\alpha'} A^{\mu^*}_{\alpha'} = 0\,, \qquad A^{\mu^*}_{\alpha'} = 0\,.$$

Nécessairement la matrice jacobienne du changement de coordonnées sera telle que, sur W_4,

$$A^i_{j'} = A^{i^*}_{j^{*\prime}}, \qquad A^{\alpha^*}_{\beta'} = 0 \qquad (i^* = i \pm 4)\,.$$

Cela nous conduira naturellement à étudier les changements de variables de la forme $x^{i'} = \varphi^{i'}(x^j)$ avec

$$A^i_{j'} = A^{i^*}_{j^{*\prime}} \qquad \left[\frac{\partial x^i}{\partial x^{j'}} = \partial_{j'}\, x^i = A^i_{j'}\right].$$

Par ailleurs nous chercherons à écrire $\underset{(+-)}{D_\varrho} \mathfrak{G}_{\alpha\beta}$ sous la forme $\nabla_\varrho\, g_{\alpha\beta^*}$, dès lors posant

$$\mathfrak{L}^\alpha_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\beta\gamma} \qquad\qquad (\pi^\alpha_\beta = L^\alpha_{\beta i}\, dx^i)$$

il viendra nécéssairement:

(2) $$L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma} = L^\alpha_{\gamma\beta}.$$

La variété fondamentale V_8 et la sous-variété fondamentale W_4.

Dans ce qui suit les conditions de continuité et de dérivabilité seront toujours supposées satisfaites.

Considérons une variété différentiable V_8 de coordonnées réelles (x^α, x^{α^*}) et cherchons s'il existe des changements de coordonnées de la forme

$$x^{i'} = \varphi^{i'}(x^j) \quad \text{tels que} \quad A^i_{j'} = A^{i^*}_{j^{*\prime}} \quad \text{sur} \quad V_8$$

avec dét $|A^i_{j'}| \neq 0$, ou ce qui reviendra au même:

$$A^{i'}_j = A^{i^{*\prime}}_{j^*}, \qquad \text{dét}\ |A^{i'}_j| \neq 0\,.$$

Pour résoudre ce problème nous poserons:

$$x^\alpha = \frac{z^\alpha + z^{\alpha^*}}{\sqrt{2}}, \qquad x^{\alpha^*} = \frac{z^\alpha - z^{\alpha^*}}{\sqrt{2}},$$

$$z^\alpha = \frac{x^\alpha + x^{\alpha^*}}{\sqrt{2}}, \qquad z^{\alpha^*} = \frac{x^\alpha - x^{\alpha^*}}{\sqrt{2}}.$$

La notation $\partial_\alpha\ \partial_{\alpha^*}$ sera toujours réservée aux coordonnées (x^α, x^{α^*}).
Un calcul facile montre que:

$$A^{\beta'}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\alpha} + \frac{\partial z^{\beta^{*\prime}}}{\partial z^{\alpha^*}}\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^{\alpha^*}} + \frac{\partial z^{\beta^{*\prime}}}{\partial z^\alpha}\right],$$

$$A^{\beta^{*\prime}}_{\alpha^*} = \frac{1}{2}\left[\quad \text{id.} \quad\right] - \frac{1}{2}\left[\quad \text{id.} \quad\right],$$

$$A^{\beta'}_{\alpha^*} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^\alpha} - \frac{\partial z^{\beta^{*\prime}}}{\partial z^{\alpha^*}}\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^{\alpha^*}} - \frac{\partial z^{\beta^{*\prime}}}{\partial z^\alpha}\right],$$

$$A^{\beta^{*\prime}}_\alpha = \frac{1}{2}\left[\quad \text{id.} \quad\right] + \frac{1}{2}\left[\quad \text{id.} \quad\right],$$

ce qui entraîne nécessairement, compte tenu de $A_j^{i'} = A_{j^*}^{i^*\prime}$,

$$\frac{\partial z^{\alpha'}}{\partial z^{\beta^*}} = \frac{\partial z^{\alpha^*\prime}}{\partial z^{\beta}} = 0$$

et nous conduit à

$$z^{\alpha'} = f^{\alpha'}(z^{\lambda}), \qquad z^{\alpha^*\prime} = f^{\alpha^*\prime}(z^{\lambda^*}).$$

Mais comme sur W_4 ($x^{\alpha^*} = 0$ ou $z^{\alpha} = z^{\alpha^*}$) nous exigeons que $A_{\beta}^{\alpha^*\prime} = A_{\beta^*}^{\alpha'} = 0$ nécessairement $f^{\alpha'}$ et $f^{\alpha^*\prime}$ sont le même application (à une constante près) ce qui fait que nous poserons:

$$z^{\alpha'} = f^{\alpha'}(z^{\lambda}), \qquad z^{\lambda^*\prime} = f^{\lambda'}(z^{\lambda^*})$$

avec dét $\left| \frac{\partial f^{\lambda'}}{\partial z^{\lambda}} \right| \neq 0$ pour assurer la régularité du changement de variables.

Ainsi la variété V_8 apparait comm variété produit de deux variétés ordonnées identiques V_4 et V_4^*, le changement de coordonnées naturelles (z^{α}, z^{α^*}) conservant les variétés facteurs. La variété W_4 est telle que $z^{\alpha} = z^{\alpha^*}$ ou ce qui revient au même $x^{\alpha^*} = 0$: c'est la variété diagonale du produit $V_4 \times V_4^*$. Nous dirons que les (z^{α}, z^{α^*}) sont les coordonnées « produit » et que les (x^{α}, x^{α^*}) sont les coordonnées « diagonales » associées.

Ainsi (sur V_8):

$$A_{\beta}^{\alpha'} = A_{\beta^*}^{\alpha^*\prime} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f^{\alpha'}}{\partial z^{\beta}} + \frac{\partial f^{\alpha^*\prime}}{\partial z^{\beta^*}}\right], \tag{3}$$

$$A_{\beta}^{\alpha^*\prime} = A_{\beta^*}^{\alpha'} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial f^{\alpha'}}{\partial z^{\beta}} - \frac{\partial f^{\alpha^*\prime}}{\partial z^{\beta^*}}\right]; \tag{4}$$

le même calcul montre ensuite que:

$$\partial_{\lambda} A_{\mu}^{\alpha'} = \partial_{\lambda} A_{\mu^*}^{\alpha^*\prime} = \partial_{\lambda^*} A_{\mu^*}^{\alpha'} = \partial_{\lambda^*} A_{\mu}^{\alpha^*\prime},$$

$$\partial_{\lambda} A_{\mu}^{\alpha^*\prime} = \partial_{\lambda} A_{\mu^*}^{\alpha'} = \partial_{\lambda^*} A_{\mu^*}^{\alpha^*\prime} = \partial_{\lambda^*} A_{\mu}^{\alpha'}.$$

Sur W_4:

$$A_{\lambda}^{\alpha'} = A_{\lambda^*}^{\alpha^*\prime} = \frac{\partial f^{\alpha'}}{\partial z^{\lambda}} \neq 0, \qquad A_{\lambda}^{\alpha^*\prime} = A_{\lambda^*}^{\alpha'} = 0,$$

$$\partial_{\lambda} A_{\mu}^{\alpha^*\prime} = \partial_{\lambda^*} A_{\mu^*}^{\alpha^*\prime} = 0, \qquad \partial_{\lambda} A_{\mu}^{\alpha'} = \partial_{\lambda^*} A_{\mu^*}^{\alpha'} \neq 0.$$

(Un nombre impair d'astérisques correspond à un coefficient nul.)

Sur W_4 le type d'un tenseur (lié au nombre d'indices covariants ou contravariants et au nombre d'astérisques) se conserve par changement de coordonnées diagonales comme on le voit immédiatement.

Remarques: 1°) Pour construire la variété V_8 et chercher les changements de variables susceptibles de convenir aux identifications faites sur W_4 nous avons remarqué que sur W_4 il fallait:

$$A_j^{i'} = A_{j^*}^{i^{*'}}, \qquad A_{\beta^*}^{\alpha'} = A_{\beta}^{\alpha^{*'}} = 0 .$$

Ce qui nous a conduit à étudier sur V_8 les changements de coordonnées tels que

$$A_j^{i'} = A_{j^*}^{i^{*'}}.$$

On pourrait aussi chercher les changements de coordonnées de V_8 tels que

$$A_{\beta^*}^{\alpha'} = A_{\beta}^{\alpha^{*'}} = 0 ,$$

mais on voit alors facilement que l'identification intrinsèque sur W_4 de $\mathfrak{L}_{\beta\gamma}^{\alpha}$ et de $L_{\gamma^*\beta}^{\alpha^*}$ est impossible, ce dernier coefficient se transformant alors sur W_4 de manière tensorielle.

2°) On peut remarquer que les changements de coordonnées trouvés sont ceux qui permettent de définir des champs de vecteurs tels que relativement aux repères diagonaux naturels il soit possible d'avoir à volonté et intrinsèquement:

$$\text{soit} \quad V^{\alpha} = V^{\alpha^*}, \qquad \text{soit} \quad V^{\alpha} = - V^{\alpha^*} \qquad (\text{sur } V_8) ,$$

$$\text{soit} \quad V^{\alpha^*} = 0 \quad (\text{sur } W_4);$$

$$V^{\lambda'} = + V^{\lambda^{*'}} \quad \text{entraîne} \quad A_{\alpha}^{\lambda'} + A_{\alpha^*}^{\lambda'} = A_{\alpha^*}^{\lambda^{*'}} + A_{\alpha}^{\lambda^{*'}}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial z^{\lambda^{*'}}}{\partial z^{\alpha}} = 0;$$

$$V^{\lambda'} = - V^{\lambda^{*'}} \quad \text{entraîne} \quad A_{\alpha}^{\lambda'} - A_{\alpha^*}^{\lambda'} = A_{\alpha^*}^{\lambda^{*'}} - A_{\alpha}^{\lambda^{*'}}$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial z^{\lambda'}}{\partial z^{\alpha^*}} = 0;$$

$$V^{\lambda^{*'}} = 0 \text{ sur } W_4 \quad \text{entraîne} \quad A_{\alpha}^{\lambda^{*'}} = 0 \text{ sur } W_4$$

$$\text{ou} \quad \frac{\partial z^{\beta'}}{\partial z^{\alpha}} = \frac{\partial z^{\beta^{*'}}}{\partial z^{\alpha^*}} \quad \text{si} \quad z^{\alpha} = z^{\alpha^*}.$$

Ce sont bien les résultats trouvés plus haut, les réciproques sont évidentes.

