Riv. Mat. Univ. Parma (2) 5 (1964), 13-40

BIANCA MANFREDI (*)

Esistenza e unicità della soluzione di un problema di Meccanica non lineare. (**)

Introduzione.

Il soggetto del presente lavoro è il *Problema differenziale, d'ordine* 2, *di Meccanica non lineare*, individuato dal sistema seguente:

$$\text{(D)} \qquad \begin{cases} \ddot{x} + f(x,\ \dot{x}) + g(x) = \varphi(t) \\ x(0) = a, \qquad \dot{x}(0) = b\,, \end{cases}$$

dove:

1°) *t è la variabile indipendente in* $(0,\ +\infty)$, $x = x(t)$ *è la funzione incognita*, $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}t$, $\ddot{x} = \mathrm{d}^2x/\mathrm{d}t^2$;

2°) $f(u,\ v)$ *è funzione reale e univoca in tutto il piano cartesiano* $(u,\ v)$, *e ivi limitata, continua, lipschitziana*;

3°) $g(u)$ *è funzione reale e univoca in* $(-\infty,\ +\infty)$, *ed ivi crescente, continua, lipschitziana, essendo inoltre* $g(-\infty) = -\infty$, $g(0) = 0$, $g(+\infty) = +\infty$;

4°) $\varphi(t)$ *è funzione reale e univoca in* $(0,\ +\infty)$, *ed ivi limitata, continua, lipschitziana*;

5°) a, b *sono prefissati numeri* (*reali*).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1963-64. - Ricevuto il 10-V-1964.

Un tale problema si dirà brevemente, nel seguito, il *Problema differenziale non lineare* (D) od anche soltanto il *Problema differenziale* (D).

In questo lavoro mi propongo di indicare un nuovo metodo che, trasportando il Problema differenziale (D) nel discontinuo finito, mediante il Calcolo delle differenze finite, permette di dimostrare il seguente

Teorema (*di esistenza, di unicità e d'approssimazione*):

Il Problema differenziale (D) *ha una soluzione ed una sola, e tale soluzione si può individuare per approssimazioni successive.*

Ecco una traccia del metodo dimostrativo seguito.

Sia T un valore del tempo dato da un intero positivo *comunque* grande.

Per ogni intero $i = 2, 3, 4, \ldots$, faccio corrispondere in un certo modo determinato (n. **1.1**) un insieme σ_i, appartenente all'intervallo $(0, T)$, formato da punti razionali in numero finito.

In corrispondenza all'insieme σ_i, il Problema differenziale (D) individua un Problema alle differenze $(\underset{i}{\Delta})$ che ha una soluzione $x_i(t)$, definita su σ_i, ed una sola. Si ottiene così una determinata successione di funzioni:

$$x_i(t), \qquad (t \in \sigma_i;\ i = 2, 3, 4, \ldots).$$

Provo che questa successione di funzioni ha un limite $x_\infty(t)$, che risulta definito e uniformemente continuo su l'insieme dei punti razionali di $(0, T)$. Questa funzione $x_\infty(t)$ si può quindi completare per continuità su tutto $(0, T)$, e s'ottiene così una funzione che risulta senz'altro definita su tutto $(0, +\infty)$, in quanto T è un intero positivo comunque grande.

Provo, infine, che la funzione così ottenuta $x(t)$, $t \in (0, +\infty)$ è soluzione del Problema differenziale (D), ed è l'unica soluzione di tale problema.

Il metodo dimostrativo seguito è, poi, anche costruttivo in quanto dà la soluzione del Problema differenziale (D) per approssimazioni successive.

Osservazione. Mi sia ora permesso di fare sul metodo dimostrativo seguito qualche semplice rilievo: è un po' laborioso, ma in compenso ha dei vantaggi effettivi. Mi spiego:

1°) Questo metodo parte in guisa da operare su il discontinuo (razionale) finito, appartenente ad un intervallo $(0, T)$ comunque grande; i risultati ottenuti su tale discontinuo, con un passaggio al limite vengono trasportati a tutto il discontinuo razionale di $(0, T)$; questi ultimi risultati con altro passaggio al limite vengono estesi a tutto il continuo di $(0, T)$; infine con un ultimo passaggio al limite le affermazioni si hanno su tutto $(0, +\infty)$.

Ciò fa sì che si parte dai dati iniziali con considerazioni semplici e di tipo piuttosto algebrico.

2°) Va notato che l'introduzione del Calcolo delle differenze finite dona al metodo stesso una rilevante elementarità e flessibilità. Ciò mi permetterà di affrontare (in una prossima pubblicazione) la questione della periodicità della soluzione del Problema differenziale (D). Ciò mi permetterà ancora di attaccare (in prossimi lavori) dei Problemi di Fisica Matematica alle derivate parziali, d'ordine 2 e non lineari, ed anche altri problemi d'ordine maggiore di 2.

§ 1. - Preliminari.

1.1. - Il procedimento-fattoriale di suddivisione.

In corrispondenza ad ogni intero $i = 2, 3, 4, \ldots$, considero il numero $l_i = 1/i!$. Indi eseguo su l'intervallo $(0, +\infty)$ la suddivisione mediante i punti:

$$0,\ l_i,\ 2l_i,\ \ldots,\ i!\,l_i = 1,\ 1 + l_i,\ 1 + 2l_i,\ \ldots,\ 1 + i!\,l_i = 2,\ \ldots . \tag{1}$$

Detto T un valore del tempo dato da un intero positivo comunque grande, indichiamo con σ_i l'insieme dei punti (1) che appartengono all'intervallo $(0, T)$. Il procedimento di suddividere successivamente l'intervallo $(0, T)$ mediante i punti dei successivi insiemi

$$\sigma_2,\quad \sigma_3,\quad \sigma_4,\ \ldots,\ \sigma_i,\ \ldots$$

si dirà, brevemente, *il procedimento-fattoriale di suddivisione di* $(0, T)$.

Valgono le proprietà seguenti:

1°) *Risulta (proprietà d'inclusività)*

$$\sigma_2 \subset \sigma_3 \subset \sigma_4 \subset \ldots \subset \sigma_i \subset \ldots .$$

2°) *Se t è un qualunque numero razionale di* $(0, T)$, *esiste sempre un i_0 tale che sia*

$$t \in \sigma_i \qquad \textit{per ogni } i > i_0 .$$

3°) Più generalmente, *se $\mathfrak{I}$ è un qualunque insieme finito di numeri razionali di* $(0, T)$, *esiste sempre un i_0 tale che sia*

$$\mathfrak{I} \subset \sigma_i \qquad \textit{per ogni } i > i_0 .$$

4°) *Risulta*

$$\lim_{i\to\infty} \sigma_i = (0,\ T)_{\text{raz}},$$

indicando con $(0,\ T)_{\text{raz}}$ *l'insieme dei numeri razionali di* $(0,\ T)$.

1.2. - I Problemi alle differenze $(\underset{i}{\Delta})$.

Fissato un intero i $(=2, 3, 4, \ldots)$, consideriamo in $(0,\ T)$ l'insieme corrispondente σ_i, di punti razionali in numero finito, definito nel n. **1.1.**

Detta poi $\psi(t)$ una qualunque funzione definita in σ_i, poniamo:

$$(2') \quad \underset{l_i}{\Delta}\psi(t) \equiv \underset{(i)}{\Delta}\psi(t) = \{\psi(t) - \psi(t-l_i)\}/l_i \qquad (t \geqslant l_i),$$

$$(2'') \quad \underset{l_i}{\Delta^2}\psi(t) \equiv \underset{(i)}{\Delta^2}\psi(t) = \{\psi(t) - 2\psi(t-l_i) + \psi(t-2l_i)\}/\, l_i^2 \qquad (t \geqslant 2l_i),$$

$$(2''') \quad \underset{l_i}{\Delta^3}\psi(t) \equiv \underset{(i)}{\Delta^3}\psi(t) = \{\psi(t) - 3\psi(t-l_i) + 3\psi(t-2l_i) - \psi(t-3l_i)\}/l_i^3 \quad (t \geqslant 3l_i),$$

. . . .

Ciò posto, possiamo dire che il Problema differenziale (D) ci individua il *Problema alle differenze non lineare, d'ordine* 2, seguente:

$$(\underset{i}{\Delta}) \qquad \begin{cases} \underset{(i)}{\Delta^2}x_i(t) + f(x_i(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta}x_i(t-l_i)) + g(x_i(t-2l_i)) = \varphi(t) \\ x_i(0) = a, \qquad \{x_i(l_i) - x_i(0)\}/l_i = b, \end{cases}$$

dove:

1°) t (con $t \geqslant 2l_i$) *è la variabile indipendente in* σ_i, $x_i = x_i(t)$ *è la funzione incognita*, $\underset{(i)}{\Delta}x_i$, $\underset{(i)}{\Delta^2}x_i$ *hanno, rispettivamente, le espressioni definite da* (2′), (2″);

2°) $f(u,\ v)$, $g(u)$, $\varphi(t)$ *sono le stesse funzioni* (*con le stesse ipotesi*) *del Problema differenziale* (D).

