Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 271-274

GAETANO CARICATO (*)

Sul significato fisico del parametro affine per le geodetiche di lunghezza nulla di una V_4 einsteiniana. (**)

1. - Geodetiche di una varietà riemanniana, parametro affine.

Com'è noto [1], le geodetiche di una varietà riemanniana V_n sono le curve integrali di un sistema differenziale del tipo

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\right) \equiv \frac{\mathrm{d}^2x^i}{\mathrm{d}t^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}t} = \varphi(t)\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} \qquad (i = 1, 2, ..., n), \tag{1}$$

ove t è un arbitrario parametro e φ una funzione di t, la cui forma dipende dal parametro scelto; le quantità Γ^i_{jk} rappresentano i simboli di CHRISTOFFEL di 2ª specie, e l'operatore $\mathrm{D}/\mathrm{d}t$ indica la derivazione assoluta rispetto al parametro t.

Basta però il cambiamento di parametro

$$\mathrm{d}u = K\, e^{\int\varphi(t)\,\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t \qquad (K \text{ costante arbitraria}), \tag{2}$$

perchè le (1) si riducano alla forma più semplice

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}u}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, ..., n). \tag{3}$$

(*) Indirizzo: Viale Valle Padana 66, Roma, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 36 del Comitato Nazionale per la Matematica del C. N. R.. — Ricevuto il 2-IX-1963.

(1) Cfr., per es., L. PF. EISENHART, *Riemannian Geometry*, Princeton University Press, Princeton 1960, p. 50.

Parametri che, come u, riducono le equazioni differenziali delle geodetiche del tipo (1) alla forma (3), si dicono *parametri affini*.

L'insieme dei parametri affini u' si ottiene operando su uno di essi, u, mediante il gruppo delle trasformazioni lineari $u' = au + b$ (a, b costanti). La nozione di parametro affine è *invariante* rispetto a una qualunque trasformazione del sistema di coordinate (2) adottate in V_n.

Per una geodetica a ds^2 non nullo un parametro affine è dato notoriamente dall'ascissa curvilinea s.

2. - Geodetiche di lunghezza nulla in una V_4 einsteiniana. Significato fisico del parametro affine.

Prendiamo in considerazione una V_4 einsteiniana, la cui metrica iperbolica normale abbia segnatura $+ + + -$, e pensiamo scelto in essa un sistema di coordinate (x^i) fisicamente ammissibili [$g_{44} < 0$, $g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta > 0$ per dx^α non tutte nulle ($\alpha, \beta = 1, 2, 3$)]. A tale sistema di coordinate resta associato un ben determinato riferimento fisico caratterizzato dalla congruenza delle linee coordinate temporali ($x^4 = var.$) o, in modo equivalente, dal campo di vettori $\gamma(x)$, unitari e orientati verso il futuro, ad esse tangenti (3). Il carattere iperbolico della metrica permette di distinguere in V_4 linee (in particolare geodetiche) del genere tempo ($ds^2 < 0$), del genere luce ($ds^2 = 0$) o del genere spazio ($ds^2 > 0$).

Tra le geodetiche di V_4 particolare importanza hanno quelle a ds^2 negativo o nullo, potendo esse interpretarsi rispettivamente come linee orarie di corpuscoli materiali liberamente gravitanti o di fotoni (raggi luminosi).

Per una geodetica del primo tipo un parametro affine è offerto, come si è ricordato nel n. **1**, dall'ascissa curvilinea o anche, in termini più fisici, dal tempo proprio τ della particella che la descrive. Invece per le geodetiche di lunghezza nulla il parametro affine u, pur avendo carattere invariantivo rispetto a qualsiasi cambiamento di riferimento fisico, non ha una immediata interpretazione fisica assoluta: come tra poco vedremo, il suo differenziale du può considerarsi il prodotto di *due* grandezze fisiche di primaria importanza ma *relative* al riferimento fisico adottato, l'una legata soltanto alla geodetica considerata, l'altra legata al fotone che si pensa percorrere la geodetica stessa.

---

(2) Cfr., per es., L. PF. EISENHART, *Non-riemannian Geometry*, Amer. Math. Society, New York 1927, p. 57.

(3) C. CATTANEO, *General Relativity: Relative Standard Mass, Momentum, Energy and Gravitational Field in a General System of Reference*, Il Nuovo Cimento, X, **10** (1958), 319-320.