Notons que l'égalité $V^{\alpha^*} = \lambda V^{\alpha}$ n'est intrinsèque que pour $\lambda = \pm 1$:

$$\lambda V^{\sigma'} = V^{\sigma^{*\prime}}$$

s'écrit, en effet,

$$\lambda (A_\alpha^{\sigma'} V^\alpha + A_{\alpha^*}^{\sigma'} V^{\alpha^*}) = A_\alpha^{\sigma^{*\prime}} V^\alpha + A_{\alpha^*}^{\sigma^{*\prime}} V^{\alpha^*}$$

et donne

$$\lambda (A_\alpha^{\sigma'} + \lambda A_{\alpha^*}^{\sigma'}) = (A_\alpha^{\sigma^{*\prime}} + \lambda A_{\alpha^*}^{\sigma^{*\prime}}) ,$$

$$\lambda^2 = 1 .$$

Plus généralement T et Θ désignant deux tenseurs de V_8, relativement aux repères diagonaux naturels, des égalités de la forme:

$$T_{ij}{}^k = \pm T_{i^* j^*}{}^{k^*} \qquad \text{ou} \qquad T_{ij}{}^k = \lambda \, \Theta_{i^* j^*}{}^{k^*}$$

sont intrinsèques sur V_8, tandis que des égalités de la forme $T_{\alpha\beta^*}{}^\gamma = 0$ sont intrinsèques sur V_4.

3⁰) On peut définir des repères « produit » et diagonaux quelconques. Posons:

$$\theta_z^{\alpha'} = \mathcal{A}_\lambda^{\alpha'} \, dz^\lambda, \qquad \theta_z^{\alpha^{*\prime}} = \mathcal{A}_{\lambda^*}^{\alpha^{*\prime}} \, dz^{\lambda^*},$$

(la correspondance étant régulière).

Puis:

$$\theta_x^{\alpha'} = \frac{\theta_z^{\alpha'} + \theta_z^{\alpha^{*\prime}}}{\sqrt{2}} , \qquad \theta_x^{\alpha^{*\prime}} = \frac{\theta_z^{\alpha'} - \theta_z^{\alpha^{*\prime}}}{\sqrt{2}} ,$$

ce qui définit les corepères associés.

On passera d'un repère produit à tout autre par des matrices régulières de la forme $\begin{vmatrix} \mathcal{A} & 0 \\ 0 & \mathcal{A}^* \end{vmatrix}$ et d'un repère diagonal à tout autre par des matrices de la forme

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{A}^* & \mathcal{A} - \mathcal{A}^* \\ \mathcal{A} - \mathcal{A}^* & \mathcal{A} + \mathcal{A}^* \end{vmatrix} .$$

II. – Les connexions sur l'espace fibré des repères de V_8.

La variété V_8 peut se rapporter à des repères autres que les repères diagonaux, considérons d'abord les connexions (π) sur l'espace fibré des repères quelconques de V_8: les matrices de connexion sont de la forme:

$$\begin{vmatrix} \pi^{\alpha}_{\beta} & \pi^{\alpha}_{\beta^*} \\ \pi^{\alpha^*}_{\beta} & \pi^{\alpha^*}_{\beta^*} \end{vmatrix}$$

où les π^i_j sont des formes de Pfaff.

On peut rapporter les coefficients π^i_j aux *repères diagonaux, c'est ce que nous ferons toujours par la suite* (sauf avis contraire).

Dans l'ensemble des connexions (π) on peut distinguer certaines catégories importantes.

Les repères diagonaux se déduisent l'un de l'autre par des matrices de la forme:

$$\begin{vmatrix} A^{\alpha}_{\beta} & B^{\alpha}_{\beta^*} \\ B^{\alpha^*}_{\beta} & A^{\alpha^*}_{\beta^*} \end{vmatrix} \qquad \text{avec} \qquad \begin{aligned} A^{\alpha}_{\beta} &= A^{\alpha^*}_{\beta^*} \\ B^{\alpha}_{\beta^*} &= B^{\alpha^*}_{\beta} . \end{aligned}$$

Ces matrices sont régulières car la correspondance entre $(\theta^{\alpha}_z , \theta^{\alpha^*}_z)$ et $(\theta^{\alpha'}_z \ \theta^{\alpha^{*\prime}}_z)$ étant localement biunivoque, il en est de même de la correspondance entre $(\theta^{\alpha}_x , \theta^{\alpha^*}_x)$ et $(\theta^{\alpha'}_x , \theta^{\alpha^{*\prime}}_x)$,

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} AA' + BB' & AB' + BA' \\ AB' + BA' & AA' + BB' \end{vmatrix} .$$

Enfin ces matrices sont inversibles et la matrice inverse est de la même forme.

Donc l'ensemble des matrices $\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$ forme un sous-groupe du groupe linéaire à 8 variables réelles; une connexion (π_1) sur l'espace fibré des repères diagonaux de V_8 est donc telle que

$$\pi^{\alpha}_{\beta} = \pi^{\alpha^*}_{\beta^*} , \qquad \pi^{\alpha}_{\beta^*} = \pi^{\alpha^*}_{\beta} .$$

Nous poserons $\pi^i_j = L^i_{jk}\, dx^k$ en repères diagonaux naturels.

Considérons alors les connexions (π_2) telles que

(5) $$L^r_{st} = L^r_{s^* t^*} .$$

Cette condition est bien intrinsèque dans tout changement de repère naturel diagonal, en effet:

$$L^{r'}_{t'k'} = A^{r'}_j A^l_{t'} A^i_{k'} L^j_{li} + A^{r'}_s \partial_{k'} A^s_{t'} ,$$

$$L^{r'}_{t^{*\prime}k^{*\prime}} = A^{r'}_j A^{l^*}_{t^{*\prime}} A^{i^*}_{k^{*\prime}} L^j_{l^* i^*} + A^{r'}_s \partial_{k^{*\prime}} A^s_{t^{*\prime}}$$

et nous avons:

$$A^{i^*}_{j^{*\prime}} = A^i_{j'} ,$$

$$\partial_{k^{*\prime}} A^s_{t^{*\prime}} = \partial_{k'} A^s_{t'} .$$

Enfin les connexions (π_3) telles que:

(6) $$L^r_{st} = L^{r^*}_{t^* s}$$

en repères diagonaux naturels. L'ensemble (π_3) est contenu dans (π_2), en effet comme $L^r_{st} = L^{r^*}_{t^* s}$ quels que soient les indices, on a $L^{r^*}_{t^* s} = L^r_{s^* t^*}$.

Cette condition est bien intrinsèque, en effet:

$$L^{r^{*\prime}}_{k^{*\prime}t'} = A^{r^{*\prime}}_{j^*} A^l_{t'} A^{i^*}_{k^{*\prime}} L^{j^*}_{i^* l} + A^{r^{*\prime}}_{s^*} \partial_{t'} A^{s^*}_{k^{*\prime}} \qquad \text{et} \qquad \partial_{k'} A^s_{t'} = \partial_{t'} A^s_{k'} = \partial_{t'} A^{s^*}_{k^{*\prime}} .$$

L'ensemble (π_3) jouera un rôle fondamental dans la suite, les connexions appartenant à (π_3) sont telles que:

$$L^r_{st} = L^{r^*}_{t^* s} ,$$

c'est-à-dire

(7) $$L^\alpha_{\beta\gamma} = L^{\alpha^*}_{\gamma^*\beta} = L^\alpha_{\beta^*\gamma^*} = L^{\alpha^*}_{\gamma\beta^*},$$

(8) $$L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = L^\alpha_{\gamma^*\beta} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*} = L^\alpha_{\gamma\beta^*} .$$

Nous noterons que sur W_4: les coefficients à nombre pair d'astérisques se transforment d'une manière connective, tandis que les autres se transforment de manière tensorielle dans tout changement de repère diagonal naturel.

On pourra donc poser en repères diagonaux naturels sur W_4:

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha^*}_{\gamma^*\beta} = L^{\alpha}_{\beta^*\gamma^*} = L^{\alpha^*}_{\gamma\beta^*} = \mathfrak{L}^{\alpha}_{\beta\gamma} ,$$

$$L^{\alpha^*}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{\gamma^*\beta} = L^{\alpha^*}_{\beta^*\gamma^*} = L^{\alpha}_{\gamma\beta^*} = \Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} .$$

$\mathfrak{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$, $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ désignant respectivement sur W_4 une connexion et un tenseur. Réciproquement à toute connexion $\mathfrak{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et tout tenseur $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$ de W_4 on pourra associer une infinité de connexions (π_3) de V_8 dont la restriction à W_4 est définie par les formules précédentes.

III. – Transport des vecteurs à composantes égales. L'operateur Δ.

Relativement à la connexion (π_3) et sur V_8 envisageons le transport des vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ tels que

$$V^{\alpha} = W^{\alpha^*} ,$$

$$V^{\alpha^*} = W^{\alpha}$$

(nous avons vu plus haut qu'en un point de V_8 de telles relations sont indépendantes du repère diagonal choisi):

$$\begin{cases} \nabla_{\varrho} V^{\alpha} = \partial_{\varrho} V^{\alpha} + L^{\alpha}_{\sigma\varrho} V^{\sigma} + L^{\alpha}_{\sigma^*\varrho} V^{\sigma^*} = \partial_{\varrho} W^{\alpha^*} + L^{\alpha^*}_{\varrho\sigma^*} W^{\sigma^*} + L^{\alpha^*}_{\varrho\sigma} W^{\sigma} \\ \nabla_{\varrho^*} V^{\alpha} = \partial_{\varrho^*} V^{\alpha} + L^{\alpha}_{\sigma\varrho^*} V^{\sigma} + L^{\alpha}_{\sigma^*\varrho^*} V^{\sigma^*} = \partial_{\varrho^*} W^{\alpha^*} + L^{\alpha^*}_{\varrho^*\sigma^*} W^{\sigma^*} + L^{\alpha^*}_{\varrho^*\sigma} W^{\sigma}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \nabla_{\varrho} V^{\alpha^*} = \partial_{\varrho} V^{\alpha^*} + L^{\alpha^*}_{\sigma\varrho} V^{\sigma} + L^{\alpha^*}_{\sigma^*\varrho} V^{\sigma^*} = \partial_{\varrho} W^{\alpha} + L^{\alpha}_{\varrho\sigma^*} W^{\sigma^*} + L^{\alpha}_{\varrho\sigma} W \\ \nabla_{\varrho^*} V^{\alpha^*} = \partial_{\varrho^*} V^{\alpha^*} + L^{\alpha^*}_{\sigma\varrho^*} V^{\sigma} + L^{\alpha^*}_{\sigma^*\varrho^*} V^{\sigma^*} = \partial_{\varrho^*} W^{\alpha} + L^{\alpha}_{\varrho^*\sigma^*} W^{\sigma^*} + L^{\alpha}_{\varrho^*\sigma} W^{\sigma} , \end{cases}$$

le déplacement parallèle de $(V^{\alpha}, V^{\alpha^*})$ relativement à la connexion L^i_{jk} équivaut au déplacement parallèle de $(W^{\alpha}, W^{\alpha^*})$ relativement à la connexion $\widetilde{L}^i_{jk} = L^i_{kj}$.

