Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 221-253

LAURA CUPELLO (*)

# Sulla condizione di Hölder in forma integrale. (**)

## 1. - Introduzione.

In questa Nota presentiamo alcuni risultati riguardanti le condizioni di HÖLDER (o di LIPSCHITZ) « in forma integrale » e precisamente risultati sulla valutazione della « costante di HÖLDER » per classi di funzioni caratterizzate da certe singolarità di comportamento nell'intorno di un punto dell'intervallo sul quale è calcolato l'integrale della condizione in discorso.

Le condizioni in forma integrale trovano utile applicazione, tra l'altro, nello studio di certe classi di funzioni analitiche trascendenti, definite mediante integrali (1).

Sono ben note le seguenti classiche proposizioni:

Sia $\varphi(t)$ una funzione reale della variabile reale $t$ definita per $a \leqq t \leqq b$ e prolungata per periodicità con periodo $b - a$. È noto (2) che:

$$1) \qquad \int_a^b |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \, dt = o(|h|) \qquad \text{per } h \to 0,$$

quando e soltanto quando esiste un numero $c$ tale che sia $\varphi(t) = c$ (costante) quasi ovunque;

$$2) \qquad \int_a^b |\varphi(t+h) - \varphi(t)| \, dt = O(|h|) \qquad \text{per } h \to 0,$$

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università (via C. Saldini 50), Milano, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 40 (1962-63) del Comitato per la Matematica del C.N.R.. – Ricevuto il 12-IX-1963.

(1) M. L. CARTWRIGHT [1].

(2) G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD [2], p. 599, e [3], p. 619; E. C. TITCHMARSH [5], pp. 36-37.

quando e soltanto quando $\varphi(t)$ è quasi ovunque uguale a una funzione a variazione finita su $a \leqq t \leqq b$.

Sia $H^{\alpha}$ la classe delle funzioni $\varphi(t)$ che verificano la condizione di HÖLDER di ordine $\alpha$, e cioè

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| < K \cdot h^{\alpha} \qquad (a \leqq t < t+h \leqq b),$$

con $K$ indipendente da $t$ e da $h$ [le classi $H^0$, $H^1$, $H^{\alpha}(\alpha > 1)$ sono rispettivamente quelle delle funzioni limitate, delle funzioni a rapporto incrementale limitato, delle funzioni costanti].

Sia $H_0^{\alpha}$ la classe (analoga alla precedente) delle funzioni $\varphi(t)$ che verificano la condizione

$$|\varphi(t+h) - \varphi(t)| = o(h^{\alpha}) \qquad \text{per } h \to 0$$

$(a \leqq t < t+h \leqq b)$ uniformemente rispetto a $t$. (Le classi $H_0^0$ e $H_0^1$ sono rispettivamente le classi delle funzioni continue e delle funzioni costanti).

Sia $\varphi(t)$ prolungata per periodicità, oppure $\varphi(t) = 0$ fuori di $a \leqq t \leqq b$. Per $0 \leqq \alpha \leqq 1$, $p \geqq 1$ sia $H(\alpha, p)$ la classe delle funzioni $\varphi(t)$ definite per $a \leqq t \leqq b$ per le quali sia

$$\left\{ \int_a^b |\varphi(t+h) - \varphi(t)|^p \, dt \right\}^{1/p} = O(|h|^{\alpha}) \qquad \text{per } h \to 0.$$

È noto che [3] $H(\alpha, p) \subseteq L^p$. La classe $H(1, 1)$ è quella delle funzioni a variazione finita.

Sia $H_0(\alpha, p)$ la classe analoga delle funzioni $\varphi(t)$ definita come $H(\alpha, p)$ sostituendo nel secondo membro $o(\ldots)$ in luogo di $O(\ldots)$.

Il presente lavoro si propone di studiare accuratamente la determinazione delle costanti implicate al secondo membro della condizione che definisce la classe $H(\alpha, 1)$, e la determinazione degli infinitesimi implicati nelle analoghe condizioni per $H_0(\alpha, 1)$. In un caso interessante la costante definita risulterà, sotto un certo aspetto, la «migliore costante» [vedi Teorema (A) e (B)]. Saranno prese in esame categorie di funzioni $\varphi(t)$ che presentano una certa singolarità di comportamento nell'intorno di un punto $t_0$ interno all'intervallo $a \leqq t \leqq b$.

---

(3) G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD [2], p. 566.

Senza diminuire la generalità dei risultati conseguiti, assumeremo $\varphi(t)$ definita nell'intervallo $-1 \leqq t \leqq 1$ e il punto $t = 0$ di questo intervallo come quello nell'intorno del quale si verifica la singolarità di comportamento.

Lo studio verrà svolto in modo diretto mediante considerazioni nel campo reale.

## 2. - Una condizione di W. H. Young.

Sia $\psi(t)$ definita per $a < t < b$; si dice che $\psi(t)$ è priva di *salti esterni* in $a < t < b$ quando per ogni $a < t < b$

$$\varliminf_{u \to t-} \psi(u) \leqq \psi(t) \leqq \varlimsup_{u \to t+} \psi(u) ,$$

oppure

$$\varlimsup_{u \to t-} \psi(u) \geqq \psi(t) \geqq \varliminf_{u \to t+} \psi(u) .$$

Nel caso in cui esistano $\psi(t-)$ e $\psi(t+)$ dovrà aversi $\psi(t-) \leqq \psi(t) \leqq \psi(t+)$ oppure $\psi(t-) \geqq \psi(t) \geqq \psi(t+)$ (4).

Quando $\psi(t)$ è a variazione finita in $a \leqq t \leqq b$ allora, alterandone il valore in un insieme al più numerabile, si può ottenere una funzione a variazione finita priva di salti esterni.

Se $\int_a^b |\, d\psi(u)\, |$ è finito allora $\psi(t)$ è quasi ovunque uguale a una funzione a variazione finita in $a \leqq t \leqq b$, priva di salti esterni.

Sia $\psi(t)$ definita per $0 < t \leqq 1$ e ivi limitata; si dice che essa verifica la condizione di Young nell'intorno destro $0 < t \leqq 1$ del punto 0 quando

$$(\mathrm{Y}) \qquad \begin{cases} \int_0^1 |\, d(u\, \psi(u))\, | & \text{è finito} \\ \int_0^\eta |\, d(u\, \psi(u))\, | = O(\eta), & \text{per } \eta \to 0+ . \end{cases}$$

Questa condizione implica che per ogni $0 < \varepsilon < 1$, la funzione $\psi(t)$ è q.o. uguale a una funzione a variazione finita in $\varepsilon \leqq t \leqq 1$ e priva di salti esterni in questo intervallo.

(4) E. W. Hobson [4], p. 532.

Denotiamo con $V_\psi(\alpha, \beta)$ la variazione totale di $\psi(t)$ in $\alpha \leqq t \leqq \beta$; alla condizione (Y) si può dare un'altra forma.

*Nella classe delle funzioni $\psi(t)$ definite per $0 < t \leqq 1$ e ivi prive di salti esterni la condizione* (Y) *è equivalente alla seguente:*

(Y′) 1) Per ogni $0 < \varepsilon < 1$ la funzione $\psi(t)$ è a variazione finita in ogni intervallo $\varepsilon \leqq t \leqq 1$;

2) Per ogni $0 < \eta < 1$, $\sigma > 0$ risulta

$$V_\psi\big(\eta/(1+\sigma),\ \eta\big) = \int_{\eta/(1+\sigma)}^{\eta} |\,\mathrm{d}\psi(u)\,| = O(1) \qquad (\text{per } 0 < \eta \leqq 1).$$

Anzi, dimostreremo più precisamente che *se $\psi(t)$ è priva di salti esterni:*

(2.1) *Da* $V_\psi\big(\eta/(1+\sigma),\ \eta\big) < K$ *segue*

$$\int_0^\eta |\,\mathrm{d}(u\,\psi(u))\,| < \{K(1+\sigma)/\sigma + A\}\cdot\eta, \quad \textit{dove} \quad A = \operatorname*{Sup}_{0<t\leqq\eta} \psi(t)\,.$$

(2.2) *Da* $\int_0^\eta |\mathrm{d}(u\,\psi(u))\,| < K_1\,\eta$ *segue*

$$V_\psi\big(\eta/(1+\sigma),\ \eta\big) < (1+\sigma)K_1 + A\sigma\,.$$

Dimostrazione. Dimostriamo (2.1). Sia $0 < u_1 < u_2$, allora è anche

$$|\,u_2\,\psi(u_2) - u_1\,\psi(u_1)\,| \leqq (u_2 - u_1)\,|\psi(u_1)\,| + u_2\,|\,\psi(u_2) - \psi(u_1)\,|\,.$$