Un tale problema si dirà, nel seguito, *il Problema alle differenze non lineare* $(\underset{i}{\Delta})$, *corrispondente all'intero i e associato al Problema differenziale* (D), o, brevemente, il *Problema alle differenze* $(\underset{i}{\Delta})$.

Se poi il sistema $(\underset{i}{\Delta})$ si pone nella forma più estesa

$$(\underset{i}{\Delta'}) \quad \begin{cases} x_i(t) = 2\,x_i(t-l_i) - x_i(t-2l_i) - l_i^2 \left\{ f(x_i(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) + \right. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \left. + \, g(x_i(t-2l_i)) - \varphi(t) \right\} \\ x_i(0) = a, \qquad x_i(l_i) = a + l_i b, \end{cases}$$

segue subito che i valori di $x_i(t)$ $(t = 2l_i,\ 3l_i,\ \ldots)$ s'ottengono tutti univocamente a partire dai valori iniziali. Si ha cioè:

Il Problema alle differenze $(\underset{i}{\Delta})$ *ha, nell'insieme* σ_i, *una soluzione* $x_i(t)$, *ed una sola.*

1.3. - Lemmi fondamentali.

Lemma I. *Detto* r *un intero positivo comunque grande, la successione*

$$x_r(t),\quad x_{r+1}(t),\ \ldots,\ x_i(t),\ \ldots$$

è in σ_r *equilimitata, equilipschitziana, equicontinua* (1).

Le stesse affermazioni valgono anche per ciascuna successione

$$\underset{(r)}{\Delta^N} x_r(t),\quad \underset{(r+1)}{\Delta^N} x_{r+1}(t),\ \ldots,\ \underset{(i)}{\Delta^N} x_i(t),\ \ldots,$$

essendo $N = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$.

Lemma II. *Detto* r *un intero positivo comunque grande, la successione*

$$x_r(t),\ x_{r+1}(t),\ \ldots,\ x_i(t),\ \ldots$$

è in σ_r *convergente, e la funzione limite* $x_\infty(t)$, *prolungata (facendo* $r \to \infty$*) in tutto* $(0,\ T)_{\text{raz}}$, *è limitata, continua (anzi uniformemente continua), lipschitziana.*

(1) Conviene notare che, per la proprietà d'inclusività (cfr. n. 1.1), l'insieme σ_r è il *campo comune di definizione* di tutte le funzioni sopra considerate.

Le stesse affermazioni valgono per ciascuna delle due successioni:

$$(*) \qquad \underset{(r)}{\Delta} x_r(t), \quad \underset{(r+1)}{\Delta} x_{r+1}(t), \quad \ldots, \quad \underset{(i)}{\Delta} x_i(t), \quad \ldots$$

$$(**) \qquad \underset{(r)}{\Delta^2} x_r(t), \quad \underset{(r+1)}{\Delta^2} x_{r+1}(t), \quad \ldots, \quad \underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t), \quad \ldots .$$

Inoltre, dette rispettivamente, $\overset{*}{x}_\infty(t)$ *e* $\overset{**}{x}_\infty(t)$ *le funzioni limiti di* $(*)$ *e* $(**)$ *prolungate (facendo* $r \to \infty$*) in tutto* $(0, T)_{\text{raz}}$*, risulta che la funzione* $x_\infty(t)$ *è razionalmente derivabile* (2) *con derivata* $\overset{*}{x}_\infty(t)$ *e, a sua volta,* $\overset{*}{x}_\infty(t)$ *è razionalmente derivabile con derivata* $\overset{**}{x}_\infty(t)$.

Lemma III. *La funzione* $x(t)$*, ottenuta completando per continuità la* $x_\infty(t)$*,* $t \in (0, T)_{\text{raz}}$ *in tutto* $(0, T)$*, ha in* $(0, T)$ *la derivata prima* $\dot{x}(t)$ *e la derivata seconda* $\ddot{x}(t)$*, e tali derivate si ottengono rispettivamente completando per continuità le funzioni*

$$\overset{*}{x}_\infty(t), \quad t \in (0, T)_{\text{raz}} ; \qquad \overset{**}{x}_\infty(t), \quad t \in (0, T)_{\text{raz}}$$

in tutto $(0, T)$.

1.4. - Alcune osservazioni.

Risultano utili, per il seguito, alcune osservazioni collegate alle ipotesi fatte sulle funzioni $f(u, v)$, $g(u)$, $\varphi(t)$ (cfr. pag. 13) e al Calcolo delle differenze finite.

1°) Per l'ammessa limitazione delle funzioni $f(u, v)$ e $\varphi(t)$, esisterà una costante $\gamma > 0$, tale che

$$(3) \qquad |f(u, v)| < \gamma \quad \text{per ogni } (u, v), \qquad |\varphi(t)| < \gamma \quad \text{in } (0, +\infty);$$

e, per l'ammessa lipschitzianità delle funzioni $f(u, v)$, $g(u)$, $\varphi(t)$, esiste-

(2) Si dirà che una funzione $F(t)$ è *razionalmente derivabile* in $t = t_0$ se il suo rapporto incrementale relativo a t_0 ha limite finito quando l'incremento h, dato a t_0, tende a zero per valori razionali (si scriverà $h \underset{\text{raz}}{\longrightarrow} 0$).

ranno tre costanti positive λ, μ e μ' tali che:

$$(4)\quad \begin{cases} |f(u_1, v_1) - f(u_2, v_2)| < \lambda\{|u_1 - u_2| + |v_1 - v_2|\} & \text{per ogni } u_1, v_1, u_2, v_2 \\ |g(u_1) - g(u_2)| < \mu\,|u_1 - u_2| & \text{per ogni } u_1, u_2 \\ |\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| < \mu'\,|t_1 - t_2| & \text{per ogni } t_1, t_2\,. \end{cases}$$

2°) Indicando poi con $\psi(t)$ una generica funzione definita in σ_i, per $(4)_2$ si ha

$$(5)\qquad g(\psi(t)) = g(\psi(t - l_i)) + l_i\,\mu_t \mathop{\Delta}_{(i)}\psi(t), \qquad \text{con } |\mu_t| \leqslant \mu,$$

da cui, detto n_i l'intero positivo tale che $t = n_i\, l_i$, risulta [3]:

$$(5')\qquad g(\psi(t)) = g(\psi(0)) + l_i \sum_{\varrho=1}^{n_i}\{\mu_{\varrho l_i} \cdot \mathop{\Delta}_{(i)}\psi(\varrho l_i)\},$$

onde

$$(5'')\qquad |g(\psi(t))| \leqslant |g(\psi(0))| + \mu\, l_i \sum_{\varrho=1}^{n_i} |\mathop{\Delta}_{(i)}\psi(\varrho l_i)|\,.$$

Osservo poi che nella (5'), e così anche in casi analoghi, con $\mathop{\Delta}_{(i)}\psi(\varrho l_i)$ intendo, per brevità, $[\mathop{\Delta}_{(i)}\psi(t)]_{t=\varrho l_i}$.

3°) Sia τ un numero razionale relativo e ν un intero positivo. Dalla formula, del Calcolo delle differenze finite,

$$F(t - \nu\,\tau) = \sum_{\varrho=0}^{\nu}(-1)^{\varrho}\binom{\nu}{\varrho}\tau^{\varrho}\mathop{\Delta^{\varrho}}_{\tau}F(t),$$

essendo

$$\mathop{\Delta}_{\tau}F(t) = \{F(t) - F(t-\tau)\}/\tau,$$

---

(3) Basta sommare membro a membro le n_i relazioni ottenute da (5) sostituendovi t successivamente con l_i, $2l_i$, $3l_i$, ..., $n_i\, l_i$ poi, eseguire le riduzioni evidenti, ed infine indicare, nel primo membro, $n_i l_i$ con t.

segue

$$\underset{\nu\tau}{\Delta}F(t) = \underset{\tau}{\Delta}F(t) - \frac{\nu-1}{2\,!}\,\tau\,\underset{\tau}{\Delta^2}F(t) + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{3\,!}\,\tau^2\,\underset{\tau}{\Delta^3}F(t) + \ldots\,, \tag{6}$$

dove nel secondo membro figurano ν termini. Per il seguito avranno interesse anche i due casi particolari (essendo $l_i = \nu\, l_j$):

$$F(t - l_i) = F(t) - \nu l_j \underset{(j)}{\Delta}F(t) + \frac{\nu(\nu-1)}{2\,!}\, l_j^2 \underset{(j)}{\Delta^2}F(t) - \ldots\,, \tag{6'}$$

$$F(t - 2l_i) = F(t) - 2\nu l_j \underset{(j)}{\Delta}F(t) + \frac{2\nu(2\nu-1)}{2\,!}\, l_j^2 \underset{(j)}{\Delta^2}F(t) - \ldots\,. \tag{6''}$$