En particulier plaçons-nous en un point de W_4 et considérons les vecteurs $\vec{V}$ et $\vec{W}$ tangents à V_8:

$$\vec{V} \text{ de composantes } (V,^{\alpha}\ 0) ,$$

$$\vec{W} \text{ de composantes } (0,\ W^{\alpha^*} = V^{\alpha}).$$

Pour un chemin de W_4:

$$\nabla_\varrho V^\alpha = \partial_\varrho V^\alpha + L^\alpha_{\sigma\varrho} V^\sigma = \partial_\varrho W^{\alpha^*} + L^{\alpha^*}_{\varrho\sigma^*} W^{\sigma^*},$$
$$\nabla_\varrho V^{\alpha^*} = L^{\alpha^*}_{\sigma\varrho} V^\sigma = L^\alpha_{\varrho\sigma^*} W^{\sigma^*}.$$

Il est commode pour traduire ces résultats deconsidérer que l'on passe de $\vec{V}$ à $\vec{W}$ au moyen d'un opérateur linéaire $\varDelta$. Posons en effet:

$$\varDelta^{\alpha^*}_\lambda = \varDelta^\alpha_{\lambda^*} = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad \alpha \neq \lambda \\ 1 & \text{si} \quad \alpha = \lambda, \end{cases}$$

$$\varDelta^{\alpha^*}_{\lambda^*} = \varDelta^\alpha_\lambda = 0 ,$$

nous avons:

$$\begin{cases} W^{\alpha^*} = V^\lambda \varDelta^{\alpha^*}_\lambda = V^i \varDelta^{\alpha^*}_i \\ W^\alpha = V^{\lambda^*} \varDelta^\alpha_{\lambda^*} = W^i \varDelta^\alpha_i ; \end{cases}$$

inversement:

$$\begin{cases} V^{\alpha^*} = W^\lambda \varDelta^{\alpha^*}_\lambda = W^i \varDelta^{\alpha^*}_i \\ V^\alpha = W^{\lambda^*} \varDelta^\alpha_{\lambda^*} = W^i \varDelta^\alpha_i . \end{cases}$$

Les composantes de l'opérateur $\varDelta$ sont les mêmes dans tout repère digonal, en effet, la matrice trasmuée de $\begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix}$ dans un tel changement de repère est donnée par

$$\begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & A' \end{vmatrix} =$$
$$= \begin{vmatrix} B & A \\ A & B \end{vmatrix} \begin{vmatrix} A' & B' \\ B' & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} BA' + AB' & AA' + BB' \\ AA' + BB' & BA' + AB' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & E \\ E & 0 \end{vmatrix},$$

$$\nabla_i \varDelta^{\alpha^*}_\beta = L^{\alpha^*}_{\beta^* i} - L^\alpha_{\beta i} , \qquad \nabla_i \varDelta^\alpha_{\beta^*} = L^\alpha_{\beta i} - L^{\alpha^*}_{\beta^* i} ,$$
$$\nabla_i \varDelta^{\alpha^*}_{\beta^*} = L^{\alpha^*}_{\beta i} - L^\alpha_{\beta^* i} , \qquad \nabla_i \varDelta^\alpha_\beta = L^\alpha_{\beta^* i} - L^{\alpha^*}_{\beta i} ,$$

et les égalités telles que $W^{\alpha^*} = V^i \varDelta^{\alpha^*}_i$ se conservent par dérivation covariante (il faudra prendre garde de sommer en i et non en λ dans la dérivation).

Si nous considérons des chemins de W_4 et si de plus $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, en posant

$$(V^{\alpha},\ 0) = \mathfrak{V}^{\alpha} \qquad \text{et} \qquad \nabla_{\varrho} V^{\alpha} = \underset{(+)}{D_{\varrho}} \mathfrak{V}^{\alpha},$$

comme

$$\partial_{\varrho} W^{\alpha^*} + L^{\alpha^*}_{\sigma^*\varrho} W^{\sigma^*} = \partial_{\varrho} V^{\alpha} + \mathfrak{L}^{\alpha}_{\varrho\sigma} V^{\sigma}$$

on a:

$$\underset{(-)}{D}\overrightarrow{\mathfrak{V}} = \Delta_0 \nabla_0 \Delta\, (\overrightarrow{V}), \qquad \text{ou symboliquement:} \qquad \underset{(-)}{D} = \Delta_0 \nabla_0 \Delta\,,$$

ce qui montre que notre formalisme peut traduire les dérivation $(+)$ et $(-)$ au sens usuel sur W_4, relativement à $\mathfrak{L}^{\alpha}_{\beta\gamma}$. De façon plus générale, si $T_{ij}{}^{k} = \Theta_{i^*j^*}{}^{k^*}$, nous pourrons poser

$$T_{ij}{}^{k} = \Theta_{r^*s^*}{}^{t^*} \Delta^{r^*}_{i^*} \Delta^{s^*}_{j} \Delta^{k}_{t^*}\,,$$

en notant que

$$\nabla_l\, T_{ij}{}^{k} \neq \nabla_l\, \Theta_{i^*j^*}{}^{k^*}\,.$$

IV. - Les conditions $L^{r}_{st} = L^{r^*}_{t^*s}$ et l'operateur Δ.

$$\nabla_r \Delta^s_l = L^s_{tr} \Delta^t_l - L^t_{lr} \Delta^s_t = L^s_{l^*r} - L^{s^*}_{lr}$$

or

$$L^s_{l^*r} = L^{s^*}_{rl}\,,$$

donc

$$\nabla_r \Delta^s_l = L^{s^*}_{rl} - L^{s^*}_{lr}$$

et

(11) $$\nabla_r \Delta^s_l = 2\, S^k_{rl}\, \Delta^s_k\,.$$

Cette dernière condition est de forme indépendante du repère choisi sur V_8, diagonal ou non. Elle équivaut à $L^r_{st} = L^{r^*}_{t^*s}$ en repères diagonaux naturels. Elle est commode pour le passage en repères « produit » naturels et la recherche du système de conditions équivalentes à (7) et (8) dans ces repères.

Elle peut encore s'écrire:

$$2\, S^t_{rl} = \Delta^t_s \nabla_r \Delta^s_l \,;$$

en faisant $t = l$ et sommant il vient:

$$2\, S^t_{rt} = \Delta^t_s \nabla_r \Delta^s_t .$$

Comme:

$\nabla_r (\Delta^t_s \Delta^s_l) = 0$, $\Delta^t_s \Delta^s_t = 8$ (évident en repères diagonaux), $2 \Delta^s_t \nabla_r (\Delta^t_s) = 0$, on a:

(12) $$S^t_{rt} = 0 \,,$$

ce qui est d'ailleurs évident en repères diagonaux naturels.

Le vecteur de torsion de la connexion (π_3) *est nul.*

V. – Le tenseur g_{ij} sur W_4.

En repères diagonaux naturels nous poserons, sur W_4,

$$g_{\alpha\beta^*} = g_{\beta^*\alpha} = \mathcal{G}_{\alpha\beta}$$

ou mieux, pour conserver l'égalité des dérivées covariantes des tenseurs entre lesquels on établit des égalités de composantes,

$$g_{\alpha\beta^*} = \mathcal{G}_{\alpha\lambda} \Delta^\lambda_{\beta^*} \,, \qquad g^{\alpha\beta^*} = \mathcal{G}^{\alpha\lambda} \Delta^{\beta^*}_\lambda \,,$$

$$\mathcal{G}_{\alpha\beta} = g_{\alpha\lambda^*} \Delta^{\lambda^*}_\beta \,, \qquad \mathcal{G}^{\alpha\beta} = g^{\alpha\lambda^*} \Delta^\beta_{\lambda^*} \,,$$

nous supposons que $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha^*\beta^*} = 0$ [1].

[1] En repères « produit » naturels associés, si on désigne les composantes de ce tenseur γ_{ij}, on trouve immédiatemment:

$$\gamma_{\alpha\beta} = (1/2)\,(g_{\alpha^*\beta} + g_{\alpha\beta^*}) = -\gamma_{\alpha^*\beta^*} = \mathcal{G}_{(\alpha\beta)},$$

$$\gamma_{\alpha^*\beta} = -\gamma_{\alpha\beta^*} = \mathcal{G}_{[\alpha\beta]}.$$

Sur W_4 muni de ces repères ces conditions sont intrinsèques.

Nous postulerons afin de généraliser au mieux le théorème de RICCI que pour tout chemin de W_4 la dérivée covariante du tenseur g_{ij} est nulle:

$$\nabla g_{\alpha\beta^*} = \nabla g_{\alpha\beta} = \nabla g_{\alpha^*\beta^*} = 0 \, ,$$

soit:

$$\partial_\varrho \, g_{\alpha\beta^*} - L^\sigma_{\alpha\varrho} \, g_{\sigma\beta^*} - L^{\sigma^*}_{\beta^*\varrho} \, g_{\alpha\sigma^*} = 0 \, , \tag{13}$$

$$L^\sigma_{\alpha^*\varrho} \, g_{\sigma\beta^*} + L^\sigma_{\beta^*\varrho} \, g_{\alpha\sigma^*} = 0 \, , \tag{14}$$

$$L^{\sigma^*}_{\alpha\varrho} \, g_{\sigma^*\beta} + L^{\sigma^*}_{\beta\varrho} \, g_{\sigma^*\alpha} = 0 \, , \tag{15}$$

équations qui s'écrivent encore:

$$\partial_\varrho \, \mathfrak{G}_{\alpha\beta} - \mathfrak{L}^\sigma_{\alpha\varrho} \, \mathfrak{G}_{\sigma\beta} - \mathfrak{L}^\sigma_{\varrho\beta} \, \mathfrak{G}_{\alpha\sigma} = 0 \, , \tag{13 bis}$$

$$\Lambda^\sigma_{\varrho\alpha} \, \mathfrak{G}_{\sigma\beta} + \Lambda^\sigma_{\varrho\beta} \, \mathfrak{G}_{\ \alpha} = 0 \, , \tag{14 bis}$$

$$\Lambda^\sigma_{\alpha\varrho} \, \mathfrak{G}_{\beta\sigma} + \Lambda^\sigma_{\beta\varrho} \, \mathfrak{G}_{\alpha\sigma} = 0 \, , \tag{15 bis}$$

et ce système possède de façon évidente la propriété appelée par EINSTEIN pseudo-hermiticité.

VI. - Contraction des indices et dérivation covariante sur W_4.

Sur W_4 nous avons vu que le type d'un tenseur se conserve par changement de coordonnées diagonales naturelles.

Soit un tenseur de composantes T^i_{jk}, on peut le considérer comme la somme de tenseurs de type déterminé, par exemple, si $T^\alpha_{\beta\gamma^*} \neq 0$, on pourra considérer dans cette somme le tenseur de composantes $T^\alpha_{\beta\gamma^*} \neq 0$ et dont toutes les autres composantes sont nulles.

Dès lors une difficulté apparaît, les $T^\alpha_{\beta\gamma^*}$ étant soit des composantes de T^i_{jk}, soit les seules composantes non nulles d'un autre tenseur.