Passando alle somme di Mengoli-Cauchy:

$$\int_\alpha^\beta |\,\mathrm{d}(u\,\psi(u))\,| \leqq \int_\alpha^\beta |\,\psi(u)\,|\,\mathrm{d}u + \int_\alpha^\beta u\,|\,\mathrm{d}\psi(u)\,|$$

$$\leqq \int_\alpha^\beta |\,\psi(u)\,|\,\mathrm{d}u + \beta\int_\alpha^\beta |\,\mathrm{d}\psi(u)\,|$$

$$\leqq \int_\alpha^\beta |\,\psi(u)\,|\,\mathrm{d}u + \beta\,V_\psi(\alpha, \beta)$$

tutte le volte che $\psi(t)$ è a variazione finita in $\alpha \leqq t \leqq \beta$. Pertanto, assumendo per $(\alpha, \beta)$ la successione di intervalli

$$\big(\eta/(1+\sigma)^h,\ \eta/(1+\sigma)^{h-1}\big) \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

e addizionando, risulta [osserviamo che $\eta/(1+\sigma)^h \to 0$ per $h \to +\infty$]

$$\int_0^\eta |\,\mathrm{d}(u\,\psi(u))| \leqq \int_0^\eta |\,\psi(u)\,|\,\mathrm{d}u + K \sum_0^\infty \eta/(1+\sigma)^h$$

$$\leqq A\,\eta + K\,\eta\,(1+\sigma)/\sigma\,.$$

Dimostriamo (2.2). L'ipotesi ci dice che $t\,\psi(t)$ è q. o. uguale a una funzione a variazione finita in $0 \leqq t \leqq \eta$ $(<1)$ e quindi, per ogni $\varepsilon > 0$, $\psi(t)$ è q. o. uguale a una funzione a variazione finita in $\varepsilon \leqq t \leqq \eta$; possiamo supporre che $\psi(t)$ sia a variazione finita e priva di salti esterni. Osserviamo che è

$$u_2\,|\,\psi(u_2) - \psi(u_1)\,| \leqq |\,u_2\,\psi(u_2) - u_1\,\psi(u_1)\,| + (u_2 - u_1)\,|\,\psi(u_1)\,|\,.$$

Considerando una suddivisione dell'intervallo $(\alpha, \beta)$ in parti otteniamo

$$\alpha\,V_\psi(\alpha, \beta) \leqq \int_\alpha^\beta |\,\mathrm{d}(u\,\psi(u))\,| + \int_\alpha^\beta |\,\psi(u)\,|\,\mathrm{d}u\,.$$

Facendo $\alpha = \eta/(1+\sigma)$, $\beta = \eta$ otteniamo

$$V_\psi\big(\eta/(1+\sigma),\ \eta\big)\cdot\eta/(1+\sigma) \leqq K_1\,\eta + A\,\eta\,\sigma/(1+\sigma)\,,$$

da cui segue (2.2).

### 3. - Descrizione di $\varphi(t)$ nell'intorno del punto $O$.

Sulla funzione $\varphi(t)$ definita per $-1 \leqq t \leqq 1$, $t \neq 0$ faremo le ipotesi seguenti:

a) Per ogni $\varepsilon$, con $0 < \varepsilon < 1$, $\varphi(t)$ è a variazione finita in

$$-1 \leqq t \leqq -\varepsilon\,, \qquad \varepsilon \leqq t \leqq 1\,.$$

b) Esiste $\alpha$, con $0 < \alpha < 1$, tale che

$$\varphi(t) = \psi(t)/|\,t\,|^{1-\alpha} \qquad (-1 \leqq t \leqq 1,\ t \neq 0)\,,$$

$$\psi(t) \to 0 \quad \text{per} \quad t \to 0\,, \qquad \psi(0) = 0$$

[ne segue che $\psi(t)$ è limitata in $-1 \leqq t \leqq 1$ e a variazione finita in $-1 \leqq t \leqq -\varepsilon$, $\varepsilon \leqq t \leqq 1$].

c) Quando sia utile, riterremo $\varphi(t)$ definita su tutto l'asse reale $-\infty < t < +\infty$ ponendo $\varphi(t) = 0$ fuori dell'intervallo $-1 \leqq t \leqq 1$.

Occorre introdurre elementi collegati con $\psi(t)$ nell'intorno dell'origine e precisamente useremo le seguenti notazioni, che riguardano l'intervallo $0 < t \leqq 1$.

3.1) *Elementi riguardanti la variazione totale di $\psi(t)$ nell'intorno di* 0.
Per ogni $\sigma > 0$, $0 < \eta < 1$ poniamo:

$$H(\eta,\ \sigma) = V_\psi\big(\eta/(1+\sigma),\ \eta\big)\,,$$

$$\overline{H}(\eta,\ \sigma) = \operatorname*{Sup}_{0<u\leqq\eta} H(u,\ \sigma)\,,$$

$$M(\sigma) = \overline{H}(1,\ \sigma) = \operatorname*{Sup}_{0<u\leqq 1} H(u,\ \sigma)\,.$$

Associamo a $\sigma$ il numero

$$\sigma_1 = (1+\sigma)^{1-\alpha}/\{(1+\sigma)^{1-\alpha} - 1\}$$

e, tenuto conto della monotonia di $\overline{H}(\eta,\ \sigma)$ rispetto a $\eta$, poniamo

$$H_\sigma = \sigma_1 \lim_{\eta\to 0} \overline{H}(\eta,\ \sigma)\,.$$

Osservazione. Sia $\psi(t)$ a variazione finita in $0 \leqq t \leqq 1$; allora evidentemente, per ogni $\sigma > 0$, $H(\eta,\ \sigma) \to 0$ per $\eta \to 0$ e quindi $H_\sigma = 0$. È interessante osservare che: Esistono funzioni che verificano la condizione (Y) di W. H. Young e non sono a variazione finita in $0 \leqq t \leqq 1$ e per le quali tuttavia $H_\sigma = 0$.

Esempio: $$\psi(t) = \frac{1}{\log(t/2)} \cos(\pi \log(t/2))\,.$$

Sia $n$ intero naturale. Si riconosce facilmente che la funzione $|\psi(t)|$ raggiunge il massimo nei punti $t_k$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots)$ tali che

$$\pi \log(t_k/2) = -k\pi + (1+o(1))/(k\pi)$$

nei quali si ha

$$\cos(\pi\log(t_k/2)) = \pm 1 + O(1/k^2)$$

e quindi

$$\psi(t_k) = \{\pm 1 + O(1/k^2)\}/\{k + O(1/k)\} = \pm 1/k + O(1/k^2)\,.$$

Per la valutazione di $V_\psi(\alpha,\ \beta)$ teniamo conto dell'altezza delle « arcate » del diagramma di $|\psi(t)|$

$$V_\psi(t_n, t_1) \geqq \frac{1}{1} + 2\left(\frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}\right) + \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{n} O\left(\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\geqq 2\log n + O(1) \to +\infty \quad \text{per } n \to +\infty$$

e quindi $\psi(t)$ non è a variazione finita. D'altra parte se $t_M < \eta/(1+\sigma) \leqq t_{M-1} < \ldots <$

$< t_{m+1} \leqq \eta < t_m$ risulta $t_k = 2 \exp(-k + O(1/k)$,

$$M \sim \log(\eta/2(1+\sigma)), \qquad m \sim \log(\eta/2);$$

$$H(\eta, \sigma) = V_\psi(\eta/(1+\sigma), \eta) \leqq 2 \sum_{k=m}^{M} (1/k + O(1/k^3))$$

$$= 2 \log(M/m) + O(1/m^2)$$

$$= 2 \log \left\{ 1 - \frac{\log(1+\sigma)}{\log(\eta/2)} \right\} + O(1/\log^2(1/\eta))$$

$$\sim 2 \frac{\log(1+\sigma)}{\log(2/\eta)} \to 0 \text{ per } \eta \to 0 .$$

3.2) *Elementi riguardanti l'andamento del massimo modulo di $\psi(t)$ nell'intorno di $t = 0$.*

Poniamo

$\overline{\psi}(t) = \operatorname{Sup}_{0<u<t} | \psi(u) | =$ minima maggiorante di $| \psi(t) |$ ridotta continua dalla sinistra.

Osserviamo che $\overline{\psi}(t) \to 0+$ per $t \to 0+$ e, fissato $h > 0$, esistono dei numeri $u > 0$ per i quali $\overline{\psi}(u) \cdot u \leqq h$. Denotiamo con $\lambda = \lambda(h)$ l'estremo superiore dei numeri $u$ per i quali vale questa disuguaglianza attenuata, cioè poniamo

$$\lambda = \lambda(h) = \operatorname{Sup} u \qquad [\overline{\psi}(u) \cdot u \leqq h] .$$

Risulta $\lambda \to 0+$ e $\overline{\psi}(\lambda) \to 0+$ per $h \to 0+$. Inoltre $\lambda(h)/h \to +\infty$ per $h \to 0+$. Infatti

$$h/\lambda(h) < (1+\varepsilon)\, \overline{\psi}\big((1+\varepsilon)\ \lambda(h)\big) \to 0+ \quad \text{per } h \to 0+ .$$

Risulteranno utili anche le due definizioni seguenti:

Siano $\lambda_1(h)$ e $\lambda_2(h)$ due funzioni di $h$ scelte in guisa da avere:

$$\overline{\psi}(\lambda_1) \cdot \lambda_1/h \to 0+, \quad \lambda_1(h) \to 0+ \quad \text{per } h \to 0+,$$

$$\overline{\psi}(\lambda_2) \cdot \lambda_2/h \to +\infty, \quad \lambda_2(h) \to 0+ \quad \text{per } h \to 0+ .$$

Di tali funzioni $\lambda_1(h)$, $\lambda_2(h)$ ne esistono evidentemente infinite coppie. Per esempio se $\omega(h) \to +\infty$, $h \cdot \omega(h) \to 0$, basta assumere

$$\lambda_1(h) = \operatorname{Sup} u \quad (u\overline{\psi}(u) \leqq h/\omega(h)), \qquad \lambda_2(h) = 2 \operatorname{Sup} u \quad (u\overline{\psi}(u) \leqq h \cdot \omega(h)).$$

#### 4. - Gli integrali oggetto di studio.

Poniamo

$$I(\varphi) = \int_0^1 | \varphi(t \pm h) - \varphi(t) | \, dt \qquad (h > 0).$$

Ci proponiamo di studiare l'andamento di questo integrale per $h \to 0+$; converremo che $\varphi(t)$ sia definita anche in un intorno sinistro del punto 0 con la clausola che risulti, per $t > 0$,

$$\overline{\psi}(t) = \operatorname*{Sup}_{-t<u<t} | \psi(u) | = \operatorname*{Sup}_{0<u<t} | \psi(u) | .$$

Dai risultati riguardanti l'integrale $I(\varphi)$ si deducono in modo ovvio quelli riguardanti l'andamento dell'integrale analogo

$$J(\varphi) = \int_{-1}^1 | \varphi(t \pm h) - \varphi(t) | \, dt \qquad (h > 0),$$

convenendo di porre $\varphi(t) = 0$ fuori dell'intervallo $-1 < t < 1$, $t \neq 0$.