Se poi le funzioni $\underset{(j)}{\Delta}F(t)$, $\underset{(j)}{\Delta^2}F(t)$, ..., $\underset{(j)}{\Delta^\nu}F(t)$ risultano *limitate*, le (6') (6''), usando le notazioni introdotte in [3] (4), si possono scrivere:

$$F(t - l_i) = F(t) - l_i \underset{(j)}{\Delta}F(t) + \frac{l_i(l_i - l_j)}{2\,!} \underset{(j)}{\Delta^2}F(t) + \mathcal{O}_1(t,\; l_i^3)\,, \tag{$\overline{6}'$}$$

$$F(t - 2l_i) = F(t) - 2l_i \underset{(j)}{\Delta}F(t) + l_i(2l_i - l_j) \underset{(j)}{\Delta^2}F(t) + \mathcal{O}_2(t,\; l_i^3). \tag{$\overline{6}''$}$$

---

(4) Preciso che: 1°) Con il simbolo

$$\mathcal{O}(t,\; l_i^k) \qquad \text{(essendo } k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\text{)}$$

indico una quantità (dipendente da t) infinitesima con l_i^k, d'ordine $\geqslant k$, cioè tale che (per ogni k fissato) esistano un $L > 0$ e un $\delta > 0$ tali che

$$|\, \mathcal{O}(t,\; l_i^k)/l_i^k \,| \leqslant L \qquad \text{per} \quad l_i < \delta.$$

2°) Invece, con il simbolo

$$\mathcal{O}(l_i^k) \qquad \text{(essendo } k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\text{)}$$

indico una quantità *positiva* (indipendente da t) infinitesima con l_i^k d'ordine $\geqslant k$.

Nel seguito per distinguere più quantità fra loro diverse del tipo $\mathcal{O}(t,\; l_i^k)$, uso i simboli

$$\mathcal{O}_1(t,\; l_i^k),\ \mathcal{O}_2(t,\; l_i^k),\ \ldots \quad \text{oppure} \quad \overline{\mathcal{O}}(t,\; l_i^k),\ \mathcal{O}^*(t,\; l_i^k),\ \ldots\,.$$

In modo analogo distinguo più quatnità fra loro diverse del tipo $\mathcal{O}(l_i^k)$.

§ 2. - Dimostrazione del Lemma I.

2.1. - Dimostrazione delle equilimitazioni.

2.1.1. – Provo dapprima che *la successione* $\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)$ $(i = r,\ r+1, \ldots)$ *è equilimitata in* σ_r.

A tale scopo scrivo l'equazione alle differenze figurante in $(\underset{i}{\Delta})$ nella forma seguente:

$$\underset{(i)}{\Delta} x_i(t) = \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i) - l_i \{ f(x_i(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) - \varphi(t) \} - l_i\, g(x_i(t-2l_i)) ,$$

da cui, per (3) e (5″), segue

$$| \underset{(i)}{\Delta} x_i(t) | \leqslant | \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i) | + l_i\, \gamma_0 + \mu l_i^2 \sum_{\varrho=1}^{n_i-2} | \underset{(i)}{\Delta} x_i(\varrho l_i) | , \tag{7}$$

avendo posto $\gamma_0 = 2\gamma + | g(a) |$. In particolare, per $t = 2l_i$, e $t = 3l_i$, si ha:

$$| \underset{(i)}{\Delta} x_i(2l_i) | \leqslant | \underset{(i)}{\Delta} x_i(l_i) | + l_i \gamma_0 ,$$

$$| \underset{(i)}{\Delta} x_i(3l_i) | \leqslant | \underset{(i)}{\Delta} x_i(2l_i) | + l_i \gamma_0 + \mu l_i^2 | \underset{(i)}{\Delta} x_i(l_i) | ;$$

le quali, posto

$$b_0 = | b | \equiv | \underset{(i)}{\Delta} x_i(l_i) | , \qquad M = \max\,(b_0,\ \gamma_0),$$

e *supposto* (come è lecito, senza restrizione) $\mu \geqslant 1$, dànno:

$$| \underset{(i)}{\Delta} x_i(2l_i) | \leqslant b_0 + l_i \gamma_0 \leqslant M \cdot (1 + \mu l_i),$$

$$\begin{aligned} | \underset{(i)}{\Delta} x_i(3l_i) | &\leqslant M \cdot (1 + \mu l_i) + l_i\, \gamma_0 + \mu l_i^2\, b_0 \\ &\leqslant M \cdot (1 + \mu l_i) + M l_i (1 + \mu l_i) \leqslant M \cdot (1 + \mu l_i)^2, \end{aligned}$$

ossia dunque:

$$| \underset{(i)}{\Delta} x_i(2l_i) | \leqslant M \cdot (1 + \mu l_i), \tag{7$_2$}$$

$$| \underset{(i)}{\Delta} x_i(3l_i) | \leqslant M \cdot (1 + \mu l_i)^2. \tag{7$_3$}$$

Ragiono ora induttivamente: suppongo (*ipotesi* $\mathfrak{L}$) che disuguaglianze analoghe alle $(7)_2$ e $(7)_3$ si abbiano anche per $|\underset{(i)}{\Delta} x_i(4l_i)|$, $|\underset{(i)}{\Delta} x_i(5l_i)|$, ecc. fino a $|\underset{(i)}{\Delta} x_i(\nu l_i)|$, con ν intero positivo generico. Dico allora che è anche

$$(7)_{\nu+1} \qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_i((\nu+1)l_i)| \leqslant M\cdot(1+\mu l_i)^{\nu}.$$

Infatti, per la (7) abbiamo:

$$|\underset{(i)}{\Delta} x_i(\nu+1)l_i)| \leqslant |\underset{(i)}{\Delta} x_i(\nu l_i)| + l_i\gamma_0 + \mu l_i^2\{|\underset{(i)}{\Delta} x_i(l_i)| + |\underset{(i)}{\Delta} x_i(2l_i)| + \dots +$$
$$+ |\underset{(i)}{\Delta} x_i(\nu-1)l_i)|\},$$

da cui, per la precedente ipotesi $\mathfrak{L}$, e tenendo presente che è $|\underset{(i)}{\Delta} x_i(l_i)| = b_0$,

$$|\underset{(i)}{\Delta} x_i((\nu+1)l_i)| \leqslant M(1+\mu l_i)^{\nu-1} + (l_i\gamma_0 + \mu l_i^2 b_0) + \mu l_i^2 M\{(1+\mu l_i) +$$
$$+ (1+\mu l_i)^2 + \dots + (1+\mu l_i)^{\nu-2}\},$$

ed essendo

$$l_i\gamma_0 + \mu l_i^2 b_0 \leqslant M l_i(1+\mu l_i),$$

si ha ancora

$$|\underset{(i)}{\Delta} x_i((\nu+1)l_i)| \leqslant M\left\{(1+\mu l_i)^{\nu-1} + l_i(1+\mu l_i) + \mu l_i^2 \frac{(1+\mu l_i)^{\nu-1} - (1+\mu l_i)}{(1+\mu l_i)-1}\right\} =$$
$$= M\{(1+\mu l_i)^{\nu-1} + l_i(1+\mu l_i)^{\nu-1}\} \leqslant M\cdot(1+\mu l_i)^{\nu}.$$

Si è così ottenuta la $(7)_{\nu+1}$, e si può concludere che la $(7)_{\nu+1}$ vale per ogni intero ν; in particolare per $\nu+1 = n_i$ (tale che $n_i\, l_i = t$) si ha

$$(8) \qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)| \leqslant M\cdot(1+\mu l_i)^{n_i-1}.$$

Noto ora che è

$$(1+\mu l_i)^{n_i-1} < (1+\mu l_i)^{n_i} = (1+\mu l_i)^{t/l_i} = [(1+\mu l_i)^{1/(\mu l_i)}]^{\mu t} < e^{\mu t} \leqslant e^{\mu T}.$$

Onde da (8) discende

$$(9) \qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)| < Me^{\mu T}.$$

Ciò prova la limitazione di $\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)$ in σ_i e quindi in σ_r. Inoltre, poichè il secondo membro di (9) non dipenda da i, resta conclusa la equilimitazione da dimostrare in σ_r.