Dans le premier cas:

$$\nabla_\varrho \, T^\alpha_{\beta\gamma^*} = \partial_\varrho \, T^\alpha_{\beta\gamma^*} + L^\alpha_{i\varrho} \, T^i_{\beta\gamma^*} - L^i_{\beta\varrho} \, T^\alpha_{i\gamma^*} - L^i_{\gamma^*\varrho} \, T^\alpha_{\beta i} \, .$$

Dans le deuxième cas:

$$\nabla_\varrho T^\alpha_{\beta\gamma^*} = \partial_\varrho T^\alpha_{\beta\gamma^*} + L^\alpha_{\sigma\varrho} T^\sigma_{\beta\gamma^*} - L^\sigma_{\beta\varrho} T^\alpha_{\sigma\gamma^*} - L^{\sigma^*}_{\gamma^*\varrho} T^\alpha_{\beta\sigma^*}.$$

Pour distinguer les deux cas nous utiliserons dans le deuxième cas la notation $\overline{\nabla}$ au lieu de ∇, mais nous n'utiliserons qu'exceptionnellement cette dérivation. T^i_j étant un tenseur on obtient par contraction de i et j un scalaire, mais on peut aussi contracter sur W_4 de quatre autres manières et considérer les termes $T^\lambda{}_\lambda$, $T^{\lambda^*}{}_{\lambda^*}$, $T^{\lambda^*}{}_\lambda$, $T^\lambda{}_{\lambda^*}$ (contraction dite partielle, simple ou mixte), on voit immédiatement que chacun d'eux se transforme comme un scalaire dans un changement de repère diagonal sur W_4, mais:

$$(16) \qquad \nabla_\varrho T^\lambda{}_\lambda = \partial_\varrho T^\lambda{}_\lambda + L^\sigma{}_{\lambda^*\varrho} T^{\lambda^*}{}_\sigma - L^{\sigma^*}{}_{\lambda\varrho} T^\lambda{}_{\sigma^*},$$

$$(17) \qquad \nabla_\varrho T^{\lambda^*}{}_{\lambda^*} = \partial_\varrho T^{\lambda^*}{}_{\lambda^*} + L^{\sigma^*}{}_{\lambda\varrho} T^\lambda{}_{\sigma^*} - L^\sigma_{\lambda^*\varrho} T^{\lambda^*}_\sigma.$$

(On voit bien que $\nabla_\varrho T^i{}_i = \partial_\varrho T^i{}_i$ comme il se doit.)

$$\nabla_\varrho T^\lambda{}_{\lambda^*} = \partial_\varrho T^\lambda{}_{\lambda^*} + L^\lambda{}_{\sigma^*\varrho}(T^{\sigma^*}{}_{\lambda^*} - T^\sigma{}_\lambda) + 2S^\lambda{}_{\sigma\varrho} T^\sigma{}_{\lambda^*},$$

$$\nabla_\varrho T^{\lambda^*}{}_\lambda = \partial_\varrho T^{\lambda^*}{}_\lambda + L^{\lambda^*}{}_{\sigma\varrho}(T^\sigma{}_\lambda - T^{\sigma^*}{}_{\lambda^*}) + 2S^\lambda{}_{\varrho\sigma} 6T^{\sigma^*}{}_\lambda.$$

Notons que pour une connexion quelconque (π_3) les opérateurs contraction partielle et dérivation covariante ne commutent pas.

Mais dans certaines circonstances la règle de commutation est valable pour certains termes:

Si sur W_4: $L^\alpha{}_{\beta^*\gamma} = L^{\alpha^*}{}_{\gamma\beta} = 0$, on a:

$$\nabla_\varrho T^\lambda{}_\lambda = \partial_\varrho T^\lambda{}_\lambda,$$

$$\nabla_\varrho T^{\lambda^*}{}_{\lambda^*} = \partial_\varrho T^{\lambda^*}{}_{\lambda^*},$$

mais:

$$\nabla_\varrho T^\lambda{}_{\lambda^*} \neq \partial_\varrho T^\lambda{}_{\lambda^*},$$

$$\nabla_\varrho T^{\lambda^*}{}_\lambda \neq \partial_\varrho T^{\lambda^*}{}_\lambda.$$

Si sur W_4: $T^{\alpha^*}{}_\beta = T^\alpha{}_{\beta^*} = 0$ les conclusions sont encore les mêmes.

Il est facile de généraliser ces résultats à un tenseur quelconque.

VII. – Les isomorphismes attachés à $g_{\alpha\beta^*}$, $g^{\alpha\beta^*}$ sur W_4 plongé dans V_8.

Sur V_8 désignons par $\mathfrak{T}_x$ et $\mathfrak{T}_{x^*}$ les espaces tangents des vecteurs covariants dont les bases sont respectivement les dx^α et dx^{α^*}, désignons par T_x et T_{x^*} les duaux respectifs.

$(V_\alpha, 0)$ désignant les composantes covariantes d'un vecteur de W_4, posons:

$$V^{\alpha^*} = V_\lambda\, g^{\lambda\alpha^*},$$

alors

$$V_\alpha = V^{\lambda^*}\, g_{\alpha\lambda^*}$$

(isomorphisme ψ entre $\mathfrak{T}_x$ et T_{x^*}), de même pour un vecteur $(W^\alpha, 0)$

$$W_{\alpha^*} = W^\lambda\, g_{\lambda\alpha^*}, \qquad W^\alpha = W_{\lambda^*}\, g^{\alpha\lambda^*}$$

(isomorphisme ψ entre T_x et $\mathfrak{T}_{x^*}$) l'opérateur Δ définit lui-même un isomorphisme Δ entre T_x et T_{x^*} (et $\mathfrak{T}_x$ et $\mathfrak{T}_{x^*}$).

Posons:

$$\theta = \Delta_0\, \psi, \qquad \bar{\theta} = \psi_0\, \Delta,$$

θ et $\bar{\theta}$ définissent des isomorphismes de $\mathfrak{T}_x$ sur T_x et de $\mathfrak{T}_{x^*}$ sur T_{x^*}.

Ainsi avec θ:

$$V^\alpha = V_\lambda\, g^{\lambda\sigma^*}\, \Delta^\alpha_{\sigma^*} = V_\lambda\, \mathcal{G}^{\lambda\alpha},$$

et avec $\bar{\theta}$:

$$\bar{V}^\alpha = V_\lambda\, \Delta^\lambda_{\sigma^*}\, g^{\alpha\sigma^*} = V_\lambda\, \mathcal{G}^{\alpha\lambda}.$$

Les isomorphismes θ et $\bar{\theta}$ ont été considérés par M.me Maurer-Tison (Thèse).

Notons que la multiplication contractée partielle simple par $g_{\alpha\beta^*}$ (ou $g^{\alpha\beta^*}$) commute avec ∇:

$$\nabla_\varrho\, (g_{\lambda\alpha^*}\, V^\lambda) = g_{\lambda\alpha^*}\, \nabla_\varrho\, V^\lambda,$$

$$\nabla_\varrho\, V_{\alpha^*} = g_{\lambda\alpha^*}\, \nabla_\varrho\, V^\lambda,$$

de même:

$$\nabla_\varrho V^{\alpha^*} = g^{\lambda\alpha^*} \nabla_\varrho V_\lambda .$$

Donc sur les chemins de W_4 et relativement à la connexion (π_3) les transports parallèles de V_α et V^{α^*} (ou V^α et V_{α^*}) sont équivalents. On en déduit facilement un résultat déjà signalé par M.me MAURER-TISON (isomorphisme θ).

Supposons que $\nabla_\varrho V_\alpha = 0$ alors $\nabla_\varrho V^{\alpha^*} = 0$, donc:

$$\nabla_\varrho V^\alpha = V^{\sigma^*} (\nabla_\varrho \Delta^\alpha_{\sigma^*}) = 2 V^{\sigma^*} S^\alpha_{\sigma\varrho} = 2 V^\sigma S^\alpha_{\sigma\varrho} ,$$

$$\partial_\varrho V^\alpha + L^\alpha_{\sigma\varrho} V^\sigma = 2 V^\sigma S^\alpha_{\sigma\varrho} ,$$

$$\partial_\varrho V^\alpha + L^\alpha_{\varrho\sigma} V^\sigma = 0 .$$

En nous plaçant dans le cas particulier simple où $L^{\alpha^*}_{\gamma\beta} = 0$, on voit sans autre calcul que l'on a transporté V^α relativement à la connexion transposée. En remontant les calculs on voit que cette condition de transport équivaut à $\nabla g_{\alpha\beta^*} = 0$ soit au premier système d'EINSTEIN. Ce résultat est implicitement contenu dans le n. IV.

On pourraît établir ce résultat pour $\bar{\theta}$, mais dans notre formalisme il n'a qu'un intérêt assez relatif.

VIII. - Forme de courbure de V_8. Forme induite dans W_4.

Désignons par $\Omega^i{}_j$ les éléments de la forme de courbure de la connexion (π_3):

$$\Omega^i{}_j = d\pi^i_j + \pi^i_r \wedge \pi^r_j = (1/2)\, R^i{}_{jkl}\, dx^k \wedge dx^l ,$$

$R^i{}_{jkl} = - R^i{}_{jlk}$ désignant le tenseur de courbure de la connexion.

Désignons par $\widehat{\pi^i{}_j}$ la forme induite dans W_4 par l'immersion de W_4 dans V_8:

$$\widehat{\pi^i{}_j} = L^i{}_{j\varrho}\, dx^\varrho ,$$

Si nous appelon $\widehat{\Omega^i{}_j}$ la forme de courbure induite, nous avons:

$$\widehat{\Omega^i{}_j} = \widehat{d\pi^i{}_j} + \widehat{\pi^i{}_r} \wedge \widehat{\pi^r{}_j}$$

et

$$\widehat{\Omega^i{}_j} = (1/2)\, \widehat{R^i{}_{j\lambda\mu}}\, dx^\lambda \wedge dx^\mu$$

avec

$$\widehat{R^i}_{j\lambda\mu} = \partial_\lambda L^i{}_{j\mu} - \partial_\mu L^i{}_{j\lambda} + L^i{}_{\varrho\lambda} L^\varrho{}_{j\mu} - L^i{}_{\varrho\mu} L^\varrho{}_{j\lambda} + L^i{}_{\varrho^*\lambda} L^{\varrho^*}{}_{j\mu} - L^i{}_{\varrho^*\mu} L^{\varrho^*}{}_{j\lambda} .$$

Par contraction partielle simple de i et λ on obtiendra 2 tenseurs du second ordre sur W_4 que nous appellerons tenseurs de Ricci induits dans W_4.

$$\widehat{R_{\alpha\mu}} = \partial_\lambda L^\lambda_{\alpha\mu} - \partial_\mu L^\lambda_{\alpha\lambda} + L^\lambda_{\varrho\lambda} L^\varrho_{\alpha\mu} - L^\lambda_{\varrho\mu} L^\varrho_{\alpha\lambda} + L^\lambda_{\varrho^*\lambda} L^{\varrho^*}_{\alpha\mu} - L^\lambda_{\varrho^*\mu} L^{\varrho^*}_{\alpha\lambda} , \tag{18}$$

$$\widehat{R_{\alpha^*\mu}} = \partial_\lambda L^\lambda_{\alpha^*\mu} - \partial_\mu L^\lambda_{\alpha^*\mu} + L^\lambda_{\varrho\lambda} L^\varrho_{\alpha^*\mu} - L^\lambda_{\varrho\mu} L^\varrho_{\alpha^*\lambda} + L^\lambda_{\varrho^*\lambda} L^{\varrho^*}_{\alpha^*\mu} - L^\lambda_{\varrho^*\mu} L^{\varrho^*}_{\alpha^*\lambda} . \tag{19}$$