#### 5. - I teoremi principali di tipo $o(\ldots)$ e osservazioni.

Ci riferiamo alle notazioni presentate nei nn. 3, 4.

Teorema (A). *Sia* $0 < \alpha < 1$,

$$\varphi(t) = \psi(t) / | t |^{1-\alpha}, \qquad \psi(t) \to 0 \quad \text{per} \quad t \to 0,$$

*$\psi(t)$ verifichi in $0 < t < 1$ la condizione (Y) di W. H. Young e sia priva di salti esterni; $\overline{\psi}(t)$, $H_\sigma$ abbiano il significato definito nel n. 3.*

*Allora per l'integrale*

$$I(\varphi) = \int_0^1 | \varphi(t \pm h) - \varphi(t) | \, dt$$

*valgono le seguenti limitazioni: ad ogni $\varepsilon > 0$ si possono coordinare $h_0(\varepsilon)$, $h_1(\varepsilon)$, $h_2(\varepsilon)$ tali che si abbia:*

$$(\mathrm{A}_0) \qquad I(\varphi) < \{ K(\psi, \alpha) + \varepsilon \} \overline{\psi}^{1-\alpha}(\lambda) \cdot h^\alpha \qquad \text{per} \quad h \leqq h_0(\varepsilon),$$

$$(\mathrm{A}_1) \qquad I(\varphi) < (H_\sigma + \varepsilon) \cdot h / \lambda_1^{1-\alpha} \qquad \text{per} \quad h \leqq h_1(\varepsilon),$$

$$(\mathrm{A}_2) \qquad I(\varphi) < (2/\alpha + \varepsilon) \, \psi(\lambda_2) \cdot \lambda_2^\alpha \qquad \text{per} \quad h \leqq h_2(\varepsilon),$$

*dove* $K(\psi, \alpha) = 2/\alpha + H_\sigma$, *e* $\lambda$, $\lambda_1$, $\lambda_2$ *sono definiti in guisa da avere* (vedi n. 3.2)

$$\bar{\psi}(\lambda_1)\cdot\lambda_1/h \to 0, \qquad \bar{\psi}(\lambda_2)\cdot\lambda_2/h \to +\infty, \qquad \lambda = \operatorname{Sup} u \quad (\bar{\psi}(u)\cdot u \leqq h).$$

Osservazioni.

1) Nella forma del secondo membro della disuguaglianza ($A_0$) stabilita per $I(\varphi)$ concorrono simultaneamente i due aspetti di $\psi(t)$: quello legato al crescere del Sup $|\psi(t)|$ e quello legato al comportamento della variazione totale di $\psi(t)$ in intervalli prossimi all'origine [cioè la funzione $H(\eta, \sigma)$ che descrive questo comportamento].

2) Che cosa si può dire circa la « bontà » della costante $K(\psi, \alpha)$ che figura in ($A_0$)? A questo quesito risponde la seguente proposizione:

Teorema (B). *Il Teorema* (A) *cessa di valere se in* ($A_0$) *si sostituiscono in luogo di* $K(\psi, \alpha)$ *l'una o l'altra delle due seguenti espressioni*

$$K(\psi, \alpha)\cdot(1-\varepsilon) \qquad (\varepsilon > 0),$$

$$K(\psi, \alpha) - 2 - \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0).$$

Anzi, possiamo precisare di più: denotiamo con $F(\gamma, \alpha)$ la famiglia delle funzioni $\varphi(t) = t^{\alpha-1}\cdot\psi(t)$ con $|\psi(t)| \leqq t^\gamma$ $(\gamma > 0,\ 0 < \alpha < 1)$; allora:

*Fissati* $\varepsilon > 0$ *e* $0 < \alpha < 1$, *per* $\gamma$ *abbastanza grande, esiste in* $F(\gamma, \alpha)$ *una funzione* $\varphi(t)$ *per cui*

$$I(\varphi) > K(\psi, \alpha)(1-\varepsilon)\bar{\psi}^{1-\alpha}(\lambda)\cdot h^\alpha$$

*e, per* $\gamma$ *abbastanza piccolo, esiste in* $F(\gamma, \alpha)$ *una funzione* $\varphi(t)$ *per cui*

$$I(\varphi) > \left\{K(\psi, \alpha) - \frac{2\left(1-(1-\alpha)^{1-\alpha}\right)}{\alpha(1-\alpha)} - \varepsilon\right\}\bar{\psi}^{1-\alpha}(\lambda)\cdot h^\alpha.$$

*Per* $\varepsilon > 0$, *per* $\gamma$ *e* $\alpha$ *abbastanza piccoli, esiste in* $F(\gamma, \alpha)$ *una funzione* $\varphi(t)$ *per cui*

$$I(\varphi) > \left\{K(\psi, \alpha) - 2 - \varepsilon\right\}\bar{\psi}^{1-\alpha}(\lambda)\cdot h^\alpha.$$

## 6. - Dimostrazione del Teorema (B).

Costruiamo una famiglia $F(\gamma, \alpha)$ di funzioni $\varphi(t) = \psi(t)/t^{1-\alpha}$ che ci fornirà una valutazione di sotto della costante $K(\psi, \alpha)$ che figura nel Teorema (A) (v. n. 5) e ci condurrà al Teorema (B).

Sia $0 < \mu < \nu < 1$, $\nu = \mu(1 + \tau)$, $\sigma > \tau > 0$.

Poniamo

$$\bar{\psi}(t) = t^{\gamma} \quad (\gamma > 0,\ \mu \leqq t \leqq \nu)\,.$$

Dividiamo l'intervallo $I \equiv (\mu \leqq t \leqq \nu)$ in intervalli uguali, la cui ampiezza diciamo $\omega$; supponiamo che il numero $U$ di tali intervalli sia pari; risulta

$$U = \mu\tau/\omega = \nu\tau/\{(1 + \tau)\omega\}.$$

Poniamo $\nu = c_1\, \omega^{1/(1+\gamma)}$ e definiamo la funzione $\psi(t)$ nel modo seguente per $\mu \leqq t \leqq \nu$:

$$\psi(t) = \begin{cases} \bar{\psi}(t) & \text{per } \mu + 2u\omega \leqq t < \mu + (2u + 1)\omega\,, \\ -\bar{\psi}(t) & \text{per } \mu + (2u + 1)\omega \leqq t < \mu + (2u + 2)\omega \end{cases}$$

con $u = 0, 1, 2, \ldots, (U - 2)/2$; inoltre $\psi(t) = t^{\gamma}$ per $0 < t < \mu$, $\nu < t < 1$ (cioè per $t$ fuori di $I$).

Essendo $\sigma > \tau$ ogni intervallo $\eta/(1 + \sigma) \leqq t \leqq \eta$ può contenere parte di $I$ e anche tutto $I$; inoltre essendo $t^{\gamma}$ monotona crescente è evidente che

$$V_{\psi}\big(\eta/(1 + \sigma),\ \eta\big) \geqq \eta^{\gamma}\{1 - (1 + \sigma)^{-\gamma}\}$$

e inoltre, poichè soltanto in $I$ la $\psi(t)$ salta da valori positivi a valori negativi e viceversa, la variazione $V_{\psi}$ assume grandi valori quando

$$\eta/(1 + \sigma) \leqq \mu < \nu \leqq \eta\,. \tag{6.1}$$

Per semplicità di scrittura poniamo $\eta_1 = \eta/(1 + \sigma)$. Allora risulta, nell'ipotesi (6.1),

$$V_{\psi}(\eta_1,\ \eta) = \mu^{\gamma} - \eta_1^{\gamma} + V_{\psi}(\mu,\ \nu) + \eta^{\gamma} - \nu^{\gamma}.$$

Calcoliamo $V_{\psi}(\mu,\ \nu)$.