2.1.2. – *La equilimitazione in σ_r della successione*

$$x_i(t) \qquad (i = r,\ r+1,\ r+2, \dots)$$

segue facilmente dalla (9). Infatti, da (9) discende manifestamente

$$(9') \qquad |x_i(t)| < |x_i(t - l_i)| + l_i Me^{\mu T},$$

da cui si ottiene (5)

$$(10) \qquad |x_i(t)| \leqslant |a| + tMe^{\mu T} \leqslant |a| + TMe^{\mu T}.$$

Provo ora *la equilimitazione in σ_r della successione*

$$\underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t) \qquad (i = r,\ r+1,\ r+2, \dots).$$

Si ha anzitutto, in virtù dell'equazione alle differenze figurante in $(\underset{i}{\Delta})$,

$$|\underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t) \leqslant |f(x_i(t - l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t - l_i))| + |g(x_i(t - 2l_i))| + |\varphi(t)|,$$

ed anche, per le (3),

$$(11) \qquad |\underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t)| \leqslant 2\gamma + |g(x_i(t - 2l_i))|.$$

Ora, per (10), è

$$-|a| - TMe^{\mu T} < x_i(t - 2l_i) < |a| + TMe^{\mu T},$$

da cui, tenendo presente le ipotesi fatte sulla funzione $g(u)$,

$$g(-|a| - TMe^{\mu T}) < g(x_i(t - 2l_i)) < g(|a| + TMe^{\mu T}),$$

(5) Basta sommare membro a membro le n_i relazioni ottenute da (9') sostituendovi t successivamente con l_i, $2l_i$, $3l_i$, ..., $n_i l_i$, poi eseguire le riduzioni evidenti, ed infine indicare, nel primo membro, $n_i l_i$ con t.

cioè

$$| g(x_i(t-2l_i)) | < G,$$

essendo $G = \max \left(g(-| a | - TMe^{\mu T}), \quad g(| a | + TMe^{\mu T})\right)$. Pertanto dalla (11) segue

$$(11') \qquad | \underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t) | < 2\gamma + G,$$

il che prova quanto si voleva concludere.

Provo ora *la equilimitazione in* σ_r *della successione*

$$\underset{(i)}{\Delta^3} x_i(t) \qquad (i = r, \ r+1, \ r+2, \ldots).$$

Si ha, in virtù dell'equazione alle differenze figurante in $(\underset{i}{\Delta})$,

$$(12) \quad | \underset{(i)}{\Delta^3} x_i(t) | \leqslant | \underset{(i)}{\Delta} f(x_i(t-l_i), \ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) | + | \underset{(i)}{\Delta} g(x_i(t-2l_i)) | + | \underset{(i)}{\Delta} \varphi(t) | .$$

D'altra parte, per la lipschitzianità delle funzioni $f(u, v)$, $g(u)$, $\varphi(t)$ [cfr. (4)] risulta

$$| \underset{(i)}{\Delta} f(x_i(t-l_i), \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) | = (1/l_i) \cdot | f(x_i(t-l_i), \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) - f(x_i(t-2l_i), \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-2l_i)) |$$

$$\leqslant \lambda \{ | \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i) | + | \underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t-l_i) | \},$$

$$| \underset{(i)}{\Delta} g(x_i(t-2l_i)) | = (1/l_i) \cdot | g(x_i(t-2l_i)) - g(x_i(t-3l_i)) | \leqslant \mu \cdot | \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-2l_i) | ,$$

e infine

$$| \underset{(i)}{\Delta} \varphi(t) | = (1/l_i) \, |\varphi(t) - \varphi(t-l_i) | \leqslant \mu' .$$

Da queste maggiorazioni e tenendo presente (9) e (10), segue allora la equilimitazione da provare.

Così continuando si conclude pure che *ciascuna delle successioni*

$$\underset{(i)}{\Delta^N} x_i(t) \qquad (i = r, \ r+1, \ldots)$$

ottenute facendo $N = 4, \ 5, \ldots,$ *è equilimitata in* σ_r.

2.2. - Dimostrazione delle equilipschitzianità.

Provo che *la successione* $x_i(t)$ $(i = r, r+1, r+2, \ldots)$ *è equilipschitziana in* σ_r.

Provo anzitutto che una qualunque $x_i(t)$, con $i \geqslant r$, è lipschitziana nel suo insieme σ_i. Siano t' e t'' $(t' < t'')$ due qualunque numeri di σ_i: si avrà

$$t' = n_i' l_i, \qquad t'' = n_i'' l_i \qquad\qquad (n_i' < n_i'') .$$

Allora, essendo

$$| x_i(t') - x_i(t'') | = l_i \,\Big| \sum_{\varrho = n_i'+1}^{n_i''} \underset{(i)}{\Delta} x_i(\varrho l_i) \Big| \leqslant l_i \sum_{\varrho = n_i'+1}^{n_i''} \Big| \underset{(i)}{\Delta} x_i(\varrho l_i) \Big| ,$$

per la (9) risulta $\quad | x_i(t') - x_i(t'') | \leqslant l_i(n_i'' - n_i') M e^{\mu T}$, cioè

$$| x_i(t') - x_i(t'') | \leqslant M e^{\mu T} (t'' - t') , \tag{10}$$

il che prova la lipschitzianità di $x_i(t)$ in σ_i e quindi anche in σ_r. Inoltre, poichè nel secondo membro di (10) il moltiplicatore di $t'' - t'$ non dipende da i, resta anche conclusa la equilipschitzianità da provare.

In modo analogo si ragiona per provare l'*equilipschitzianità in* σ_r *di ciascuna delle successioni* $\underset{(i)}{\Delta^N} x_i(t)$ $(i = r, r+1, \ldots)$ *ottenute facendo* $N = 1, 2, 3, \ldots$.

2.3. - Dimostrazione delle equicontinuità.

Provo che la successione $x_i(t)$ $\quad (i = r, r+1, \ldots)$ *è equicontinua in* σ_r.

Ciò discende subito dalla disuguaglianza (10) precedente, ossia da

$$| x_i(t') - x_i(t'') | \leqslant M e^{\mu T} \, | t' - t'' | . \tag{10}$$

Infatti, preso un $\varepsilon > 0$ basterà imporre a $| t' - t'' |$ la condizione

$$M e^{\mu T} \, | t' - t'' | < \varepsilon . \tag{11}$$

Allora, se r è abbastanza grande, esisteranno in σ_r dei punti soddisfacenti la (11), ed abbiamo che: preso ad arbitrio un $\varepsilon > 0$ esiste un $\delta = \varepsilon e^{-\mu T}/M$ tale che sia

$$|x_i(t') - x_i(t'')| < \varepsilon \qquad \text{per} \quad \begin{cases} t',\ t'' \in \sigma_r \\ |t' - t''| < \delta \\ i = r,\ r+1, \dots . \end{cases}$$

In modo analogo si ragiona per provare l'*equicontinuità in* σ_r *(con* r *abbastanza grande) di ciascuna delle successioni*

$$\underset{(i)}{\Delta}^N x_i(t) \qquad (i = r,\ r+1, \dots)$$

ottenute facendo $N = 1,\ 2,\ 3, \dots$.

§ 3. - Dimostrazione del Lemma II.

3.1. - Dimostrazione di convergenza in σ_r della successione $x_i(t)$ $(i = r,\ r+1, \dots)$, e delle proprietà del corrispondente limite $x_\infty(t)$.

3.1.1. – Essendo sempre r un intero positivo prefissato (del resto comunque grande), consideriamo la successione $x_i(t)$ $(i = r,\ r+1, \dots)$. Dico che, preso un $\varepsilon > 0$, esiste un intero i_ε, indipendente da t, tale che

$$(13) \qquad |x_{i,j}(t)| < \varepsilon \qquad (t \in \sigma_r, \quad r \leqslant i_\varepsilon < i < j),$$

avendo posto $x_{i,j}(t) = x_i(t) - x_j(t)$. Per provare ciò basta, manifestamente, mostrare che è [cfr. annotazione (4)]:

$$(14) \qquad |x_{i,j}(t)| = \mathcal{O}(l_i) \qquad (t \in \sigma_r, \quad r \leqslant i_\varepsilon < i < j).$$

Dimostro allora la (14). Essendo $i < j$, considero l'espressione

$$H_{i,j}(t) \equiv 2x_j(t - l_i) - x_j(t - 2l_i) - l_i^2 \{ f(x_j(t - l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_j(t - l_i)) + g(x_j(t - 2l_i)) - \varphi(t) \}$$

[ottenuta dal secondo membro dell'equazione alle differenze figurante in $(\underset{i}{\Delta'})$ mutando, materialmente, solo l'indice i di x con l'indice j].