Nous poserons donc sur W_4, avec les notations déjà utilisées,

$$\mathfrak{S}_{\alpha\mu} = \partial_\lambda \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\mu} - \partial_\mu \mathfrak{L}^\lambda_{\alpha\lambda} + \mathfrak{L}^\lambda_{\varrho\lambda} \mathfrak{L}^\varrho_{\alpha\mu} - \mathfrak{L}^\lambda_{\varrho\mu} \mathfrak{L}^\varrho_{\alpha\lambda} + \Lambda^\lambda_{\lambda\varrho} \Lambda^\varrho_{\alpha\mu} - \Lambda^\lambda_{\mu\varrho} \Lambda^\varrho_{\alpha\lambda} , \tag{18 bis}$$

$$\overline{\mathfrak{S}}_{\alpha\mu} = \partial_\lambda \Lambda^\lambda_{\mu\alpha} - \partial_\mu \Lambda^\lambda_{\lambda\alpha} + \mathfrak{L}^\lambda_{\varrho\lambda} \Lambda^\varrho_{\mu\alpha} - \mathfrak{L}^\lambda_{\varrho\mu} \Lambda^\varrho_{\lambda\alpha} + \Lambda^\lambda_{\lambda\varrho} \mathfrak{L}^\varrho_{\mu\alpha} - \Lambda^\lambda_{\mu\varrho} \mathfrak{L}^\varrho_{\lambda\alpha} . \tag{19 bis}$$

IX. - Les identités de Ricci.

Sur W_4 plongé dans V_8 appliquons les identités de Ricci à g_{ij}:

$$\nabla_r \nabla_s g_{ij} - \nabla_s \nabla_r g_{ij} = - R^h_{i,rs}\, g_{hj} - R^h_{j,rs}\, g_{ih} .$$

Faisons $r = \lambda$ et $s = \mu$:

$$\nabla_\lambda \nabla_\mu g_{\alpha^*\beta} - \nabla_\mu \nabla_\lambda g_{\alpha^*\beta} = - R^{\varrho^*}_{\alpha^*\lambda\mu}\, g_{\varrho^*\beta} - R^\varrho_{\beta\lambda\mu}\, g_{\alpha^*\varrho} = 0 ,$$

$$R^{\sigma^*}_{\alpha^*,\lambda\mu} = - g^{\beta\sigma^*} g_{\alpha^*\varrho} R^\varrho_{\beta\lambda\mu} , \tag{20}$$

de même

$$R^\sigma_{\alpha^*,\lambda\mu} = - g^{\beta^*\sigma} g_{\alpha^*\varrho} R^\varrho_{\beta^*,\lambda\mu} , \tag{21}$$

$$R^{\sigma^*}_{\alpha,\lambda\mu} = - g^{\sigma^*\beta} g_{\alpha\varrho^*} R^{\varrho^*}_{\beta\lambda\mu} . \tag{22}$$

Posant

$$R^\varrho_{\beta^*\lambda\mu}\, g_{\alpha^*\varrho} = R_{\alpha^*\beta^*\lambda\mu} , \qquad g^{\beta^*\sigma} R_{\alpha^*\beta^*\lambda\mu} = R_{\alpha^*,}{}^{\sigma}{}_{\lambda\mu} ,$$

il vient:

(23) $$R^{j}{}_{i,\lambda\mu} = - R_{j}{}^{i}{}_{,\lambda\mu} ,$$

ou

(24) $$R_{ij,\,\lambda\mu} = - R_{ji,\,\lambda\mu} ,$$

ou

(25) $$R^{ij}{}_{,\,\lambda\mu} = - R^{ji}{}_{,\,\lambda\mu} ,$$

$$R^{\alpha}_{\alpha\,\lambda\mu} = \partial_\lambda L^{\alpha}_{\alpha\mu} - \partial_\mu L^{\alpha}_{\alpha\lambda} + L^{\alpha}_{\varrho^*\lambda} L^{\varrho^*}_{\alpha\mu} - L^{\alpha}_{\varrho^*\mu} L^{\varrho^*}_{\alpha\lambda} ,$$

$$R^{\alpha^*}_{\alpha^*\,\lambda\mu} = \partial_\lambda L^{\alpha^*}_{\alpha^*\mu} - \partial_\mu L^{\alpha^*}_{\alpha^*\lambda} + L^{\alpha^*}_{\varrho\lambda} L^{\varrho}_{\alpha^*\mu} - L^{\alpha^*}_{\varrho\mu} L^{\varrho}_{\alpha^*\lambda} ,$$

$$R^{\alpha}_{\alpha\,\lambda\mu} + R^{\alpha^*}_{\alpha^*\,\lambda\mu} = \partial_\lambda (L^{\alpha}_{\alpha\mu} + L^{\alpha^*}_{\alpha^*\mu}) - \partial_\mu (L^{\alpha}_{\alpha\lambda} + L^{\alpha^*}_{\alpha^*\lambda})$$

$$= \partial_\lambda (L^{\alpha}_{\alpha\mu} + L^{\alpha}_{\mu\alpha}) - \partial_\mu (L^{\alpha}_{\alpha\lambda} + L^{\alpha}_{\lambda\alpha}) = 0 ,$$

si nous supposons que $L^{\alpha}_{\alpha\mu} = L^{\alpha}_{\mu\alpha}$. Alors il vient

(26) $$\partial_\lambda L^{\alpha}_{\alpha\mu} = \partial_\mu L^{\alpha}_{\alpha\lambda} ,$$

$$R^{\alpha}_{\alpha\,\lambda\mu} = L^{\alpha}_{\varrho^*\lambda} L^{\varrho^*}_{\alpha\mu} - L^{\alpha}_{\varrho^*\mu} L^{\varrho^*}_{\alpha\lambda} .$$

Enfin, tenant compte de la valeur de $R^{\sigma^*}_{\alpha^*\lambda\mu}$,

$$R^{\sigma^*}_{\alpha^*\lambda\mu} = \partial_\lambda L^{\sigma}_{\mu\alpha} - \partial_\mu L^{\sigma}_{\lambda\alpha} + L^{\sigma}_{\lambda\varrho} L^{\varrho}_{\mu\alpha} - L^{\sigma}_{\mu\varrho} L^{\varrho}_{\lambda\alpha} + L^{\sigma^*}_{\varrho\lambda} L^{\varrho}_{\alpha^*\mu} - L^{\sigma^*}_{\varrho\mu} L^{\varrho}_{\alpha^*\lambda} ,$$

et posons:

$$\overset{*}{\mathfrak{F}}{}^{\sigma}_{\alpha\lambda\mu} = R^{\sigma^*}_{\alpha^*\lambda\mu}$$

$$= \partial_\lambda \mathfrak{L}^{\sigma}_{\mu\alpha} - \partial_\mu \mathfrak{L}^{\sigma}_{\lambda\alpha} + \mathfrak{L}^{\sigma}_{\lambda\varrho} \mathfrak{L}^{\varrho}_{\mu\alpha} - \mathfrak{L}^{\sigma}_{\mu\varrho} \mathfrak{L}^{\varrho}_{\lambda\alpha} + \Lambda^{\sigma}_{\varrho\lambda} \Lambda^{\varrho}_{\mu\alpha} - \Lambda^{\sigma}_{\varrho\mu} \Lambda^{\varrho}_{\lambda\alpha} ,$$

$$\mathfrak{F}^{\sigma}_{\alpha\lambda\mu} = R^{\sigma}_{\alpha\lambda\mu}$$

$$= \partial_\lambda \mathfrak{L}^{\sigma}_{\alpha\mu} - \partial_\mu \mathfrak{L}^{\sigma}_{\alpha\lambda} + \mathfrak{L}^{\sigma}_{\varrho\lambda} \mathfrak{L}^{\varrho}_{\alpha\mu} - \mathfrak{L}^{\sigma}_{\varrho\mu} \mathfrak{L}^{\varrho}_{\alpha\lambda} + \Lambda^{\sigma}_{\lambda\varrho} \Lambda^{\varrho}_{\alpha\mu} - \Lambda^{\sigma}_{\mu\varrho} \Lambda^{\varrho}_{\alpha\lambda} .$$

$\overset{*}{\mathcal{S}}{}^{\sigma}{}_{\alpha,\lambda\mu}$ est ce que l'on obtient en appliquant à $\mathcal{S}^{\sigma}{}_{\alpha\lambda\mu}$ le principe de pseudo-hermiticité.

On obtient donc (cf. [18]):

$$\overset{*}{\mathcal{S}}{}^{\sigma}{}_{\alpha\lambda\mu} = -\mathcal{G}^{\beta\sigma}\,\mathcal{G}_{\varrho\alpha}\,\mathcal{S}^{\varrho}{}_{\beta\lambda\mu}\,. \tag{27}$$ (cf 18).

X. – Les identités de Bianchi.

$\widehat{\Omega^{i}{}_{j}}$ désignant la forme de courbure induite dans W_4 plongée dans V_8, $\widehat{\pi^{i}{}_{j}}$ les matrices de connexion, nous savons que:

$$\mathrm{d}\widehat{\Omega^{i}{}_{j}} = \widehat{\Omega^{i}{}_{k}}\wedge\widehat{\pi^{k}{}_{j}} - \widehat{\pi^{i}{}_{k}}\wedge\widehat{\Omega^{k}{}_{j}} \qquad \text{(identités de Bianchi)}$$

(cf. [13], pages 85 et 108) avec

$$\widehat{\Omega^{i}{}_{j}} = (1/2)\;R^{i}{}_{j\lambda\mu}\,\mathrm{d}x^{\lambda}\wedge\mathrm{d}x^{\mu}\,.$$

Les identités de Bianchi s'écrivent encore:

$$(\partial_{\nu}\widehat{R^{i}_{j\lambda\mu}} - L^{k}{}_{j\nu}\widehat{R^{i}_{k\lambda\mu}} + L^{i}{}_{k\nu}\widehat{R^{k}_{j\lambda\mu}})\,\mathrm{d}x^{\lambda}\wedge\mathrm{d}x^{\mu}\wedge\mathrm{d}x^{\nu} = 0\,,$$

ou:

$$\sum_{\substack{PC\\ \lambda,\mu,\nu}} \nabla_{\nu}\widehat{R^{i}{}_{j\lambda\mu}} + 2\;S^{\varrho}_{\lambda\nu}\,\widehat{R^{i}{}_{j\varrho\mu}} = 0\,.$$