$$\begin{aligned} V_{\psi}(\mu,\ \nu) &= \sum_{u=0}^{U-1} V_{\psi}\big(\mu + u\omega,\ \mu + (u + 1)\omega\big) = \\ &= \sum_{u=0}^{U-1}\{3\big(\mu + (u + 1)\omega\big)^{\gamma} - (\mu + u\omega)^{\gamma}\} \\ &= -\mu^{\gamma} + 2\sum_{u=1}^{U}(\mu + u\omega)^{\gamma} + \nu^{\gamma} = 2\int_0^U(\mu + u\omega)^{\gamma}\, du + O(\nu^{\gamma}) = \\ &= \frac{2}{\omega}\int_{\mu}^{\nu} z^{\gamma}\, dz + O(\nu^{\gamma}) = \frac{2(\nu^{1+\gamma} - \mu^{1+\gamma})}{(1 + \gamma)\omega} + O(\nu^{\gamma})\,. \end{aligned}$$

Ricordando che $\nu = c_1\,\omega^{1/(1+\gamma)}$, $\mu = \nu/(1+\tau)$, risulta

$$V_\varphi(\mu,\ \nu) = \frac{2}{1+\gamma}\,\tau_1\,c_1^{1+\gamma} + O(\nu^\gamma)\,,$$

dove si è posto per semplicità $\tau_1 = 1 - 1/(1+\tau)^{1+\gamma}$. Dunque, nelle ipotesi (6.1), risulta

$$V_\varphi(\eta_1,\ \eta) = \frac{2}{1+\gamma}\,\tau_1\,c_1^{1+\gamma} + O(\eta^\gamma)\,.$$

Si riconosce che in ogni caso è $V_\varphi(\eta_1,\ \eta) \leqq$ al secondo membro e quindi

$$\operatorname*{Sup}_{0<u\leqq\eta} V_\varphi\big(u/(1+\sigma),\ u\big) = \frac{2}{1+\gamma}\,\tau_1 c_1^{1+\gamma} + O(\eta^\gamma)\,.$$

Poniamo

$$\varphi(t) = t^{\alpha-1}\cdot\psi(t),$$

$$\Phi(\mu,\ \nu) = \int_\mu^\nu |\,\varphi(t+\omega) - \varphi(t)\,|\,\mathrm{d}t \leqq \int_0^1 \dots \text{ (5)}\,.$$

Poichè $\varphi(t+\omega)$ ha segno opposto a $\varphi(t)$, risulta

$$|\,\varphi(t+\omega) - \varphi(t)\,| = |\,\varphi(t+\omega)\,| + |\,\varphi(t)\,| = (t+\omega)^{\alpha+\gamma-1} + t^{\alpha+\gamma-1},$$

$$\Phi(\mu,\ \nu) = \int_\mu^\nu \left\{ (t+\omega)^{\alpha+\gamma-1} + t^{\alpha+\gamma-1} \right\} \mathrm{d}t$$

e quando sia $\omega/\nu < \omega/\mu < 1/2$ risulta, con semplice calcolo (essendo $\nu = \mu(1+\tau)$ e pensando $\tau$ fisso),

$$\Phi(\mu,\ \nu) \geqq \frac{2}{\alpha+\gamma}\left\{1 - \frac{1}{(1+\tau)^{\alpha+\gamma}}\right\}\nu^{\alpha+\gamma} + O(\omega\,\nu^{\alpha+\gamma-1})\,.$$

Ricordiamo che

$$\nu = c_1\,\omega^{1/(1+\gamma)}, \qquad \omega = (\nu/c_1)^{1+\gamma},$$

---

(5) Con ... sotto il segno di integrale intenderemo, qui e nel seguito, quanto si trova sotto il segno dell'integrale che precede.

e quindi $\omega/\nu \to 0$ per $\nu \to 0$. Si ricava

$$\Phi(\mu, \nu) \geqq \frac{2\tau_2 c_1^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}(1+o(1))\omega^{(\alpha+\gamma)/(1+\gamma)},$$

dove $\tau_2 = 1-(1+\tau)^{-(\alpha+\gamma)}$.

Consideriamo adesso una successione $\{I_n\}$ di intervalli analoghi a $I$:

$$I_n \equiv (\mu_n \leqq t \leqq \nu_n), \qquad \nu_n = \mu_n(1+\tau),$$

scelti in guisa che sia

$$\nu_{n+1} < \frac{\nu_n}{(1+\tau)(1+\sigma)} = \frac{\mu_n}{1+\sigma} \qquad (\nu_n \to 0+)$$

e con questa scelta ogni intervallo $\eta/(1+\sigma) \leqq t \leqq \eta$, per ogni $\eta > 0$, ha in comune punti con al più un solo $I_n$. Definiamo su ogni $I_n$ le due funzioni $\psi_n(t)$, $\varphi_n(t)$ come le due precedenti $\psi(t)$, $\varphi(t)$ su $I$; definiamo

$$\psi(t) = \begin{cases} t^{\gamma} & \text{per } t \notin \bigcup\limits_n I_n, \\ \psi_n(t) & \text{per } t \in I_n, \end{cases} \qquad \varphi(t) = t^{\alpha-1}\psi(t).$$

Poichè ogni intervallo $\eta_1 = \eta/(1+\sigma) \leqq t \leqq \eta$ ha punti in comune con uno al più degli $I_n$, nei riguardi di questa funzione $\psi(t)$ risulta ancora

$$\overline{H}(\eta, \sigma) = \operatorname*{Sup}_{0<u\leqq\eta} V_{\psi}\big(u/(1+\sigma), u\big) = \frac{2}{1+\gamma}\tau_1 c_1^{1+\gamma} + O(\eta^{\gamma})$$

e, per $\eta \to 0+$ (vedi n. 3.1)

$$H_{\sigma} = \sigma_1 \frac{2}{1+\gamma}\tau_1 c_1^{1+\gamma}.$$

*La funzione $\psi(t)$ soddisfa alla condizione* (Y) *di Young.*

La costante che figura nella $(A_0)$ (n. 5) risulta, quando si ponga $h = \omega$:

$$K(\psi, \alpha) = \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{1+\gamma}\sigma_1\tau_1 c_1^{1+\gamma}.$$

Poichè $\bar{\psi}(t) = t^{\gamma}$ il parametro $\lambda(h)$ si calcola semplicemente:

$$\lambda = \lambda(h) = \operatorname{Sup} u(u\bar{\psi}(u) \leqq h) = h^{1/(1+\gamma)}$$

e quindi la $(A_0)$ ci fornisce

$$\begin{aligned} I(\varphi) &< \{ K(\psi, \alpha) + \varepsilon \} h^{(1-\alpha)/(1+\gamma)} \cdot h^{\alpha} \\ &< \{ K(\psi, \alpha) + \varepsilon \} h^{(\alpha+\gamma)/(1+\gamma)}. \end{aligned}$$

D'altronde, assumendo $h = \omega = (\nu_n/c_1)^{1+\gamma}$ risulta $\omega/\nu_n \to 0$ e

$$\begin{aligned} I(\varphi) &= \int_0^1 | \varphi(t+h) - \varphi(t) | \, dt \geqq \Phi(\mu_n, \nu_n) \\ &\geqq \frac{2\tau_2 c_1^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} \{ 1 + O(h^{\gamma/(1+\gamma)}) \} h^{(\alpha+\gamma)/(1+\gamma)} . \end{aligned}$$

Si tratta di confrontare, con l'opportuna scelta dei parametri disponibili, le due espressioni

$$\frac{2\tau_2 c_1^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}, \qquad \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{1+\gamma} \sigma_1 \tau_1 c_1^{1+\gamma} .$$

Fissati $\varepsilon_1 > 0$ e $\alpha$, $\gamma$, $c_1$, si possono scegliere $\tau \geqq \tau_0(\varepsilon_1)$, $\sigma > \tau$, $\sigma \geqq \sigma_0(\varepsilon_1)$ in guisa che $\tau_1$, $\tau_2$ e $\sigma_1$ siano abbastanza vicini a 1 da avere

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{2c_1^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} - \varepsilon < \frac{2\tau_2 c_1^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} \\ &(1-\varepsilon) \frac{2c_1^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma} < \frac{2\tau_2 c_1^{\alpha+\gamma}}{\alpha+\gamma}, \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\frac{2}{\alpha} + \frac{2c_1^{1+\gamma}}{1+\gamma} + \varepsilon > \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{1+\gamma} \sigma_1 \tau_1 c_1^{1+\gamma} \\ &\left\{ \frac{2}{\alpha} + \frac{2c_1^{1+\gamma}}{1+\gamma} \right\} (1+\varepsilon) > \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{1+\gamma} \sigma_1 \tau_1 c_1^{1+\gamma} . \end{aligned} \right.$$

Assumiamo:

$$c_1 = \left\{ \frac{(\alpha+\gamma)(1+\gamma)}{\alpha(1-\alpha)} \right\}^{1/(1+\gamma)},$$

allora, sostituendo questa espressione nelle precedenti, si perviene alle espressioni delle costanti con la seguente catena di diseguaglianze:

$$\{ C_1(\gamma, \alpha) - \varepsilon_1 \} h^{(\alpha+\gamma)/(1+\gamma)} < I(\varphi) < \{ C_2(\gamma, \alpha) + \varepsilon_1 \} h^{(\alpha+\gamma)/(1+\gamma)},$$

oppure le analoghe

$$(1 - \varepsilon_1)\, C_1(\gamma, \alpha)\, h^{(\alpha+\gamma)/(1+\gamma)} < I(\varphi) < (1 - \varepsilon_1)\, C_2(\gamma, \alpha)\, h^{(\alpha+\gamma)/(1+\gamma)},$$

dove

$$\begin{cases} C_1(\gamma, \alpha) = \left\{ \dfrac{2^{1+\gamma}}{(\alpha+\gamma)^{1-\alpha}} \left( \dfrac{1+\gamma}{\alpha(1-\alpha)} \right)^{\alpha+\gamma} \right\}^{1/(1+\gamma)} \\ \\ C_2(\gamma, \alpha) = \dfrac{2(1+\gamma)}{\alpha(1-\alpha)}\,. \end{cases}$$

Osserviamo che

$$C_2 - C_1 = \frac{2(1+\gamma)}{\alpha(1-\alpha)} \left\{ 1 - \left( \frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+\gamma)(1+\gamma)} \right)^{(1-\alpha)/(1+\gamma)} \right\},$$

$$C_1/C_2 = \left\{ \frac{\alpha(1-\alpha)}{(\alpha+\gamma)(1+\gamma)} \right\}^{(1-\alpha)/(1+\gamma)}.$$

Adesso osserviamo che

$$\lim_{\gamma \to +\infty} C_1/C_2 = 1-,$$

pertanto, per ogni $\alpha$, a $K(\psi, \alpha)$ non si può sostituire $K(\psi, \alpha)\,(1 - \varepsilon)$ senza che il teorema cessi di valere.