Dalle $(\overline{6}')$, $(\overline{6}'')$, per il Lemma I, segue (7):

$$(15)\quad \begin{cases} 2x_j(t-l_i) - x_j(t-2l_i) = x_j(t) - l_i^2 \underset{(j)}{\Delta^2} x_j(t) + \mathcal{O}_1(t,\ l_i^3) \\ f(x_j(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_j(t-l_i)) = f(x_j(t-l_j),\ \underset{(j)}{\Delta} x_j(t-l_j)) + \mathcal{O}_2(t,\ l_i) \\ g(x_j(t-2l_i)) = g(x_j(t-2l_j)) + \mathcal{O}_3(t,\ l_i). \end{cases}$$

Pertanto, tenendo presente che $x_j(t)$ è soluzione del Problema alle differenze $(\underset{j}{\Delta})$, $H_{i,j}(t)$ prende la forma

$$H_{i,j}(t) = x_j(t) + \mathcal{O}_4(t,\ l_i^3).$$

Ricavando qui $x_j(t)$ e sostituendo ad $H_{i,j}(t)$ la sua espressione iniziale, ottengo:

$$(16)\qquad x_j(t) = 2x_j(t-l_i) - x_j(t-2l_i) - l_i^2\{ f(x_j(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_j(t-l_i)) + \\ + g(x_j(t-2l_i)) - \varphi(t) \} - \mathcal{O}_4(t,\ l_i^3).$$

Sottraendo, ora membro a membro da $(\underset{i}{\Delta'})_1$ la (16) e dividendo poi per l_i, risulta

$$(17)\qquad \underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t) = \underset{(i)}{\Delta}\, x_{i,j}(t-l_i) - l_i\{ f_{i,j}(t) + g_{i,j}(t) \} + (1/l_i)\mathcal{O}_4(t,\ l_i^3),$$

con

$$\begin{cases} f_{i,j}(t) = f\,(x_i(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) - f(x_j(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_j(t-l_i)) \\ g_{i,j}(t) = g(x_i(t-2l_i)) - g(x_j(t-2l_i)). \end{cases}$$

---

(7) Infatti la $(15)_1$ discende facilmente dalle $(\overline{6}')$, $(\overline{6}'')$. D'altra parte da $(4)_1$ segue

$$(*)\quad f(x_j(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_j(t-l_i)) = f(x_j(t-l_j),\ \underset{(j)}{\Delta} x_j)) + \lambda_t\ \{ | x_j(t-l_i) - x_j(t-l_j) | + \\ | \underset{(i)}{\Delta} x_j(t-l_i) - \underset{(j)}{\Delta} x_j(t-l_j) | \},$$

essendo $|\lambda_t| \leqslant \lambda$. Ora per le $(\overline{6}')$, $(\overline{6}'')$ risulta

$$(**)\quad \begin{cases} | x_j(t-l_i) - x_j(t-l_j) | = | (l_i - l_j)\underset{(j)}{\Delta} x_j(t) | = \mathcal{O}_2'(l_i) \\ | \underset{(i)}{\Delta} x_j(t-l_i) - \underset{(j)}{\Delta} x_j(t-l_j) | = | \{ l_j + (l_i - l_j)/2 - (2l_i - l_j) \} \underset{(j)}{\Delta^2} x_j(t) | = \mathcal{O}_2''(l_i). \end{cases}$$

Da (*) e da (**) segue allora la $(15)_2$. Infine per ottenere la $(15)_3$ basta applicare ad $x_j(t)$ la (5′) assumendo quale istante iniziale $t - 2l_i$ e quale istante finale $t - 2l_j$.

Dalla relazione (17) segue allora

$$(18) \qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t)| \leqslant |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| + l_i |f_{i,j}(t) + g_{i,j}(t)| + \overline{\mathcal{O}}_4(l_i^2).$$

D'altra parte per le (4) si ha

$$|f_{i,j}(t) + g_{i,j}(t)| \leqslant |f_{i,j}(t)| + |g_{i,j}(t)| \leqslant$$
$$\leqslant \lambda \{ |x_{i,j}(t-l_i)| + |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| \} + \mu |x_{i,j}(t-2l_i)|,$$

ed anche [8]

$$|f_{i,j}(t) + g_{i,j}(t)| \leqslant (1+l_i)\lambda |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| + (\lambda+\mu) |x_{i,j}(t-2l_i)|,$$

cioè [9] (*essendo* $x_{i,j}(0) = 0$):

$$|f_{i,j}(t) + g_{i,j}(t)| \leqslant (1+l_i)\lambda |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| + (\lambda+\mu) l_i \sum_{\varrho=1}^{n_i-2} |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(\varrho l_i)|.$$

In conseguenza della maggiorazione ora ottenuta, ponendo

$$\alpha_i = 1 + (1+l_i)\lambda\, l_i, \qquad \beta = \lambda + \mu,$$

in luogo della (18) si ha

$$(19) \qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t)| \leqslant \alpha_i |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| + l_i\, \overline{\mathcal{O}}(l_i) + \beta\, l_i^2 \sum_{\varrho=1}^{n_i-2} |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(\varrho l_i)|,$$

---

[8] Infatti: $|x_{i,j}(t-l_i)| + |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| \equiv$
$\equiv \{ |x_{i,j}(t-l_i)| - |x_{i,j}(t-2l_i)| \} + |x_{i,j}(t-2l_i| + |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)|$
$\leqslant l_i |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| + |x_{i,j}(t-2l_i)| + |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| = (1+l_i) |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t-l_i)| +$
$+ |x_{i,j}(t-2l_i)|.$

[9] Si tenga presente che, essendo $t = n_i\, l_i$, si ha $x_{i,j}(t-2l_i) = x_{i,j}\big((n-2)l_i\big) =$
$= x_{i,j}(0) + l_i \sum_{\varrho=1}^{n_i-2} \underset{(i)}{\Delta}\, x_{i,j}(\varrho l_i)$.

relazione analoga alla (7) del n. **2.1.** Ora si ha [10]

$$(20)\qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(l_i)| = \tilde{\mathcal{O}}(l_i), \qquad 1+\beta l_i > \alpha_i + l_i, \qquad \mathcal{O}(l_i) = \max\{\bar{\mathcal{O}}(l_i),\ \tilde{\mathcal{O}}(l_i)\},$$

e, per i casi particolari $t = 2l_i$, $t = 3l_i$ [in analogia con $(7)_2$ e $(7)_3$]:

$$(19)_2\qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(2l_i)| \leqslant (1+\beta l_i)\,\mathcal{O}(l_i),$$

$$(19)_3\qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(3l_i)| \leqslant (1+\beta l_i)^2\,\mathcal{O}(l_i).$$

Pertanto, *procedendo per induzione, analogamente al n.* **2.1**, s'otterrà

$$(21)\qquad |\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(t)| < \mathcal{O}(l_i)\, e^{\beta T} = \mathcal{O}(l_i)$$

[relazione analoga alla (9) del n. **2.1**].

Dalla (21) risulta poi

$$(21')\qquad |x_{i,j}(t)| \leqslant |x_{i,j}(t-l_i)| + l_i\,\mathcal{O}(l_i);$$

allora, sommando membro a membro le n_i relazioni ottenute sostituendo alla t in (21′) successivamente l_i, $2l_i$, ..., $n_i l_i$, si ottiene (tenendo presente che è $x_{i,j}(0) = x_{i,j} = 0$):

$$(21'')\qquad |x_{i,j}(t)| \leqslant t\cdot\mathcal{O}(l_i) \leqslant T\cdot\mathcal{O}(l_i),$$

cioè la (13).

3.1.2 - Proprietà del limite $x_\infty(t)$.

Pongo

$$x_\infty(t) = \lim_{i\to\infty} x_i(t) \qquad (t \in \sigma_r).$$

---

[10] La $(20)_1$ si ottiene osservando che è: $\underset{(i)}{\Delta} x_{i,j}(l_i) = b - \underset{(i)}{\Delta} x_j(l_i) = \{b - \underset{(j)}{\Delta} x_j(l_j)\} + \{\underset{(j)}{\Delta} x_j(l_j) - \underset{(i)}{\Delta} x_j(l_i)\} = \underset{(j)}{\Delta} x_j(l_j) - \underset{(i)}{\Delta} x_j(l_i) = \{\underset{(j)}{\Delta} x_j(l_j) - \underset{(j)}{\Delta} x_j(l_i)\} + \{\underset{(j)}{\Delta} x_j(l_i) - \underset{(i)}{\Delta} x_j(l_i)\}$ dove le due differenze sono infinitesime con $l_i - l_j$, e quindi con l_i [ciò, per la prima differenza in virtù della equilipschitzianità di $\underset{(j)}{\Delta} x_j(t)$, per la seconda differenza in virtù della $(\bar{6}')$ ove si ponga $F(t) = x_j(t)$ e indi $t = l_i$].

La $(20)_2$ segue subito dalla definizione di α_i e β, potendo supporre (senza perdere in generalità) $\mu > 1 + \lambda l_i$.

Per il Lemma I, la funzione $x_\infty(t)$ risulta in σ_r limitata, continua (anzi uniformemente continua), lipschitziana. Inoltre, essendo r comunque grande, le stesse affermazioni valgono anche quando la funzione $x_\infty(t)$ viene prolungata (facendo $r \to \infty$) in tutto $(0, T)_{\text{raz}}$.