En faisant $\lambda = i$ et sommant, deux cas se présentent selon que $j=\beta$ ou $j=\beta^*$. Dans le premier cas (en tenant compte que les opérateurs de contraction partielle et de dérivation ne commutent pas) il vient:

$$\nabla_{\nu}\widehat{R_{\beta\mu}} + L^{\varrho}_{\lambda^*\nu}\widehat{R^{\lambda^*}{}_{\beta\varrho\mu}} + 2S^{\varrho}_{\lambda\nu}\widehat{R^{\lambda}{}_{\beta\varrho\mu}} + \nabla_{\lambda}\widehat{R^{\lambda}{}_{\beta\mu\nu}} + 2S^{\varrho}_{\mu\lambda}\widehat{R^{\lambda}_{\beta\varrho\nu}} -$$

$$-\nabla_{\mu}\widehat{R_{\beta\nu}} - L^{\varrho}_{\lambda^*\mu}\widehat{R^{\lambda^*}{}_{\beta\varrho\nu}} - 2S^{\varrho}_{\nu\mu}\widehat{R_{\beta\varrho}} = 0\,.$$

Multiplions par $g^{\beta\mu^*}$ et sommons:

$$\nabla_\nu \widehat{R^{\mu^*}_{\ \mu}} + L^\varrho_{\lambda^*\nu} \widehat{R^{\lambda^*\mu^*}_{\ \ \ \varrho\mu}} + 2S^\varrho_{\ \lambda\nu} \widehat{R^{\lambda\mu^*}_{\ \ \ \varrho\mu}} + \nabla_\lambda \widehat{R^{\lambda\mu^*}_{\ \ \ \mu\nu}} +$$

$$+ 2S^\varrho_{\mu\lambda} \widehat{R^{\lambda\mu^*}_{\ \ \ \varrho\nu}} - \nabla_\mu \widehat{R^{\mu^*}_{\ \nu}} - L^\varrho_{\lambda^*\mu} \widehat{R^{\lambda^*\mu^*}_{\ \ \ \varrho\nu}} + 2S^\varrho_{\ \nu\mu} \widehat{R^{\lambda\mu^*}_{\ \ \ \varrho\lambda}} = 0\ ,$$

où nous avons posé:

$$\widehat{R^{\alpha^*}_{\ \beta}} = \widehat{R_{\lambda\beta}}\, g^{\lambda\alpha^*}, \qquad \widehat{R^{k\mu^*}_{\ \ \ \alpha\beta}} = \widehat{R^k_{\ \sigma\alpha\beta}}\, g^{\sigma\mu^*}.$$

Nous allons évaluer:

$$\nabla_\lambda \widehat{R^{\lambda\mu^*}_{\ \ \ \mu\nu}} = -\nabla_\lambda \widehat{R^{\mu^*\lambda}_{\ \ \ \mu\nu}} = -g^{\sigma^*\lambda}\, \nabla_\lambda \widehat{R^{\mu^*}_{\ \sigma^*\mu\nu}}\, .$$

Notons que:

$$\widehat{R^{\mu^*}_{\ \sigma^*\mu\nu}} = \widehat{R_{\nu\sigma}} + L^\lambda_{\ \varrho^*\sigma} L^{\varrho^*}_{\ \nu\lambda} - L^{\lambda^*}_{\ \varrho\nu} L^\varrho_{\ \sigma^*\lambda}\ ,$$

c'est pourquoi nous poserons ici:

$$\widehat{R^{\mu^*}_{\ \sigma^*\mu\nu}} = \overline{R}_{\nu\sigma}$$

($\overline{R}_{\nu\sigma}$ étant les seules composantes non nulles de $\overline{R}_{ij}$); on a alors

$$\nabla_\lambda \widehat{R^{\mu^*}_{\ \sigma^*\mu\nu}} = \nabla_\lambda \overline{R}_{\nu\sigma} + 2S^\varrho_{\sigma\lambda} \overline{R}_{\nu\varrho} + 2S^\varrho_{\lambda\mu} \widehat{R^{\mu^*}_{\ \sigma^*\varrho\nu}} + L^{\mu^*}_{\ \varrho\lambda} \widehat{R^\varrho_{\ \sigma^*\mu\nu}} - L^\varrho_{\sigma^*\lambda} \overline{R}_{\nu\varrho}\, .$$

Tenant compte de ces résultats il vient l'identité de conservation:

$$\boxed{\begin{gathered}\nabla_\nu \widehat{R^{\mu_*}_{\ \mu}} - 2\, S^\varrho_{\nu\lambda} (\widehat{R_{\sigma\varrho}}\, g^{\sigma\lambda^*} + \overline{R}_{\varrho\sigma}\, g^{\sigma^*\lambda}) - \nabla_\lambda (\widehat{R_{\sigma\nu}}\, g^{\sigma\lambda^*} + \overline{R}_{\nu\sigma}\, g^{\sigma^*\lambda}) - \\ - 2\, S^\varrho_{\sigma\lambda} \overline{R}_{\nu\varrho} g^{\sigma^*\lambda} - L^{\varrho^*}_{\ \mu\lambda} (\widehat{R^{\lambda^*\mu^*}_{\ \ \ \varrho\nu}} + \widehat{R^{\mu\lambda}_{\ \ \ \varrho\nu}}) + L^\varrho_{\lambda^*\nu} \widehat{R^{\lambda^*\mu^*}_{\ \ \ \varrho\mu}} + L^\varrho_{\sigma^*\lambda} \overline{R}_{\nu\varrho}\, g^{\sigma^*\lambda} = 0\end{gathered}}$$

Examinons le cas où $L^{\alpha^*}_{\ \beta\gamma} = 0$ (cas unitaire d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER).

Alors:

$$\overline{R}_{\nu\sigma} = \widehat{R}_{\nu\sigma}\,,$$

$$\nabla_\lambda \widehat{R}_{\nu\sigma} = \partial_\lambda \widehat{R}_{\nu\sigma} - L^{\varrho}_{\nu\lambda}\widehat{R}_{\varrho\sigma} - L^{\varrho}{}_{\sigma\lambda}\widehat{R}_{\nu\varrho} = \nabla_\lambda \overline{R}_{\nu\sigma}\,,$$

ce qui donne l'identité plus simple:

$$\boxed{\begin{aligned}\nabla_\nu \widehat{R}^{\mu^*}_{\mu} - \nabla_\lambda (\widehat{R}_{\sigma\nu}\, g^{\sigma\lambda^*} + \widehat{R}_{\nu\sigma}\, g^{\sigma^*\lambda}) - 2\, S^{\varrho}_{\nu\lambda}\, (\widehat{R}_{\sigma\varrho}\, g^{\sigma\lambda^*} + \widehat{R}_{\varrho\sigma}\, g^{\sigma^*\lambda}) - \\ - 2\, S^{\varrho}_{\sigma\lambda}\, \widehat{R}_{\nu\varrho}\, g^{\sigma^*\lambda} = 0\end{aligned}}\,,$$

et on peut montrer facilement que cette dernière identité redonne bien le résultat classique. En effet:

$$\nabla_\nu \widehat{R}^{\mu^*}_{\mu} = g^{\beta\mu^*}\,(\partial_\nu \widehat{R}_{\beta\mu} - L^{\varrho}_{\mu\nu}\widehat{R}_{\beta\varrho} - L^{\varrho}_{\beta\nu}\widehat{R}_{\varrho\mu})\,,$$

$$-\nabla_\lambda \widehat{R}_{\sigma\nu}\, g^{\sigma\lambda^*} = -\,\partial_\lambda (\widehat{R}_{\sigma\nu}\, g^{\sigma\lambda^*}) - L^{\lambda^*}_{\varrho^*\lambda}\widehat{R}_{\sigma\nu}\, g^{\sigma\varrho^*} + L^{\varrho}_{\nu\lambda}\widehat{R}_{\sigma\varrho}\, g^{\sigma\lambda^*},$$

$$\begin{aligned}-\nabla_\lambda \widehat{R}_{\nu\sigma}\, g^{\lambda\sigma^*} = -\,\partial_\lambda (\widehat{R}_{\nu\sigma}\, g^{\lambda\sigma^*}) + L^{\varrho}_{\sigma\lambda}\, g^{\lambda\sigma^*}\widehat{R}_{\nu\varrho} + L^{\varrho}_{\nu\lambda}\, g^{\lambda\sigma^*}\widehat{R}_{\varrho\sigma} - \\ - L^{\lambda}_{\varrho\lambda}\widehat{R}_{\nu\sigma}\, g^{\varrho\sigma^*} - L^{\varrho^*}_{\varrho^*\lambda}\widehat{R}_{\nu\sigma}\, g^{\lambda\varrho^*},\end{aligned}$$

en ajoutant on trouve, après quelques calculs simples,

$$g^{\beta\mu^*}\,\partial_\nu \widehat{R}_{\beta\mu} - \partial_\lambda (\widehat{R}_{\beta\nu}\, g^{\beta\lambda^*} + \widehat{R}_{\nu\beta}\, g^{\lambda\beta^*}) - L^{\lambda}_{\lambda\varrho}\,(\widehat{R}_{\beta\nu}\, g^{\beta\varrho^*} + \widehat{R}_{\nu\beta}\, g^{\varrho\beta^*}) = 0\,,$$

forme classique, aux notations près, des identités de conservation

$$2\,\partial_\lambda\, \mathfrak{H}^{\lambda}_{\varrho} + 2\mathfrak{H}^{\lambda}_{\varrho}\, \mathfrak{L}^{\sigma}_{\sigma\lambda} - \mathfrak{G}^{\sigma\mu}\,\partial_\varrho\, \mathfrak{S}_{\sigma\mu} = 0\,,$$

où:

$$2\mathfrak{H}^{\lambda}_{\varrho} = \mathfrak{S}_{\varrho\sigma}\,\mathfrak{G}^{\lambda\sigma} + \mathfrak{S}_{\sigma\varrho}\,\mathfrak{G}^{\sigma\lambda}.$$

Un autre cas qui semble intéressant se présente plus loin: si on admet que $\Lambda^{\lambda}_{[\lambda\varrho]} = 0$, $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma} = -\Lambda^{\alpha}_{\gamma\beta}$ alors $\Lambda^{\lambda}_{\lambda\varrho} = 0$ (voir plus loin XII); ceci entraîne à nouveau:

$$\overline{R}_{\nu\sigma} = \widehat{R}_{\nu\sigma} \qquad \text{et d'après} \qquad L^{\beta}_{\sigma^*\varrho}\, g^{\alpha\sigma^*} + L^{\alpha}_{\sigma^*\varrho}\, g^{\sigma^*\beta} = 0, \quad L^{\varrho}_{\sigma^*\lambda}\, g^{\sigma^*\lambda} = 0\,,$$

mais

$$\nabla_{\lambda} \widehat{R_{\sigma\nu}} = \nabla_{\lambda} \overline{R}_{\nu\sigma} - L^{\varrho^*}_{\nu\lambda} \widehat{R_{\varrho^*\sigma}}\,,$$

ce qui fait que les identités s'écrivent:

$$\nabla_{\nu} \widehat{R^{\mu^*}_{\mu}} - \nabla_{\lambda}(\widehat{R_{\sigma\nu}}\, g^{\sigma\lambda^*} + \widehat{R_{\nu\sigma}}\, g^{\sigma^*\lambda}) - 2S^{\varrho}_{\nu\lambda}\, (\widehat{R_{\sigma\varrho}}\, g^{\sigma\lambda^*} + \widehat{R_{\varrho\sigma}}\, g^{\sigma^*\lambda}) -$$

$$- 2S^{\varrho}_{\sigma\lambda} \widehat{R_{\nu\varrho}}\, g^{\sigma^*\lambda} - L^{\varrho^*}_{\mu\lambda}\, (\widehat{R^{\lambda^*\mu}_{\varrho\nu}} + \widehat{R^{\mu\lambda}_{\varrho\nu}}) +$$

$$+ L^{\varrho}_{\lambda^*\nu} \widehat{R^{\lambda^*\mu^*}_{\varrho\mu}} - L^{\varrho^*}_{\nu} \widehat{R_{\varrho^*\sigma}}\, g^{\sigma^*\lambda} = 0\,.$$