Osserviamo che è

$$\lim_{\gamma \to 0+} (C_2 - C_1) = \frac{2}{\alpha(1-\alpha)} \left\{ 1 - (1-\alpha)^{1-\alpha} \right\}.$$

Passando al limite per $\alpha \to 0+$ otteniamo

$$\frac{2}{\alpha(1-\alpha)} \{ 1 - (1-\alpha)^{1-\alpha} \} \to 2$$

e quindi risulta

$$\lim_{\alpha \to 0+}\ \lim_{\gamma \to 0+} (C_2 - C_1) = 2\,.$$

**7. - I teoremi principali di tipo** $O(\ldots)$.

Ci riferiamo ancora alle notazioni presentate nei nn. 3, 4, salvo che all'ipotesi $\psi(t) \to 0$ per $t \to 0$ si sostituisce l'ipotesi:

$\psi(t)$ *si mantiene limitata per* $-1 \leqq t \leqq 1$.

Premettiamo alcune osservazioni:

1) $I(\varphi + c) = I(\varphi)$.

2) Se in luogo di $\varphi(t)$ sostituiamo $c \cdot \varphi(t)$ risulta $I(c\varphi) = |c| \, I(\varphi)$.

3) Se in luogo di $\psi(t)$ sostituiamo $\psi_1(t) = \psi(t) + c$, otteniamo un integrale $I(\varphi_1)$ che è legato a $I(\varphi)$ dalla seguente catena di disuguaglianze:

$$(7.1) \qquad -I(\varphi_1) \leqq I(\varphi) - \left\{ |c| \frac{2^{2-\alpha}-1}{\alpha} \cdot h^\alpha - |c| h + O(h^2) \right\} \leqq I(\varphi_1)\,.$$

4) Poichè $\psi(t)$ si mantiene limitata esaminiamo separatamente i due casi:

I) $\psi(t) \to c$ (possiamo supporre $c > 0$) per $t \to 0$. Allora ponendo $\psi(t) = c + \psi_1(t)$ risulta $\psi_1(t) \to 0$ per $t \to 0$ e, se $\psi(t)$ è limitata e soddisfa la condizione (Y) di W. H. Young in $0 < t < 1$, $\psi_1(t)$ gode pure di queste proprietà. Definiamo $\bar{\psi}_1(t)$ per $\psi_1(t)$ come è stata definita $\bar{\psi}(t)$ per $\psi(t)$, sia cioè:

$$\bar{\psi}_1(t) = \operatorname*{Sup}_{0<u<t} |\psi_1(u)|\,.$$

II) Sia $A = \underline{\lim}\, \psi(t) < \overline{\lim}\, \psi(t) = B$ (per $t \to 0+$). In questo caso normalizziamo la funzione $\psi(t)$ in modo che $A$ e $B$ siano rispettivamente $-1$ e $+1$, cioè trattiamo il problema per la funzione

$$\psi_1(t) = \frac{2\psi(t) - (A+B)}{B-A}$$

e prendiamo in considerazione l'integrale $I(\varphi_1)$. Per le osservazioni 1) e 3), un semplice calcolo porta a

$$(7.2) \qquad -\frac{B-A}{2} I(\varphi_1) \leqq I(\varphi) - \left\{ \frac{|A+B|}{2} \frac{2^{2-\alpha}-1}{\alpha} h^\alpha - \frac{|A+B|}{2} h + O(h^2) \right\} \leqq \frac{B-A}{2} I(\varphi_1)\,.$$

Osserviamo poi che, posto

$$V_{\psi_1}\big(\eta/(1+\sigma),\ \eta\big) = H^1(\eta,\ \sigma), \qquad H^1_\sigma = \sigma_1 \lim_{\eta\to 0} H^1(\eta,\ \sigma)\,,$$

risulta

$$H^1_\sigma = \frac{2}{B-A}\,H_\sigma\,.$$

Teorema (C). *Sia* $0<\alpha<1$,

$$\varphi(t) = \psi(t)/\,|\,t\,|^{1-\alpha}, \qquad \psi(t) = c + \psi_1(t), \qquad \psi_1(t)\to 0 \quad per\ t\to 0+.$$

*$\psi(t)$ verifichi in $0<t<1$ la condizione* (Y) *di W. H. Young e sia priva di salti esterni.*

*Allora per $\varepsilon>0$ e $0\leqq h\leqq h_0(\varepsilon)$ risulta*

$$I(\varphi) = C\,h^\alpha - c\,h + \theta\left\{(K(\psi_1,\ \alpha)+\varepsilon)\,\overline{\psi}_1^{1-\alpha}(\lambda)\cdot h^\alpha\right\} + O(h^2),$$

*dove* $C = c(2^{2-\alpha}-1)/\alpha$, $-1\leqq\theta\leqq 1$, *$K(\psi_1,\ \alpha)$ è la costante implicata nel teorema* (A) *calcolata per la funzione $\psi_1(t)$, cioè*

$$K(\psi_1,\ \alpha) = 2/\alpha + H^1_\sigma\,,$$

*e la costante implicata in $O(h^2)$ è indipendente da $\varepsilon$.*

Se $\psi(t)$ non tende a un limite per $t\to 0+$, si pensa normalizzata con $\varliminf \psi(t) = -1$, $\varlimsup \psi(t) = 1$ e si stabiliscono i seguenti teoremi.

Teorema (D). *Sia* $0<\alpha<1$,

$$\varphi(t) = \psi(t)/\,|\,t\,|^{1-\alpha},\ \ \psi(t)\ \textit{limitata per}\ 0\leqq t\leqq 1,\ \ \varliminf_{t\to 0}\psi(t) = -1, \qquad \varlimsup_{t\to 0}\psi(t) = 1,$$

*$\psi(t)$ verifichi in $0<t<1$ la condizione* (Y) *di W. H. Young e sia priva di salti esterni; $H_\sigma$ abbia il significato definito nel* n. **3**.

*Per $\varepsilon>0$ e $0\leqq h\leqq h_0(\varepsilon)$ risulta*

$$(\mathrm{D}_0) \qquad I(\varphi) < \left\{K(\psi,\ \alpha)+\varepsilon\right\}\cdot h^\alpha,$$

*dove* $K(\psi,\ \alpha) = (3+2^{2-\alpha})/\alpha + H_\sigma\,.$

Osservazione. Il seguente esempio mostra che questo teorema cessa di valere se a $K(\psi, \alpha)$ si sostituisce $K(\psi, \alpha)(3/7-\varepsilon)$ con $\varepsilon > 0$.

Per $0 < t \leqq 1$, $0 < \alpha < 1$ consideriamo le due funzioni $\bar{\psi}(t) \equiv 1$, $\bar{\varphi}(t) = t^{\alpha-1}$ e la successione di ascisse $1/(1+\sigma)^n$ con $\sigma > 0$.