3.2. - Dimostrazione di convergenza in σ_r della successione $\underset{(i)}{\Delta x_i}(t)$ $(i = r, r+1, \ldots)$, e proprietà del corrispondente limite $\overset{*}{x}_\infty(t)$.

Essendo sempre r un intero positivo prefissato (del resto comunque grande), consideriamo la successione $\underset{(i)}{\Delta x_i}(t)$ $(i = r,\ r+1,\ \ldots)$. Dico che, preso un $\varepsilon > 0$, esiste un intero i_ε, indipendente da t, tale che

$$(22) \qquad |\underset{(i)}{\Delta x_i}(t) - \underset{(j)}{\Delta x_j}(t)| < \varepsilon \qquad (t \in \sigma_r;\ r \leqslant i_\varepsilon < i < j).$$

Per provare ciò basta, manifestamente, mostrare che è [cfr. annotazione (4)]

$$(22') \qquad |\underset{(i)}{\Delta x_i}(t) - \underset{(j)}{\Delta x_j}(t)| = \mathcal{O}(l_i) \qquad (t \in \sigma_r;\ r \leqslant i_\varepsilon < i < j).$$

Ora, essendo $i < j$, dall'identità

$$\underset{(i)}{\Delta x_i}(t) - \underset{(j)}{\Delta x_j}(t) \equiv \{\underset{(i)}{\Delta x_i}(t) - \underset{(i)}{\Delta x_j}(t)\} + \{\underset{(i)}{\Delta x_j}(t) - \underset{(j)}{\Delta x_j}(t)\}$$

segue

$$|\underset{(i)}{\Delta x_i}(t) - \underset{(j)}{\Delta x_j}(t)| \leqslant |\underset{(i)}{\Delta x_i}(t) - \underset{(i)}{\Delta x_j}(t)| + |\underset{(i)}{\Delta x_j}(t) - \underset{(j)}{\Delta x_j}(t)|,$$

da cui, quando si tengano presenti la (21) e la $(\overline{6}')$, si ottiene proprio la (22').

Posto poi

$$(22'') \qquad \overset{*}{x}_\infty(t) = \lim_{i \to \infty} \underset{(i)}{\Delta x_i}(t) \qquad (t \in \sigma_r),$$

per il Lemma I la funzione $\overset{*}{x}_\infty(t)$ risulta in σ_r limitata, continua (anzi uniformemente continua), lipschitziana. Inoltre, essendo r comunque grande, le stesse affermazioni valgono anche quando la funzione $\overset{*}{x}_\infty(t)$ vien prolungata (facendo $r \to \infty$) in tutto $(0, T)_{\text{raz}}$.

3.3. - Dimostrazione di convergenza in σ_r della successione $\underset{(i)}{\Delta}^2 x_i(t)$ $(i = r, r+1, \ldots)$, e proprietà del corrispondente limite $\overset{**}{x}_\infty(t)$.

Essendo sempre r un intero positivo prefissato (del resto comunque grande), consideriamo la successione $\underset{(i)}{\Delta}^2 x_i(t)$ $(i = r,\ r+1\ ,\ldots)$. Dico che, preso un $\varepsilon > 0$, esiste un intero i_ε, indipendente da t, tale che

$$\left| \underset{(i)}{\Delta}^2 x_i(t) - \underset{(j)}{\Delta}^2 x_j(t) \right| < \varepsilon \qquad (t \in \sigma_r;\quad r \leqslant i_\varepsilon < i < j)\,. \tag{23}$$

Per provare ciò, basta, manifestamente, mostrare che è

$$\left| \underset{(i)}{\Delta}^2 x_i(t) - \underset{(j)}{\Delta}^2 x_j(t) \right| = \mathcal{O}(l_i) \qquad (t \in \sigma_r;\quad r \leqslant i_\varepsilon < i < j)\,. \tag{23$'$}$$

Dimostro allora la (23′). Essendo $i < j$, sottraggo membro a membro dall'equazione alle differenze figurante in $(\underset{i}{\Delta})$ l'analoga equazione alle differenze figurante in $(\underset{j}{\Delta})$, ottenendo:

$$\underset{(i)}{\Delta}^2 x_i(t) - \underset{(j)}{\Delta}^2 x_j(t) + \bar{f}_{i,j}(t) + \bar{g}_{i,j}(t) = 0,$$

con

$$\begin{cases} \bar{f}_{i,j}(t) = f(x_i(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) - f(x_j(t-l_j),\ \underset{(j)}{\Delta} x_j(t-l_j)) \\ \bar{g}_{i,j}(t) = g(x_i(t-2l_i)) - g({}_j(t-2l_j)). \end{cases}$$

Ne segue

$$\left| \underset{(i)}{\Delta}^2 x_i(t) - \underset{(j)}{\Delta}^2 x_j(t) \right| \leqslant \left| \bar{f}_{i,j}(t) + \bar{g}_{i,j}(t) \right|. \tag{24}$$

D'altra parte per le (4) si ha

$$\left| \bar{f}_{i,j}(t) + \bar{g}_{i,j}(t) \right| \leqslant \left| \bar{f}_{i,j}(t) \right| + \left| \bar{g}_{i,j}(t) \right| \leqslant \lambda \left\{ \left| x_i(t-l_i) - x_j(t-l_j) \right| + \right.$$

$$\left. + \left| \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i) - \underset{(j)}{\Delta} x_j(t-l_j) \right| \right\} + \mu \left| x_i(t-2l_i) - x_j(t-2l_j) \right|,$$

ed anche, tenendo presente la equilipschitzianità in σ_r delle successioni $x_i(t)$, $\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)$, $(i = r,\ r+1, \ldots)$ (cfr. n. **2.2**),

$$|\bar{f}_{i,j}(t) + \bar{g}_{i,j}(t)| \leqslant \mathcal{O}_1(l_i) +$$

$$+ \lambda \left\{ |x_i(t - l_i) - x_j(t - l_i)| + |\underset{(i)}{\Delta} x_i(t - l_i) - \underset{(j)}{\Delta} x_j(t - l_i)| \right\} +$$

$$+ \mu\, |x_i(t - 2l_i) - x_j(t - 2l_i)|\,,$$

da cui, per (21″) e (22′),

$$|\bar{f}_{i,j}(t) + \bar{g}_{i,j}(t)| = \mathcal{O}(l_i)\,.$$

Pertanto, in virtù della (24), rimane provata la (23′).

Detta poi

$$\overset{**}{x}_\infty(t) = \lim_{i \to +\infty} \underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t), \tag{23″}$$

per il Lemma I, la funzione $\overset{**}{x}_\infty(t)$ risulta in σ_r limitata, continua (anzi uniformemente continua), lipschitziana. Inoltre, essendo r comunque grande, le stesse affermazioni valgono anche quando la funzione $\overset{**}{x}_\infty(t)$ viene prolungata (facendo $r \to \infty$) in tutto $(0,\ T)_{\mathrm{raz}}$.

3.4. - Dimostrazione della razionale derivabilità di $x_\infty(t)$, $t \in (0,\ T)_{\mathrm{raz}}$.

Tenendo presente che è $\underset{h}{\Delta} x_\infty(t) = \{ x_\infty(t) - x_\infty(t - h) \} / h$, dimostro che $x_\infty(t)$ è razionalmente derivabile in $(0,\ T)_{\mathrm{raz}}$ [cfr. annotazione ([2])], e che, precisamente, si ha

$$\lim_{\substack{h \to 0 \\ \mathrm{raz}}} \underset{h}{\Delta} x_\infty(t) = \overset{*}{x}_\infty(t)\,, \qquad t \in (0,\ T)_{\mathrm{raz}}\,. \tag{26}$$

Basterà concludere questa affermazione per $t \in \sigma_r$.

Distinguo due casi: $h \underset{\mathrm{raz}}{\longrightarrow} 0^+$, $h \underset{\mathrm{raz}}{\longrightarrow} 0^-$.

C a s o $h \underset{\mathrm{raz}}{\longrightarrow} 0^+$. Per ogni $h > 0$, razionale e fissato comunque piccolo, sia i sufficientemente grande in modo da aversi

$$h = \nu\, l_i \qquad (\nu \text{ intero positivo conveniente}).$$

In virtù di (6) risulta

$$\underset{h}{\Delta} x_\infty(t) \equiv \underset{\nu l_i}{\Delta} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t) + \mathcal{O}(t,\ h)\ . \tag{27}$$

Ma

$$\underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta} \lim_{j\to\infty} x_j(t) = \lim_{j\to\infty} \underset{(i)}{\Delta} x_j(t),$$

onde, per $(\overline{6}')$,

$$\underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t) = \lim_{j\to\infty} \left\{ \underset{(j)}{\Delta} x_j(t) + \mathcal{O}(t,\ l_i) \right\} = \overset{*}{x}_\infty(t) + \mathcal{O}_0(t,\ l_i). \tag{28}$$

Pertanto la (27) diventa

$$\underset{h}{\Delta} x_\infty(t) = \overset{*}{x}_\infty(t) + \mathcal{O}_0(t,\ l_i) + \mathcal{O}(t,\ h), \tag{27'}$$

e quindi proprio la (26), per $h \underset{\text{raz}}{\rightarrow} 0^+$.