Prenons maintenant les identités de Bianchi avec $j = \beta^*$, faisons $i = \lambda$ et sommons:

$$\nabla_{\nu} \widehat{R_{\beta^*\mu}} + \nabla_{\lambda} \widehat{R^{\lambda}_{\beta^*\mu\nu}} - \nabla_{\mu} \widehat{R_{\beta^*\nu}} + L^{\varrho}_{\lambda^*\nu} \widehat{R^{\lambda^*}_{\beta^*\varrho\mu}} + 2S^{\varrho}_{\lambda\nu} \widehat{R^{\lambda}_{\beta^*\varrho\mu}} +$$

$$+ 2S^{\varrho}_{\mu\lambda} \widehat{R^{\lambda}_{\beta^*\varrho\nu}} - L^{\varrho}_{\lambda^*\mu} \widehat{R^{\lambda^*}_{\beta^*\mu\nu}} - S^{\varrho}_{\nu\mu} \widehat{R_{\beta^*\varrho}} = 0\,.$$

Multiplions par $g^{\beta^*\mu}$:

$$\nabla_{\nu} \widehat{R^{\mu}_{\mu}} - \nabla_{\mu} \widehat{R^{\mu}_{\nu}} + \nabla_{\lambda} \widehat{R^{\lambda\mu}_{\mu\nu}} - 2S^{\varrho}_{\nu\mu} \widehat{R^{\mu}_{\varrho}} + 2\, S^{\varrho}_{\lambda\nu} \widehat{R^{\lambda}_{\varrho}} + L^{\varrho}_{\lambda^*\nu} \widehat{R^{\lambda^*\mu}_{\varrho\mu}} +$$

$$+ 2\, S^{\varrho}_{\mu\lambda} \widehat{R^{\lambda\mu}_{\varrho\nu}} - L^{\varrho}_{\lambda^*\mu} \widehat{R^{\lambda^*\mu}_{\varrho\nu}} = 0\,.$$

Mais:

$$\nabla_{\lambda} \widehat{R^{\lambda\mu}_{\mu\nu}} = - \nabla_{\lambda} \widehat{R^{\mu\lambda}_{\mu\nu}} = - \nabla_{\lambda}\, (\widehat{R_{\sigma^*\nu}}\, g^{\sigma^*\lambda}) - L^{\varrho}_{\alpha^*\lambda} \widehat{R^{\sigma^*}_{\sigma^*\varrho\nu}}\, g^{\sigma^*\lambda},$$

il vient ainsi:

$$\boxed{\nabla_{\nu} \widehat{R^{\mu}_{\mu}} - 2\nabla_{\lambda} \widehat{R^{\lambda}_{\nu}} - 4\, S^{\varrho}_{\nu\lambda} \widehat{R^{\lambda}_{\varrho}} - 2\, S^{\varrho}_{\lambda\mu} \widehat{R^{\lambda\mu}_{\varrho\nu}} + L^{\varrho}_{\lambda^*\nu} \widehat{R^{\lambda^*}_{\varrho}} - 2L^{\varrho}_{\lambda^*\mu} \widehat{R^{\lambda^*\mu}_{\varrho\nu}} = 0}\,.$$

XI. – Les équations de champ en théorie unitaire élargie.

Si $L^{\lambda*}_{\beta\gamma} = \Lambda_{\beta\gamma} = 0$ sur W_4 alors on peut écrire localement les équations d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER sous la forme:

$$\nabla_\varrho g^{\alpha\beta*} = 0\,, \qquad S_\alpha = (1/2)\,(L^\varrho_{\alpha\varrho} - L^\varrho_{\varrho\alpha}) = 0\,,$$

$$R_{(\alpha\beta)} = 0, \qquad \mathrm{d}R_{[\alpha\beta]} = 0\,.$$

Nous proposons de prendre comme équations (*) dans le cas général en posant:

$$\mathfrak{S}_{\alpha\beta} = \widehat{R_\alpha}\,, \qquad \overline{\mathfrak{S}}_{\alpha\beta} = \widehat{R_{\alpha^*\beta}}\,, \qquad \Sigma_\alpha = (1/2)\,(\Lambda^\varrho_{\alpha\varrho} - \Lambda^\varrho_{\varrho\alpha})\,,$$

$$\nabla_\varrho g_{ij} = 0\,, \qquad S_\alpha = \sum\nolimits_\alpha = 0\,,$$

$$\mathfrak{S}_{(\alpha\beta)} = \overline{\mathfrak{S}}_{(\alpha\beta)} = 0\,, \qquad \mathrm{d}\mathfrak{S}_{[\alpha\beta]} = \mathrm{d}\overline{\mathfrak{S}}_{[\alpha\beta]} = 0\,.$$

On retrouve les équations de la théorie classique (avec pour 2 d'entre elles les termes supplémentaires de $\mathfrak{S}_{\alpha\beta}$) et des équations nouvelles que nous allons écrire:

$$\Lambda^\sigma_{\alpha\varrho}\,\mathfrak{G}_{\beta\sigma} + \Lambda^\sigma_{\beta\varrho}\,\mathfrak{G}_{\alpha\sigma} = 0\,, \tag{33}$$

$$\Lambda^\sigma_{\varrho\alpha}\,\mathfrak{G}_{\sigma\beta} + \Lambda^\sigma_{\varrho\beta}\,\mathfrak{G}_{\sigma\alpha} = 0\,, \tag{34}$$

$$\Lambda^\alpha_{[\alpha\varrho]} = 0\,, \tag{35}$$

$$\overline{\mathfrak{S}}_{(\alpha\beta)} = 0\,, \tag{36}$$

$$\mathrm{d}\overline{\mathfrak{S}}_{[\alpha\beta]} = 0\,. \tag{37}$$

Sans chercher à résoudre le système (33) - (34), nous allons en faire une étude suffisante pour la suite.

(*) Ces considerations ont un caractère heuristique. Nous avons depuis repris cette étude sur des bases legèrement differentes. (Note ajoutée au moment de l'impression.)

Selon des notations déjà employées, (33) - (34) équivaut au système:

$$\Lambda^{\sigma}_{(\alpha\varrho)} h_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{(\beta\varrho)} h_{\alpha\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{[\alpha\varrho]} k_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{[\beta\varrho]} k_{\alpha\sigma} = 0 \,, \tag{38}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{(\alpha\varrho)} k_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{(\beta\varrho)} k_{\alpha\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{[\alpha\varrho]} h_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{[\beta\varrho]} h_{\alpha\sigma} = 0 \,. \tag{39}$$

Si $k_{\alpha\beta} = 0$, alors $\mathcal{G}_{\alpha\beta}$ est symétrique et le système se réduit à:

$$\Lambda^{\sigma}_{(\alpha\varrho)} h_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{(\beta\varrho)} h_{\alpha\sigma} = 0 \,, \tag{38 bis}$$

$$\Lambda^{\sigma}_{[\alpha\varrho]} h_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{[\beta\varrho]} h_{\alpha\sigma} = 0 \,. \tag{39 bis}$$

Par un calcul identique à celui des symboles de CHRISTOFFEL on déduit de (38 bis) que $\Lambda^{\sigma}_{(\alpha\varrho)} = 0$, tandis que (39 bis) traduit une propriété d'antisymétrie.

Dans ce cas le système ne détermine pas $\Lambda^{\alpha}_{\beta\gamma}$, mais $\Lambda_{\beta[\alpha\gamma]} = \Lambda^{\sigma}_{[\alpha\gamma]} h_{\beta\sigma}$ est antisymétrique en α, β, γ.

Si $k_{\beta\alpha} \neq 0$ on déduit de (38) par un calcul analogue à celui des symboles de CHRISTOFFEL:

$$\Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = h^{\lambda\alpha} [\Lambda^{\sigma}_{[\beta\gamma]} k_{\sigma\gamma} + \Lambda^{\sigma}_{[\lambda\gamma]} k_{\sigma\beta}] \,. \tag{40}$$

Puis on déduit de (39), en permutant circulairement et ajoutant,

$$\sum_{PC} \Lambda^{\sigma}_{(\alpha\gamma)} k_{\beta\sigma} = 0 \,.$$

Puis

$$\Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = k^{\varrho\alpha} [\Lambda^{\sigma}_{[\gamma\varrho]} h_{\beta\sigma} + \Lambda^{\sigma}_{[\beta\varrho]} h_{\gamma\sigma}] \tag{41}$$

et en rapprochant (40) et (41) on obtient:

$$\Lambda^{\sigma}_{[\beta\varrho]} (k^{\varrho\gamma} h_{\alpha\sigma} + h^{\varrho\gamma} k_{\sigma\alpha}) + \Lambda^{\sigma}_{[\alpha\varrho]} (h^{\varrho\gamma} k_{\sigma\beta} + k^{\varrho\gamma} h_{\beta\sigma}) = 0 \,,$$

ou encore:

$$\Lambda_{\beta[\alpha\varrho]} + \Lambda_{\alpha[\beta\varrho]} = k_{\varrho\sigma} h^{\lambda\sigma} [\Lambda^{\varrho}_{[\lambda\beta]} k_{\varrho\alpha} + \Lambda^{\varrho}_{[\lambda\alpha]} k_{\varrho\beta}] \,. \tag{42}$$

Notons enfin que

$$\nabla_{\varrho}\, g^{\alpha\beta} = \nabla_{\varrho}\, g^{\alpha^*\beta^*} = 0$$

donne:

$$\Lambda^{\beta}_{\sigma\varrho}\, \mathcal{G}^{\sigma\alpha} + \Lambda^{\alpha}_{\sigma\varrho}\, \mathcal{G}^{\sigma\beta} = 0\,, \qquad \Lambda^{\beta}_{\varrho\sigma}\, \mathcal{G}^{\alpha\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\varrho\sigma}\, \mathcal{G}^{\beta\sigma} = 0\,,$$

et en contractant β et ϱ il vient:

$$\Lambda^{\varrho}_{\sigma\varrho}\, \mathcal{G}^{\sigma\alpha} + \Lambda^{\alpha}_{\sigma\varrho}\, \mathcal{G}^{\sigma\varrho} = 0\,, \qquad \Lambda^{\varrho}_{\varrho\sigma}\, \mathcal{G}^{\alpha\sigma} + \Lambda^{\alpha}_{\varrho\sigma}\, \mathcal{G}^{\varrho\sigma} = 0\,,$$

d'où, si $\Lambda^{\varrho}_{\sigma\varrho} = \Lambda^{\varrho}_{\varrho\sigma}$,

$$\Lambda^{\varrho}_{\sigma\varrho}\, m^{\sigma\alpha} = 0\,,$$

soit, en supposant dét $| m^{\sigma\alpha} | \neq 0$,

(43) $$\Lambda^{\varrho}_{\alpha\varrho} = 0\,,$$

ce qui fait que:

(44) $$\overline{\mathcal{S}}_{\alpha\beta} = \partial_{\lambda}\, \Lambda^{\lambda}_{\beta\alpha} + L^{\lambda}_{\varrho\lambda}\, \Lambda^{\varrho}_{\beta\alpha} - L^{\lambda}_{\varrho\beta}\, \Lambda^{\varrho}_{\lambda\alpha} - \Lambda^{\lambda}_{\beta\varrho}\, L^{\varrho}_{\lambda\alpha}\,.$$

XII. – Étude approchée des nouvelles équations de champ.

Faison l'hypothèse que les $\Lambda^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$ sont au moins d'ordre 2 en $1/c$. D'après la première partie de cette Thèse le premier membre de (42) est infiniment grand par rapport au deuxième membre, donc en première approximation

(45) $$\Lambda_{\alpha[\beta\varrho]} + \Lambda_{\beta[\alpha\varrho]} = 0\,.$$

$\Lambda_{\alpha[\beta\varrho]}$ est antisymétrique, (40) montre que $\Lambda^{\alpha}_{(\beta\gamma)} = 0$, en négligeant des termes d'ordre 6 en $1/c$.