Definiamo le due funzioni $\psi(t)$, $\varphi(t)$:

$$\text{per } 1/(1+\sigma)^{2n+1} < t \leqq 1/(1+\sigma)^{2n} \quad \text{sia} \quad \psi(t) = \bar{\psi}(t), \qquad \varphi(t) = \bar{\varphi}(t)$$

$$\text{per } 1/(1+\sigma)^{2n+2} < t \leqq 1/(1+\sigma)^{2n+1} \quad \text{sia} \quad \psi(t) = -\bar{\psi}(t), \qquad \varphi(t) = -\bar{\varphi}(t).$$

Ogni intervallo $\eta/(1+\sigma) \leqq t \leqq \eta$ contiene un salto della $\psi(t)$ e uno solo; pertanto $\bar{H}(\eta, \sigma) = 2$ e $H_\sigma = 2\sigma_1$. La costante che figura nella $D_0$ (n. 7) risulta, posto $h = \omega$,

$$K(\psi, \alpha) = (3 + 2^{2-\alpha})/\alpha + 2\sigma_1 .$$

D'altra parte, ponendo $h = \omega = 1/(1+\sigma)^{2n} - 1/(1+\sigma)^{2n+1} = \sigma/(1+\sigma)^{2n+1}$, risulta

$$I(\varphi) = \int_0^1 |\varphi(t \pm h) - \varphi(t)|\, dt \geqq \int_0^{1/(1+\sigma)^{2n}} \dots + \sum_{h=0}^{2n-1} \int_{1/(1+\sigma)^h}^{1/(1+\sigma)^{h+}} \dots$$

$$\geqq \left\{ \frac{1}{\alpha} + 2\, \frac{\sigma^{1-\alpha}}{(1+\sigma)^{1-\alpha} - 1} \right\} (1 + O(h)) \cdot h^\alpha .$$

Fissati $\varepsilon$ e $\alpha$ si può scegliere $\sigma \geqq \sigma_0(\varepsilon)$ in modo che si abbia

$$(3 + 2^{2-\alpha})/\alpha + 2 + \varepsilon > (3 + 2^{2-\alpha})/\alpha + 2\sigma_1 ,$$

$$\{C_1(\alpha) - \varepsilon\}\, h^\alpha < I(\varphi) < \{C_2(\alpha) + \varepsilon_1\}\, h^\alpha ,$$

dove

$$C_1(\alpha) = 1/\alpha + 2, \qquad C_2(\alpha) = (3 + 2^{2-\alpha})/\alpha + 2 .$$

Osserviamo che

$$C_1/C_2 = \frac{1 + 2\alpha}{3 + 2^{2-\alpha} + 2\alpha} \to 3/7 \text{ per } \alpha \to 1,$$

da cui segue l'asserto.

Teorema ($D_1$). *Se nelle ipotesi del Teorema* (D) *si sostituisce* $\varliminf_{t\to 0} \psi(t) = -1$, $\varlimsup_{t\to 0} \psi(t) = 1$ *con*

$$A = \varliminf_{t\to 0} \psi(t) < \varlimsup_{t\to 0} \psi(t) = B \qquad (A + B > 0),$$

*allora per* $\varepsilon > 0$ *e* $0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon)$ *risulta:*

$$\{P(\psi, \alpha) - \varepsilon\} h^\alpha - \frac{A+B}{2} h + O(h^2) < I(\varphi) < \{K(\psi, \alpha) + \varepsilon\} h^\alpha - \frac{A+B}{2} h + O(h^2),$$

*dove*

$$K(\psi, \alpha) = (2^{2-\alpha} - 1)B/\alpha + 2(B - A)/\alpha + H_\sigma,$$

$$P(\psi, \alpha) = \{A(2^{2-\alpha} - 1) - (B - A)(2 + \alpha\, H_\sigma^1/2)\}/\alpha,$$

$H_\sigma^1$ *ha il significato definito nel* n. **7**, *Oss.* 4, II [*la disuguaglianza a sinistra cessa di essere significativa quando* $P(\psi, \alpha) \leqq 0$].

Osservazioni. 1) Nel caso in cui sia $A + B < 0$ vale la stessa proposizione purchè si sostituisca $(-B, -A)$ in luogo di $(A, B)$.

2) Anche qui, come nel Teor. (A), sulla costante $K(\psi, \alpha)$ la funzione $\psi(t)$ influisce attraverso il crescere di Sup $|\psi(t)|$ e attraverso il comportamento della variazione totale di $\psi(t)$ in intervalli prossimi all'origine.

## 8. - Teoremi per categorie speciali di funzioni.

Ci riferiamo alle notazioni presentate nei nn. **3**, **4**.

Ogni $\psi(t)$ a variazione finita verifica la condizione (Y) di Young.

Teorema I. *Sia* $0 < \alpha < 1$, $\varphi(t) = \psi(t)/|t|^{1-\alpha}$, $\psi(t) \to 0$ *per* $t \to 0$, $\psi(t)$ *a variazione finita in* $0 \leqq t \leqq 1$; $\bar{\psi}(t)$ *e* $\lambda$ *abbiano il significato definito nel* n. **3**. *Allora si ha* $I(\varphi) = o(\bar{\psi}^{1-\alpha}(\lambda)) \cdot h^\alpha$ *per* $h \to 0$.

Teorema II. *Sia* $0 < \alpha < 1$, $\varphi(t) = \psi(t)/|t|^{1-\alpha}$, $\psi(t) = c + \psi_1(t) \to c$ *per* $t \to 0$, $\psi(t)$ *a variazione finita in* $0 \leqq t \leqq 1$. *Allora è*

$$I(\varphi) = A \cdot h^\alpha - ch + o\{\bar{\psi}_1^{1-\alpha}(\lambda) \cdot h^\alpha\} + O(h^2) \quad per\ h \to 0,$$

*dove*

$$A = (2^{2-\alpha} - 1)c/\alpha, \qquad \bar{\psi}_1(t) = \operatorname*{Sup}_{-t<u<t} |\psi_1(u)| \quad (u \neq 0).$$

Questo risultato si ottiene immediatamente dalla (7.1) applicando il Teor. I alla funzione $\psi_1(t)$.

Teorema III. *Sia* $0<\alpha<1$ *e* $\varphi(t)$ *differenziabile per* $-1\leqq t\leqq 1$, $t\neq 0$,

$$\left|\,|t|^{2-\alpha}\varphi'(t)\right|<K, \qquad |t|^{2-\alpha}\varphi'(t)=\varepsilon(t)\to 0 \;\; per \;\; t\to 0\,,$$

$$\bar{\varepsilon}(t)=\operatorname*{Sup}_{-t<u<t}|\varepsilon(u)|=\operatorname*{Sup}_{0<u<t}|\varepsilon(u)|\,,$$

$$\lambda=\lambda(h)=\operatorname{Sup} u \quad \left(\bar{\varepsilon}(u)\cdot u\leqq h\right).$$

*Allora per* $\varepsilon>0$ *e* $0\leqq h\leqq h_0(\varepsilon)$ *risulta*

$$I(\varphi)<\left\{K(\alpha)+\varepsilon\right\}\bar{\varepsilon}(\lambda)\cdot h^{\alpha}, \qquad K(\alpha)=(2^{2-\alpha}-1)/\left\{\alpha(1-\alpha)\right\}.$$

(Osserviamo che $\lambda\to 0+$, $\bar{\varepsilon}(\lambda)\to 0+$ per $h\to 0+$.)

Osservazione. Sia $\varphi(t)$ differenziabile in $0<t\leqq 1$ e inoltre sia

$$\left|\,|t|^{2-\alpha}\varphi'(t)\right|<K, \qquad |t|^{2-\alpha}\varphi'(t)=\varepsilon(t)\to 0 \quad \text{per} \quad t\to 0+; \tag{8.1}$$

allora $\varphi(t)$ *verifica tutte le ipotesi richieste nel Teor.* $(A)$.

Infatti $\varphi'(t)=\varepsilon(t)/t^{2-\alpha}$ e, posto $\bar{\varepsilon}(t)=\operatorname*{Sup}_{0<u<t}\varepsilon(u)$, integrando otteniamo

$$|\varphi(t)|=\left|\int_t^{t_0}\frac{\varepsilon(u)}{u^{2-\alpha}}\,du\right|\leqq\left|\int_t^{\tau}\dots\right|+\left|\int_{\tau}^{t_0}\dots\right|$$

$$\leqq\frac{\bar{\varepsilon}(\tau)}{1-\alpha}\,\frac{1}{t^{1-\alpha}}+\frac{\bar{\varepsilon}(t_0)}{1-\alpha}\,\frac{1}{\tau^{1-\alpha}}\,,$$

da cui

$$|\psi(t)|=|t^{1-\alpha}\varphi(t)|\leqq\frac{\bar{\varepsilon}(\tau)}{1-\alpha}+\frac{\bar{\varepsilon}(t_0)}{1-\alpha}\left(\frac{t}{\tau}\right)^{1-\alpha};$$

assumendo $\tau=\sqrt{t}$ risulta evidentemente $\psi(t)\to 0$ per $t\to 0+$.

Inoltre $\psi(t)$ verifica la condizione (Y); infatti $\psi(t)$ è differenziabile in $0<t\leqq 1$ e il prodotto $t\,\psi(t)$ è a variazione finita, poichè è

$$D(t\,\psi(t))=D(t^{2-\alpha}\varphi(t))=(2-\alpha)\,\psi(t)+t^{2-\alpha}\varphi'(t)$$

e ciascuno dei due termini dell'ultimo membro è limitato. Pertanto si maggiora la variazione nel modo seguente:

$$\begin{aligned}\int_0^{\eta}|\,d(u\,\psi(u))\,|&\leqq\int_0^{\eta}|\,\psi(u)+u\,\psi'(u)\,|\,du\\&\leqq\int_0^{\eta}|\,\psi(u)\,|\,du+(1-\alpha)\int_0^{\eta}|\,u^{1-\alpha}\varphi(u)\,|\,du+\int_0^{\eta}|\,u^{2-\alpha}\varphi'(u)\,|\,du\\&\leqq(2-\alpha)\,\bar{\psi}(\eta)\,\eta+K\eta=O(\eta).\end{aligned}$$

Per scrivere la valutazione $(A_0)$ (n. 5) occorre procurarci l'espressione di $\psi(t)$. Posto

$$\varepsilon_1(t) = \frac{1}{t}\int_0^t \varepsilon(u)\,du \qquad (\varepsilon_1(t) \to 0 \ \text{per}\ t \to 0+),$$

$$y(t) = \int_0^t \psi(u)\,du\,,$$

integrando per parti la prima, col tener conto della seconda, si ottiene

$$y' - (2-\alpha)\,y/t = \varepsilon_1(t)$$

e, integrando,

$$\psi(t) = \varepsilon_1(t) - (2-\alpha)\,t^{1-\alpha}\int_t^{t_0} \frac{\varepsilon(u)}{u^{2-\alpha}}\,du\,.$$

Osserviamo che nel caso particolare $\varepsilon_1(t) = t^\gamma$ $(\gamma > 0,\ \gamma \neq 1-\alpha)$ il secondo termine del secondo membro risulta

$$\frac{2-\alpha}{\gamma+\alpha-1}\,\{t^{1-\alpha}\ t_0^{\gamma+\alpha-1} - t^\gamma\}\,,$$

e quindi secondochè $\gamma < 1-\alpha$, $\gamma > 1-\alpha$ i due termini sono dello stesso ordine oppure prevale il secondo.