Caso $h \underset{\text{raz}}{\rightarrow} 0^-$. Per ogni $h < 0$, razionale e fissato in valore assoluto comunque piccolo, sia i sufficientemente grande in modo da aversi

$$h = -\nu\, l_i \quad (\nu \text{ intero positivo conveniente}).$$

È allora, in virtù di (6),

$$\underset{h}{\Delta} x_\infty(t) \equiv \underset{-\nu l_i}{\Delta} x_\infty(t) = \underset{-(i)}{\Delta} x_\infty(t) + \frac{\nu - 1}{2\,!}\, l_i \underset{-(i)}{\Delta^2} x_\infty(t) + \ldots\,, \tag{29}$$

dove si è posto per brevità

$$\underset{-(i)}{\Delta} x_\infty(t) \equiv \frac{x_\infty(t) - x_\infty(t + l_i)}{-\,l_i} = \frac{x_\infty(t + l_i) - x_\infty(t)}{l_i}\ ,$$

ossia

$$\underset{-(i)}{\Delta} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t + l_i),$$

3

da cui

$$\underset{-(i)}{\Delta^2} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta^2} x_\infty(t + 2l_i),$$

$$\underset{-(i)}{\Delta^3} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta^3} x_\infty(t + 3l_i),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots .$$

È pertanto

$$\underset{h}{\Delta} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t + l_i) + \frac{\nu - 1}{2\,!}\, l_i \underset{(i)}{\Delta^2} x_\infty(t + 2l_i) + \dots,$$

onde

$$(29') \qquad \underset{h}{\Delta} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t + l_i) + \mathcal{O}_2(t,\ h).$$

Ora, per la continuità di $\underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t)$ è

$$\underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t + l_i) = \underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t) + \mathcal{O}_3(t,\ l_i),$$

e la (29′) diventa

$$(29'') \qquad \underset{h}{\Delta} x_\infty(t) = \underset{(i)}{\Delta} x_\infty(t) + \mathcal{O}_3(t,\ l_i) + \mathcal{O}_2(t,\ h).$$

Tenendo poi presente la (28), risulta allora

$$(29''') \qquad \underset{h}{\Delta} x_\infty(t) = \overset{*}{x}_\infty(t) + \mathcal{O}_0(t,\ l_i) + \mathcal{O}_3(t,\ l_i) + \mathcal{O}_2(t,\ h)\ ,$$

e quindi proprio la (26) per $h \underset{\text{raz}}{\longrightarrow} 0^-$.

3.5. - Dimostrazione della razionale derivabilità di $\overset{*}{x}_\infty(t)$, $t \in (0,T)_{\text{raz}}$.

Si ha

$$(30) \qquad \lim_{\substack{h \to 0 \\ \text{raz}}} \underset{h}{\Delta} \overset{*}{x}_\infty(t) = \overset{**}{x}_\infty(t).$$

Infatti:

$$(30') \qquad \underset{h}{\Delta}\overset{*}{x}_\infty(t) \equiv \underset{h}{\Delta} \lim_{i\to\infty} \underset{(i)}{\Delta} x_i(t) = \lim_{i\to\infty} \underset{h}{\Delta} \underset{(i)}{\Delta} x_i(t)\,.$$

Se ora è $h > 0$ e razionale, l'ultimo membro di (30'), in virtù di (27) [ove si riguardi $x_\infty(t)$ sostituita con $\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)$] diventa

$$\lim_{i\to\infty}\left\{ \underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t) + \mathcal{O}(t,\ h)\right\} = \overset{**}{x}_\infty(t) + \mathcal{O}(t,\ h),$$

e quindi la (30) per $h \underset{\text{raz}}{\longrightarrow} 0^+$.

Se invece è $h < 0$ e razionale, l'ultimo membro di (30'), in virtù di (29'') [ove ancora si riguardi $x_\infty(t)$ sostituita con $\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)$], diventa

$$\lim_{i\to\infty}\left\{ \underset{(i)}{\Delta^2} x_i(t) + \mathcal{O}_1(t,\ l_i) + \mathcal{O}(t,\ h)\right\} = \overset{**}{x}_\infty(t) + \mathcal{O}(t,\ h),$$

e quindi la (30) per $h \underset{\text{raz}}{\longrightarrow} 0^-$.

§ 4. - Dimostrazione del Lemma III.

4.1. - Completamento per continuità.

Le funzioni $x_\infty(t)$, $\overset{*}{x}_\infty(t)$, $\overset{**}{x}_\infty(t)$ definite (cfr. § 3) in $(0,\ T)_{\text{raz}}$, essendo ivi continue, si completano immediatamente per continuità su tutto $(0,\ T)$, e le funzioni così completate, che indicheremo ordinatamente con

$$x(t), \qquad \overset{*}{x}(t), \qquad \overset{**}{x}(t) \qquad\qquad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

sono pure limitate, lipschitziane e continue in $(0,\ T)$.

4.2. - Dimostrazione dell'esistenza di $\dot{x}(t)$ e $\ddot{x}(t)$ in $(0,\ T)$.

4.2.1. – *La derivata $\dot{x}(t)$ esiste (finita) in tutto $(0,\ T)$.*

Distinguo due casi.

Caso 1°: *La derivata $\dot{x}(t)$ esiste (finita) in ogni punto t razionale di* (0, T), *e precisamente è*

$$(31) \qquad \lim_{h\to 0} [\{x(t+h)-x(t)\}/h] = \overset{*}{x}_{\infty}(t) = \overset{*}{x}(t), \qquad t\in(0,\ T)_{\mathrm{raz}}.$$

La (31) è già stata provata quando h tende a zero per valori razionali (cfr. n. **3.4.**). Per ottenere la (31), per h tendente comunque a zero, detto h' un razionale prefissato, accanto al rapporto figurante in (31), considero anche il rapporto

$$\{x(t+h')-x(t)\}/h'.$$

Questo rapporto, per ogni t, quando $h'\to h$ tende al rapporto figurante in (31); pertanto, in corrispondenza al numero h^2, esisterà un $\lambda_h > 0$ tale che sia

$$(32) \qquad \frac{x(t+h')-x(t)}{h'} - h^2 < \frac{x(t+h)-x(t)}{h} < \frac{x(t+h')-x(t)}{h'} + h^2$$

per ogni h' razionale con $|h'-h| < \lambda_h$. La (32) si può anche scrivere (in virtù del n. **3.4**)

$$\overset{*}{x}_{\infty}(t) + \eta(h') - h^2 < \frac{x(t+h)-x(t)}{h} < \overset{*}{x}_{\infty}(t) + \eta(h') + h^2$$

con $\eta(h')\to 0$ per $h'\to 0$, e quindi per $h'^2+h^2\to 0$ proprio la (31) da dimostrare.

Caso 2°. *La derivata $\dot{x}(t)$ esiste (finita) anche in ogni punto t irrazionale di* (0, T) *ed è*

$$(33) \qquad \lim_{h\to 0} [\{x(t+h)-x(t)\}/h] = \overset{*}{x}(t), \qquad t\in(0,\ T)_{\mathrm{irr}}.$$

Infatti, accanto al rapporto figurante in (33), detto ora t' un razionale di (0, T), consideriamo anche il rapporto

$$(34) \qquad \{x(t'+h)-x(t')\}/h.$$

Questo rapporto, per ogni h, quando $t'\to t$ [essendo t il valore irrazionale prefissato figurante in (33)] tende al rapporto figurante in (33); pertanto, in corrispondenza al numero h^2, esisterà un $\delta_h > 0$ tale che sia

$$\frac{x(t'+h)-x(t')}{h} - h^2 < \frac{x(t+h)-x(t)}{h} < \frac{x(t'+h)-x(t')}{h} + h^2 \tag{35}$$

per ogni t' razionale con $|\,t-t'\,| < \delta_h$. Tenendo presente il risultato del Caso 1° precedente, la (35) si scrive

$$\overset{*}{x}_\infty(t') + \varepsilon\,(h) - h^2 < \frac{x(t+h)-x(t)}{h} < \overset{*}{x}_\infty\,(t') - \varepsilon\,(h) + h^2$$

con $\varepsilon\,(h) \to 0$ con $h \to 0$, da cui per $t' \to t$ (cfr. n. **4.1**),

$$\overset{*}{x}(t) + \varepsilon(h) - h^2 < \frac{x(t+h)-x(t)}{h} < \overset{*}{x}(t) + \varepsilon(h) + h^2$$

e quindi, per $h \to 0$, proprio la (33).