Com'è stato recentemente mostrato (4), la legge di evoluzione di un fotone libero in un campo gravitazionale può assumere la stessa forma dell'analoga legge per un corpuscolo materiale liberamente gravitante

$$\frac{\mathrm{D}P^i}{\mathrm{d}T} = 0, \tag{4}$$

pur di assumere come 4-impulso P^i del fotone un 4-vettore di norma nulla, tangente alla traiettoria spazio-temporale l del fotone stesso, così definito:

$$P^i = \frac{h}{c\lambda} \cdot \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}T} \equiv \frac{h\nu}{c^2} \cdot \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}T} \qquad \left(g_{ik} \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}T} \cdot \frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}T} = 0\right). \tag{5}$$

Nella (5) $\mathrm{d}T$, espresso dalla formola $\mathrm{d}T = -(1/c)\gamma_i\, \mathrm{d}x^i$, sta a rappresentare l'intervallo di tempo relativo standard tra due eventi infinitamente vicini sulla traiettoria l; λ e ν sono rispettivamente la lunghezza d'onda e la frequenza (relativa) del fotone; il carattere tensoriale di P^i è assicurato dall'invarianza assoluta del prodotto $\lambda\, \mathrm{d}T$.

L'assunzione (5) attribuisce al fotone un'energia luminosa relativa $E = -c\, \gamma_i\, P^i = h\nu$ ed una massa relativa $m = h\nu/c^2$.

Dalla (4) segue anzitutto il carattere geodetico della linea oraria l. Infatti, se in (4), postovi $P^i = m(\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}T)$, esplicitiamo la derivazione assoluta indicata, otteniamo le equazioni

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}T}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}T}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} \log\left(\frac{1}{m}\right) \cdot \frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}T}, \tag{6}$$

che risultano proprio del tipo (1), fungendo da parametro il tempo relativo standard T, con

$$\varphi(T) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}T} \log\left(\frac{1}{m}\right). \tag{7}$$

Seguendo allora il procedimento generale richiamato nel n. **1**, basta porre

$$\mathrm{d}u = \frac{K}{m}\, \mathrm{d}T \equiv \frac{Kc}{h}\, \lambda\, \mathrm{d}T \tag{8}$$

---

(4) C. Cattaneo, *Moto di un fotone libero in un campo gravitazionale*, Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sc. Fis. Mat. Nat. (8) **27** (1959), 54-59.

per poter dare alle (4) la forma semplificata (3):

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}u}\right)=0 \qquad \left(g_{ik}\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}u}=0\right). \tag{4'}$$

La (8) pone in evidenza che, interpretando una geodetica di lunghezza nulla in uno spazio-tempo einsteiniano come linea oraria di un fotone libero, i suoi parametri affini, invarianti rispetto a qualsiasi cambiamento di riferimento fisico, si ottengono per il tramite di due grandezze relative, la lunghezza d'onda λ del fotone e l'intervallo elementare di tempo relativo standard $\mathrm{d}T$.

Il fattore costante, disponibile nel parametro affine, corrisponde all'arbitrarietà della lunghezza d'onda iniziale dei diversi fotoni, che si possono pensare percorrere una medesima geodetica di lunghezza nulla. Si noti come, mediante l'uso del parametro affine, e ponendo $K=1$ nella (8), le (5) e (4) possano scriversi rispettivamente:

$$P^i=\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}u}, \qquad \frac{\mathrm{D}P^i}{\mathrm{d}u}=0. \tag{9}$$

3. - Identificazione formale delle leggi di evoluzione di un corpuscolo materiale e di un fotone mediante l'uso del parametro affine.

È immediato verificare che anche per un corpuscolo materiale di massa propria costante il 4-impulso P^i e la legge di moto (4) hanno in sostanza la forma (9).

Infatti per un corpuscolo materiale di massa propria costante m_0 il 4-impulso vale $P^i=m_0(\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}\tau)$ o anche, introdotto il parametro affine τ/m_0 [cfr. (8)], $P^i=\mathrm{d}x^i/\mathrm{d}u$.

Possiamo concludere pertanto che l'adozione del parametro affine permette di unificare nella forma (9) la definizione di 4-impulso e la legge assoluta del moto per una particella materiale e per un fotone.

Resumé.

En considérant une géodésique de longueur nulle quelconque, sur une variété espace-temps V_4 d'Einstein, comme une trajectoire d'univers possible pour un photon libre, on montre ici que, pour cette géodésique, l'ensemble des paramètres affines, invariantes de tout changement de repère physique, s'obtiennent par deux grandeurs relatives au repère physique choisi, l'une liée seulement à la géodésique considerée, l'autre liée au photon qu'on peut supposer parcourir la géodésique même. On verifie de plus que par l'adoption du paramètre affine, la 4-impulsion d'univers et la loi absolue du mouvement d'une particule d'épreuve et d'un photon, tous les deux purement inertes, ont la même expression formelle.

* * *