Posto $\bar{\varepsilon}_1(t) = \sup\limits_{0<u<t} |\,\varepsilon_1(u)\,|$, risulta

$$\bar{\psi}(\lambda) \leqq \bar{\varepsilon}_1(\lambda) + (2-\alpha)\,\lambda^{1-\alpha}\int_\lambda^{t_0} \frac{\bar{\varepsilon}_1(u)}{u^{2-\alpha}}\,du$$

e questa espressione è quella che deve figurare in $(A_0)$.

D'altronde, in base alle (8.1), un semplice calcolo diretto fornisce la maggiorazione di $I(\varphi)$ che figura nel Teor. III.

Il confronto fra il Teor. III e il risultato corollario del Teor. (A) per la funzione differenziabile conduce alle seguenti osservazioni:

a) Se $\varphi(t)$ è scelta in guisa da avere $0 < \alpha < 1/2$, $\varepsilon(t) = t^{2-\alpha}\varphi'(t) = (3-2\alpha)t^{2-2\alpha}\cdot \cos(1/t) + t^{1-2\alpha}\,\mathrm{sen}\,(1/t)$, allora risulta $\varepsilon_1(t) = t^{2-2\alpha}\cos(1/t)$ e quindi anche $\bar{\psi}(t) = O(t^{1-\alpha})$; inoltre si verifica facilmente $\bar{\varepsilon}(\lambda) \geqq \lambda^{1-2\alpha}/2$ per $\lambda < 2/5\pi$. In questo caso il secondo membro ottenuto da $(A_0)$ e quello ottenuto direttamente risultano garantiti rispettivamente essere

$$O(\lambda^{(1-\alpha)^2})\cdot h^\alpha, \qquad \geqq (1/2)\lambda^{1-2\alpha}\cdot h^\alpha$$

e quindi delle due è più significativa $(A_0)$.

b) Assumendo $\varphi(t) = t^{\gamma+\alpha-1}/(\gamma+\alpha-1)$ risulta $\psi(t) = t^\gamma/(\gamma+\alpha-1)$, $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}(t) = t^\gamma$, ed essendo $\gamma > \gamma(1-\alpha)$ è $\bar{\varepsilon}(\lambda) = o((\bar{\psi}(\lambda))^{1-\alpha})$ e il Teor. III è più significativo di $(A_0)$.

Teorema IV. *Se nell'enunciato del Teor.* III *si tralascia l'ipotesi* $\varepsilon(t) \to 0$ *per* $t \to 0$, *vale l'analoga maggiorazione*

$$I(\varphi) < \{ K_1(\alpha, \varphi) + \varepsilon \} \cdot h^\alpha,$$

*dove* $K_1(\alpha, \varphi) = \dfrac{2^{2-\alpha} - 1}{\alpha(1 - \alpha)} \overline{\lim_{t \to 0}} \, | \, \varepsilon(t) \, |$ .

Teorema V. *Sia* $0 < \alpha < \beta < 1$, $\varphi(t) = | \, t \, |^{\beta - 1} \psi(t)$, $\psi(0 +) = 1$, $\psi(t) \in H_0^{\alpha+1-\beta}$ *cioè* $\sup\limits_{0<t<1} | \, \psi(t + h) - \psi(t) \, | = \varepsilon(h) \cdot h^{\alpha+1-\beta}$, $\varepsilon(h) \to 0$ *per* $h \to 0$ *uniformemente rispetto a* $t$. *Allora per* $\varepsilon > 0$ *e* $0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon)$ *risulta*

$$I(\varphi) < \{ K(\psi, \beta) + \varepsilon \} \omega(h) \cdot h^\alpha, \tag{8.2}$$

*dove* $K(\psi, \beta) = 2^{2-\beta}/\beta$, $\omega(h) = \operatorname{Max} \{ h^{\beta - \alpha}, \; \varepsilon(h) \cdot h^{1-\beta} \}$.

Osservazioni. Se $h^{\beta-\alpha} = o(\varepsilon(h) \cdot h^{1-\beta})$ per $h \to 0 +$, allora $\omega(h) = \varepsilon(h) \cdot h^{1-\beta}$ e risulta

$$K(\psi, \beta) = 1/\beta . \tag{8.3}$$

Se $\varepsilon(h) \cdot h^{1-\beta} = o(h^{\beta-\alpha})$ per $h \to 0 +$, allora $\omega(h) = h^{\beta-\alpha}$ e risulta

$$K(\psi, \beta) = (2^{2-\beta} - 1)/\beta . \tag{8.4}$$

Teorema VI. *Sia* $0 < \alpha < \beta < 1$, $\varphi(t) = | \, t \, |^{\beta-1} \psi(t)$, $\psi(0 +) = 1$, $\psi(t) \in H^{\alpha+1-\beta}$, *cioè sia* $| \, \psi(t + h) - \psi(t) \, | < K \cdot h^{\alpha+1-\beta}$. *Allora risulta*

$$I(\varphi) \leqq \omega(h) \cdot h^\alpha = O(h^\gamma) ,$$

*dove* $\omega(h) \to 0$ *per* $h \to 0$ *e* $\gamma = \beta$, $(1 + \alpha)/2$, $\alpha + 1 - \beta$ *secondochè* $\beta > (1 + \alpha)/2$, $= (1 + \alpha)/2$, $< (1 + \alpha)/2$. *Più precisamente risulta, per* $\varepsilon > 0$ *e* $0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon)$,

$$\omega(h) = \begin{cases} \{ (2^{2-\beta} - 1)/\beta + \varepsilon \} h^{\beta-\alpha} & se \ \beta > (1 + \alpha)/2 \\ \{ (2^{2-\beta} - 1 + K)/\beta + \varepsilon \} h^{(1-\alpha)/2} & se \ \beta = (1 + \alpha)/2 \\ \{ K/\beta + \varepsilon \} h^{1-\beta} & se \ \alpha < \beta < (1 + \alpha)/2 . \end{cases} \tag{8.5}$$

Osservazione. Se $\psi(0 +) = c$, $c \neq 1$, basta sostituire: nel Teor. V $K(\psi, \beta) = 2^{2-\beta}/\beta$ con $K' = \{ (2^{2-\beta} - 1) \, | \, c \, | + 1 \} / \beta$, e nel Teor. VI $(2^{2-\beta} - 1)/\beta$ con $(2^{2-\beta} - 1) \, | \, c \, | \, / \, \beta$.

## 9. - Dimostrazione del Teorema (A).

Osservazioni preliminari:

1) Sia $f(t)$ a variazione finita per $a \leqq t \leqq b$ e sia $f(t) = 0$ fuori di tale intervallo. Sia poi $a < \alpha < \beta < b$; è immediato che nell'intervallo $\alpha \leqq t \leqq \beta$ per $h > 0$ vale la disuguaglianza

$$| f(t+h) - f(t) | \leqq V_f(\alpha, t+h) - V_f(\alpha, t) .$$

Pertanto risulta

$$\int_\alpha^\beta | f(t+h) - f(t) | \, dt \leqq \int_\alpha^\beta \{ V_f(\alpha, t+h) - V_f(\alpha, t) \} \, dt$$

$$\leqq \int_\beta^{\beta+h} V_f(\alpha, t') \, dt ,$$

ossia

$$\int_\alpha^\beta | f(t+h) - f(t) | \, dt \leqq V_f(\alpha, \beta + h) \, h . \tag{9.1}$$

2) L'espressione $| \varphi(t+h) - \varphi(t) |$ si può maggiorare nel modo seguente

$$| \varphi(t+h) - \varphi(t) | = | \, | t+h |^{\alpha-1} \, \psi(t+h) - | t |^{\alpha-1} \, \psi(t) \, | \leqq$$

$$\leqq | \, | t+h |^{\alpha-1} - | t |^{\alpha-1} | \, | \psi(t+h) | + | t |^{\alpha-1} | \psi(t+h) - \psi(t) | = A_1 + A_2 .$$

Veniamo ora alla dimostrazione del Teorema. Sia $h > 0$. Cominciamo col valutare

$$I^+ = \int_0^1 | \varphi(t+h) - \varphi(t) | \, dt \leqq \int_0^1 (A_1 + A_2) \, dt = I_1 + I_2 .$$