4.2.2. – *La derivata* $\ddot{x}(t)$ *esiste (finita) in tutto* $(0,\ T)$, *precisamente si ha*

$$\lim_{h\to 0}\,[\{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)\}/h] = \overset{**}{x}_\infty(t) = \overset{**}{x}(t)\,, \qquad t \in (0,\ T)_{\mathrm{raz}}\,,$$

$$\lim_{h\to 0}\,[\{\dot{x}(t+h) - \dot{x}(t)\}/h] = \overset{**}{x}(t)\,, \qquad t \in (0,\ T)_{\mathrm{irr}}\,.$$

La dimostrazione procede in modo completamente parallelo a quanto si è fatto al precedente n. **4.2.1** per la $\dot{x}(t)$.

4.3. - Definizione delle funzioni $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ in $(0, +\infty)$.

Poichè nell'intervallo $(0,\ T)$ l'estremo superiore T è un valore intero (del tempo) comunque grande, le precedenti funzioni $x(t)$, $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ già definite in $(0,\ T)$ restano immediatamente definite in tutto $(0,\ +\infty)$.

§ 5. - Dimostrazione del Teorema.

5.1. - Dimostrazione di esistenza.

Dimostro che *la funzione $x(t)$, precedentemente individuata, è soluzione del Problema differenziale* (D). Infatti :

1°) *La $x(t)$ soddisfa le condizioni iniziali di* (D):

$$x(0) = x_\infty(0) = \lim_{i\to\infty} x_i(0) = \lim_{i\to\infty} a = a,$$

$$\dot{x}(0) = \overset{*}{x}_\infty(0) = \lim_{i\to\infty}\,[\underset{(i)}{\Delta} x_i(t)]_{t=t_i} = \lim_{i\to\infty} b = b\,.$$

2°) *La* $x(t)$ *soddisfa, in* $(0,+\infty)$, *l'equazione differenziale figurante in* (D): per questo è sufficiente provare che essa soddisfa a tale equazione per $t \in (0,\ T)_{\mathrm{raz}}$, dove è $x(t) = x_\infty(t)$, $\dot{x}(t) = \overset{*}{x}_\infty(t)$, $\ddot{x}(t) = \overset{**}{x}_\infty(t)$. Per $t \in (0,\ T)_{\mathrm{raz}}$ il primo membro $E(t)$ della detta equazione differenziale, calcolato per questa funzione $x(t)$, diventa allora:

$$E(t) = \overset{**}{x}_\infty(t) + f(x_\infty(t),\ \overset{*}{x}_\infty(t)) + g(x_\infty(t)),$$

ossia (Lemma II)

$$E(t) = \lim_{i\to\infty} \left\{ \underset{(i)}{\Delta^2}\, x_i(t) + f(x_i(t),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t)) + g(x_i(t)) \right\},$$

ed anche (Lemma I)

$$E(t) = \lim_{i\to\infty} \left\{ \underset{(i)}{\Delta^2}\, x_i(t) + f(x_i(t-l_i),\ \underset{(i)}{\Delta} x_i(t-l_i)) + g(x_i(t-2l_i)) \right\};$$

poichè qui nel secondo membro la quantità fra graffe è esattamente $\varphi(t)$ [cfr. n. **1.2**, equazione $(\underset{i}{\Delta})_1$] si ha

$$E(t) = \lim_{i\to\infty} \varphi(t) = \varphi(t)\,.$$

La dimostrazione di esistenza è quindi conclusa.

5.2. - Dimostrazione di unicità.

Sia $\xi(t)$ una seconda soluzione del Problema differenziale (D). Dico che è necessariamente

$$\xi(t) \equiv x(t)\,, \qquad t \in (0,\ +\infty). \tag{34}$$

È sufficiente provare la (34) per $t \in (0,\ T)_{\mathrm{raz}}$, ed ancor più semplicemente per $t \in \sigma_r$ (cfr. n. **1.1.**). In base a ciò, basterà dimostrare che è

$$|\, x_i(t) - \xi(t)\, | = \mathcal{O}(l_i) \qquad (t \in \sigma_r;\ i = r,\ r+1, \ldots), \tag{35}$$

e la (34) sarà provata.

A tale scopo considero il secondo membro dell'equazione alle differenze figurante in $(\underset{i}{\Delta}')$ (cfr. n. **1.2**), calcolato per $\xi(t)$:

$$H_i(t) = 2\xi(t-l_i) - \xi(t-2l_i) - l_i^2\{f(\xi(t-l_i), \underset{(i)}{\Delta}\xi(t-l_i)) + g(\xi(t-2l_i)) - \varphi(t)\}.$$

Ora, in virtù della formula di TAYLOR è

$$2\xi(t-l_i) - \xi(t-2l_i) = \xi(t) - l_i^2\,\ddot{\xi}(t) + \mathcal{O}_1(t, l_i^3),$$

e per la lipschitzianità di $f(u, v)$, $g(u)$ abbiamo

$$f(\xi(t-l_i), \underset{(i)}{\Delta}\xi(t-l_i)) + g(\xi(t-2l_i)) = f(\xi(t), \dot{\xi}(t)) + g(\xi(t)) + \mathcal{O}_2(t, l_i).$$

Pertanto si ha

$$H_i(t) = \xi(t) - l_i^2\{\ddot{\xi}(t) + f(\xi(t), \dot{\xi}(t)) + g(\xi(t)) - \varphi(t)\} + \mathcal{O}_3(t, l_i^3),$$

e quindi, ricordando che $\xi(t)$ è soluzione del problema differenziale (D),

$$H_i(t) = \xi(t) + \mathcal{O}_3(t, l_i^3).$$

Allora, ricavando qui la $\xi(t)$ e sostituendo ad $H_i(t)$ la sua espressione iniziale, si ha

$$(36)\qquad \xi(t) = 2\xi(t-l_i) - \xi(t-2l_i) - l_i^2\{f(\xi(t-l_i), \underset{(i)}{\Delta}\xi(t-l_i)) + $$
$$+ g(\xi(t-2l_i)) - \varphi(t)\} - \mathcal{O}_3(t, l_i^3),$$

relazione in completa analogia con la (16) *del* n. **3.1.1.** Avendosi anche ora

$$x_i(0) - \xi(0) = 0, \qquad [\underset{(i)}{\Delta}x_i(t) - \underset{(i)}{\Delta}\xi(t)]_{t=l_i} = \mathcal{O}(l_i),$$

in virtù di questa totale analogia, valgono per la funzione $x_i(t) - \xi(t)$ le stesse considerazioni fatte per la funzione $x_i(t) - x_j(t)$ nel n. **3.1.1.** Ne seguirà quindi la (35) [in analogia con la (21″) del n. **3.1.1**].

5.3. - Approssimazione successiva della soluzione.

Da quanto precede, unitamente a quanto si è già detto nella « Introduzione », risulta chiaramente in quale modo il metodo dimostrativo indicato conduce per approssimazioni successive alla soluzione del Problema differenziale (D).

Tale soluzione $x(t)$ nasce come primo elemento di una successione di funzioni

$$x_i(t) \qquad (i = 2,\ 3,\ 4, \dots).$$

Queste funzioni $x_i(t)$ sono definite, ordinatamente, su insiemi

$$\sigma_i \qquad (i = 2,\ 3,\ 4, \dots)$$

formati tutti, e soltanto, da valori razionali in numero finito e tali che $\lim_{i \to \infty} \sigma_i$ risulta il campo $(0,\ T)_{\mathrm{raz}}$ di tutti, e soli, i valori razionali di $(0,\ T)$. Il limite $\lim_{i \to \infty} x_i(t)$ ci dà poi la $x(t)$ su tutto $(0,\ T)_{\mathrm{raz}}$; indi il passaggio per continuità conduce alla $x(t)$ su tutto $(0,\ T)$, e infine, per $T \to +\infty$, su tutto $(0,\ +\infty)$.

Il grado d'approssimazione di ogni $x_i(t)$ alla $x(t)$, per ogni t razionale, risulta poi chiaramente individuato.

Bibliografia.

[1] E. Goursat, *Cours d'Analyse mathématique*, Gauthier-Villars, Paris 1918.

[2] D. Graffi, *Sopra alcune equazioni differenziali non lineari della Fisica Matematica*, Mem. Accad. Sci. Ist. Bologna (9) 7 (1939-40), 121-129.

[3] B. Manfredi. *Su la risoluzione di alcuni sistemi differenziali della Meccanica non lineare mediante il metodo delle differenze finite*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1960), 123-148.

[4] N. Minorski, *Introduction to non linear Mechanics*, E. Brothers, Michigan 1947.

[5] G. Sansone, e R. Conti, *Equazioni differenziali non lineari*, Cremonese, Roma 1956.

* * *