Compte tenu de nos hypothèses et résultats et en négligeant des termes d'ordre 4 au moins en $1/c$, on a:,

$\overline{\mathcal{S}}_{\alpha\beta} = \partial_{\lambda}\, \Lambda^{\lambda}_{[\beta\alpha]}$ donc $\overline{\mathcal{S}}_{(\alpha\beta)} = 0$ est satisfaite, $\Lambda_{0[2k]} = \Lambda^{0}_{[2k]}\, h_{00} + \Lambda^{i}_{[2k]}\, h_{0i} = \Lambda^{0}_{[2k]}$ ($i = 1, 2, 3$) à la même approximation, de même

$$\Lambda_{1[2k]} = -\Lambda^{1}_{[2k]}\,, \qquad \overline{\mathcal{S}}_{12} = \partial_3\, \Lambda_{1[23]} - \partial_0\, \Lambda_{0[12]}\,, \qquad \overline{\mathcal{S}}_{01} = \partial_2\, \Lambda_{0[12]} - \partial_3\, \Lambda_{0[31]}\,.$$

Nous poserons:

$$\Lambda_{0[12]} = \Lambda'_3 \qquad \text{(et deux formulex analogues)},$$

$$\Lambda_{1[23]} = \Lambda'_0\,.$$

Alors $\vec{A}(A'_1, A'_2, A'_3)$ sera un vecteur de $\mathcal{E}_3$,

(46) $$\left\{\begin{array}{l} \overline{\mathfrak{S}}_{12} = \partial_3 A'_0 - \partial_0 A'_3 \\ \overline{\mathfrak{S}}_{01} = \partial_2 A'_3 - \partial_3 A'_2 \end{array}\right. \quad \text{et des formules analogues.}$$

$d\overline{\mathfrak{S}}_{[\alpha\beta]} = 0$ est donc le seul système qui en première approximation s'ajoute à ceux de la première partie de ce travail. ($\overline{\mathfrak{S}}_{(\alpha\beta)} = 0$ et $\Sigma_\alpha = 0$ étant trivialement satisfaits.)

On obtient, avec $\sum\limits_{PC} \partial_i \mathfrak{S}_{[ik]} = 0$,

(47) $$\Delta A'_0 - \partial_0 (\mathrm{Div}\, \vec{A}') = 0 \quad (\Delta \text{ désigne ici le laplacien ordinaire}),$$

et avec $\partial_0 \overline{\mathfrak{S}}_{[jk]} + \partial_k \overline{\mathfrak{S}}_{[0j]} + \partial_j \overline{\mathfrak{S}}_{[k0]} = 0$,

(48) $$\Delta \vec{A}' = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \mathrm{Div}\, \vec{A}' - \partial_0 (\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \vec{A}'_0) + \partial_{00} \vec{A}',$$

ce qui peut encore s'écrire:

(49) $$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{A}' = \partial_0\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, A'_0,$$

$\partial_{00} \vec{\Delta}'$ étant négligeable par rapport au premier membre.

Donc sans hypothèse sur l'ordre de grandeur comparé de A'_0 et A'_i on obtient en première approximation:

(47) $$\Delta A'_0 = \partial_0\, \mathrm{Div}\, \vec{A}',$$

(49) $$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{A}' = \partial_0 (\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, A'_0).$$

Plusieurs interprétations sont évidemment possibles suivant l'ordre de grandeur comparée de $\vec{A}'$ et A'_0, (il est facile de voir que cinq cas principaux se présentent). Il paraît intéressant de supposer que $\vec{A}' = \vec{O}(A'_0) \cdot (1/c)$.

Alors les équations s'écrivent:

$$\Delta A_0' = 0 \,,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{A'} = \partial_0\,(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,A_0')\,,$$

elles ont la même forme que les équations (1-15) et (1-16) obtenues dans le Chapitre I (Première partie).

On peut poser:

$$A_0' = A/r\,,$$

$$\overrightarrow{A'} = -\,(A_0'/c)\,\overrightarrow{v}\,,$$

r désignant la distance euclidienne du point potentiant au point potentié, $\overrightarrow{v}$ la vitesse ordinaire de la particule $(\mathrm{d}\xi^i/\mathrm{d}t)$, A une constante. Alors:

$$\overline{\mathcal{F}}_{[12]} \cong \partial_3\,A_0'\,,$$

$$\overline{\mathcal{F}}_{[01]} \cong -\frac{1}{c}\left[\partial_2\,A_0'\,\frac{\mathrm{d}\xi^3}{\mathrm{d}t} - \partial_3\,A_0'\,\frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}t}\right].$$

Posant $\pi_3 = \overline{\mathcal{F}}_{[12]}$ (et deux formules analogues), $\pi_1' = \overline{\mathcal{F}}_{[01]}$ (et deux formules analogues), on aura alors:

$$\overrightarrow{\pi} = A\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(1/r)\,,$$

$$\overrightarrow{\pi'} = -\,(A/c)\,[\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(1/r)] \wedge \overrightarrow{v}\,.$$

Cela suggère une interprétation nouvelle en posant: $A = Gm$ (m = masse de la particule, G = constante de gravitation).

Le champ de gravitation et un nouveau champ seraient associés à la partie antisymétrique de $\overline{\mathcal{F}}_{[\alpha\beta]}$ (1).

---

(1) Les équations

$$\sum \alpha = 0,\quad \overline{\mathcal{F}}_{(\alpha\beta)} = 0,\quad \mathrm{d}\overline{\mathcal{F}}_{[\alpha\beta]} = 0$$

représenteraient la gravitation et une sorte de « magnéto-gravitation » lesquelles satisferaient à des équations en tout point analogues à celles de l'électro-magnétisme: la partie antisymétrique des tenseurs de Ricci représentant les composantes d'espaces de tous les champs.

Bibliographie.

[1] Y. BRUHAT, *Magnéto-hydrodynamique relativiste*, Séminaire Janet, 3 - ème année (1959-1960), n. 3.

[2] CALLAWAY, *The equations of motion in Einstein's new unified field theory*, Phys. Rev. (1954).

[3] J. CHAZY, *La théorie de la relativité et la mécanique céleste*, Tome II, G. Villars, Paris 1930.

[4] E. CLAUSER, *Movimento di particelle nel campo unitario einsteiniano*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., (8) **21** (1956), 408-406.

[5] ——, *Legge di moto nell'ultima teoria unitaria einsteiniana*, Nuovo Cimento (1958).

[6] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Théorie de la relativité restreinte*, Masson, Paris 1949.

[7] A. EINSTEIN, L. INFELD and B. HOFFMANN, *The gravitational equations and the problem of motion*, Ann. of Math., (2) **39** (1938), 65-100.

[8] F. HENNEQUIN - GUYON, *Thèse*, G. Villars, Paris 1958.

[9] V. HLAVATÝ, *Maxwell's field in the Einstein unified field theory*, J. Rational Mech. Anal. (1952-53-54).

[10] L. INFELD, *The new Einstein theory and the equations of motion*, Acta Phys. Polon (1950).

[11] A. LICHNEROWICZ, *Eléments de calcul tensoriel*, A. Colin, Paris 1951.

[12] ——, *Théories relativistes de la gravitation et de l'électromagnétisme*, Masson, Paris 1955.

[13] ——, *Théorie globale des connexions et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma 1955.

[14] ——, *Equations de Laplace et espaces harmoniques*, Colloque de Louvain 1953.

[15] ——, *Radiations gravitationnelles et électromagnétiques*, Rend. Mat. e Appl., (1958).

[16] ——, *Propagateurs - Quantification du champ*, Séminaire Janet (1959-60), n. 4.

[17] ——, *Courbure - Nombres de Betti*, Proc. Amer. Mat. Soc. (1950).

[18] F. MAURER-TISON, *Thèse*.

[19] J. MOFFAT, *Généralization of gravitation theory*, Cambridge.

[20] PHAM TAN HOANG, *Thèse ronéotypée*, Paris 1957.

[21] ——, *Sur la méthode des singularités en relativité générale*, C. R. Acad. Sci., Paris 1958.

[22] J. RENAUDIE, *Thèse*, Gauthier-Villars, Paris 1957.

[23] J. SCHOUTEN, *Ricci-Calculus*, Springer, Berlin 1954.

[24] M. A. TONNELAT, *Théorie du champ unifié d'Einstein*, G. Villars, Paris 1949.

[25] ——, *Les équations approchées de la théorie du champ unifié*, Nuovo Cimento (1956).

[26] H. TREDER, *Stomladungsdefinition und elektrische Kraft in der einheitlichen Feldtheorie*, Ann. Phys. Barth, Leipzig 1957.

[27] K. YANO, *The theorie of Lie derivations and its applications*, North Holland, Amsterdam 1955.

[28] K. YANO et S. BOCHNER, *Curvature and Betti numbers*, Princeton 1953.

Resumé.

Ce travail sur les théories unitaires en physique mathématique classique comprend deux parties essentiallement distinctes.

Dans une première partie nous avons essayé de donner une nouvelle signification concrète aux équations d'Einstein-Schrödinger, d'en déduire les équations de Maxwell-Lorentz dans le vide, la loi de mouvement des particules neutres ou chargées, la construction d'un tenseur d'énergie électro-magnétique.

Dans la deuxième partie nous avons refondu la théorie de ces auteurs dans un nouveau formalisme qui permet d'introduire naturellement de nouvelles variables de champ et de nouvelles équations sans pour autant augmenter le nombre de coordonnées de l'espace physique de configuration qui demeure un espace à quatre dimension, obtenant ainsi une nouvelle théorie unitaire qui contient la précédente comme cas particulier et apporte des possibilités d'interprétations nouvelles.

* * *