Sia $0 < \delta < \eta < 1$. Risulta

$$I_1 = \int_0^\delta A_1 \, dt + \int_\delta^\eta A_1 \, dt + \int_\eta^1 A_1 \, dt = I_1' + I_1'' + I_1''' .$$

Ricordando che $\overline{\psi}(t) = \sup\limits_{0<u<t} | \psi(u) |$ un calcolo elementare ci dà:

$$I_1' = \int_0^\delta \{ t^{\alpha-1} - (t+h)^{\alpha-1} \} | \psi(t+h) | \, dt \leqq (1/\alpha) \, \overline{\psi}(\delta + h) \, h^\alpha .$$

D'altra parte, osservando che per $h < t$ vale la disuguaglianza $t^{\alpha-1} - (t + h)^{\alpha-1} < (1-\alpha)\, h/t^{2-\alpha}$, si ottiene

$$I_1'' < \bar{\psi}(\eta + h)\, h/\delta^{1-\alpha}, \qquad I_1''' < \bar{\psi}(1 + h)\, h/\eta^{1-\alpha}.$$

Consideriamo ora

$$I_2 = \int_0^1 t^{\alpha-1} \,|\, \psi(t + h) - \psi(t) \,|\, dt = \int_0^\delta \ldots + \int_\delta^1 \ldots = I_2' + I_2'',$$

$$I_2' \leqq (2/\alpha)\, \bar{\psi}(\delta + h)\, \delta^\alpha.$$

Per valutare $I_2''$ poniamo

$$J_l = \int_{\delta(1+\sigma)^l}^{\delta(1+\sigma)^{l+1}} A_2\, dt.$$

Sia $k$ il minimo intero per cui $\delta\,(1 + \sigma)^{k+1} \geqq 1$. Poniamo, per semplicità di scrittura, $\eta_l = \delta\,(1 + \sigma)^l$ $(l = 0, 1, \ldots, k)$. Ricordando la (9.1) si ha

$$J_l \leqq \eta_l^{\alpha-1}\, V_\psi(\eta_l, \eta_{l+1} + h)\, h.$$

Poniamo ancora $V_\psi(\eta_l, \eta_{l+1} + h) = H(\eta, \sigma, h)$ e $\bar{H}(\eta, \sigma, h) = \operatorname*{Sup}_{0 < t \leqq \eta} H(t, \sigma, h)$. Si ha allora

$$I_2'' \leqq \sum_{l=1}^{k} J_l \leqq h \sum_{l=1}^{k} \frac{H(\eta, \sigma, h)}{\eta_{l-1}^{1-\alpha}} = h\, S;$$

se $l^*$ è uno dei valori di $l$: $1 < l^* \leqq k$, ponendo $\eta^* = \eta_{l^*}$ si ha

$$S = \sum_{l=1}^{l^*} \frac{H(\eta_l, \sigma, h)}{\eta_{l-1}^{1-\alpha}} + \sum_{l=l^*+1}^{k} \frac{H(\eta_l, \sigma, h)}{\eta_{l-1}^{1-\alpha}} = \Sigma_1 + \Sigma_2\,;$$

$$\Sigma_1 \leqq \bar{H}(\eta^*, \sigma, h) \sum_{l=0}^{l^*-1} \frac{1}{\eta_l^{1-\alpha}} \leqq \frac{\bar{H}(\eta^*, \sigma, h)}{\delta^{1-\alpha}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \sigma)^{l(1-\alpha)}} \leqq \sigma_1\, \frac{\bar{H}(\eta^*, \sigma, h)}{\delta^{1-\alpha}},$$

dove $\sigma_1 = (1 + \sigma)^{1-\alpha}/\{(1 + \sigma)^{1-\alpha} - 1\}$. D'altra parte, poichè $H(\eta, \sigma, h) \leqq M(\sigma)$ per $0 < \eta \leqq 1$,

$$\Sigma_2 = \sum_{l=l^*}^{k-1} \frac{H(\eta_{l+1}, \sigma, h)}{\eta_l^{1-\alpha}} \leqq \frac{2(M(\sigma) + \psi(1))}{\eta^{*1-\alpha}} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{1}{(1 + \sigma)^{l(1-\alpha)}} \leqq \frac{2\sigma_1(M(\sigma) + \psi(1))}{\eta^{*1-\alpha}}.$$

Si conclude che

$$I_2'' \leqq \sigma_1 \overline{H}(\eta^*, \sigma, h) \frac{h}{\delta^{1-\alpha}} + 2\sigma_1 (M(\sigma) + \psi(1)) \frac{h}{\eta^{*\,1-\alpha}}.$$

Raccogliendo i risultati si ottiene

$$(9.2) \qquad I_1 \leqq \frac{1}{\alpha} \overline{\psi}(\delta + h) h^\alpha + \overline{\psi}(\eta + h) \frac{h}{\delta^{1-\alpha}} + \psi(1 + h) \frac{h}{\eta^{1-\alpha}},$$

$$(9.3) \qquad I_2 \leqq \frac{2}{\alpha} \overline{\psi}(\delta + h) \delta^\alpha + \sigma_1 \overline{H}(\eta^*, \sigma, h) \frac{h}{\delta^{1-\alpha}} + 2\sigma_1 (M(\sigma) + \psi(1)) \frac{h}{\eta^{*\,1-\alpha}}.$$

Scegliamo $\delta = \operatorname{Sup} u \quad (\overline{\psi}(u + h)(u + h) \leqq h)$. Osserviamo che $\delta \to 0$ per $h \to 0$ e d'altra parte $h/\delta \to 0$ per $h \to 0$. Scegliamo poi $\eta^* = \eta$ in modo che sia $\eta \to 0$ e inoltre $\delta/\eta \to 0$ per $h \to 0$. Posto, con notazione evidente, schematicamente

$$I_1 = B_{11} + B_{12} + B_{13}, \qquad I_2 = B_{21} + B_{22} + B_{23},$$

per la scelta fatta di $\delta$ e $\eta = \eta^*$, si vede immediatamente che è

$$B_{11} = o(B_{21}), \quad B_{12} = o(B_{22}), \quad B_{13} = o(B_{22}), \quad B_{23} = o(B_{22}),$$

e pertanto $I^+ \leqq \{1 + o(1)\}(B_{21} + B_{22})$. Osserviamo d'altra parte che, essendo $h/\delta \to 0$,

$$(9.4) \qquad \overline{\psi}(\delta + h) \delta^\alpha \sim \overline{\psi}(\delta + h) (\delta + h)^\alpha \quad \text{per } h \to 0$$

e anche

$$(9.5) \qquad h/\delta^{1-\alpha} \sim h/(\delta + h)^{1-\alpha} \quad \text{per } h \to 0.$$

Osserviamo ancora che è $\lim_{\eta \to 0} \overline{H}(\eta, \sigma, h) = \lim_{\eta \to 0} \overline{H}(\eta, \sigma) = H_\sigma/\sigma_1$. Poniamo infine $\delta + h = \lambda$. In definitiva, per le scelte fatte di $\delta$ ed $\eta$, risulta

$$I^+ \leqq I_1 + I_2 \leqq \left(\frac{2}{\alpha} + H_\sigma\right) \psi^{1-\alpha}(\lambda)\, h^\alpha + o(\overline{\psi}^{1-\alpha}(\lambda))\, h^\alpha \quad \text{per } h \to 0,$$

da cui segue che per $\varepsilon > 0$ e $0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon)$ è

$$I^+ < \left(\frac{2}{\alpha} + H_\sigma + \varepsilon\right) \overline{\psi}^{1-\alpha}(\lambda)\, h^\alpha.$$

Diamo adesso alla variabile $t$ un incremento $-h$ negativo $(h>0)$.

$$I^- = \int_0^1 |\varphi(t-h)-\varphi(t)|\,dt = \int_{-h}^{1-h} |\varphi(t+h)-\varphi(t)|\,dt \leqq \int_{-h}^{0} \dots + I^+.$$

Tenendo presente la solita scomposizione in addendi di $|\varphi(t+h)-\varphi(t)|$ si ottiene

$$\int_{-h}^{0} |\varphi(t+h)-\varphi(t)|\,dt \leqq \int_{-h}^{0} A_1\,dt + \int_{-h}^{0} A_2\,dt = I_1^- + I_2^- .$$

Con facili calcoli si stabiliscono le seguenti disuguaglianze:

$$I_1^- \leqq \frac{2(2^{2-\alpha}-1)}{\alpha}\,\overline{\psi}(h)\,h^\alpha, \qquad I_2^- \leqq \frac{2}{\alpha}\,\overline{\psi}(h)\,h^\alpha.$$

Risulta cioè

$$I^- \leqq (2^{2-\alpha}/\alpha)\,\overline{\psi}(h)\,h^\alpha + I^+$$

e poichè $\overline{\psi}(h) = o(\overline{\psi}^{1-\alpha}(\lambda))$, si ottiene ancora, per $\varepsilon > 0$, $0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon)$,

$$I(\varphi) < \{K(\psi,\alpha)+\varepsilon\}\,\overline{\psi}^{1-\alpha}(\lambda)\,h^\alpha.$$

Risulta così dimostrata la $(A_0)$.

Dalle (9.2) e (9.3), scegliendo $\delta$, $\eta$, $\eta^*$ in guisa che sia

$$\overline{\psi}(\delta+h)\,(\delta+h)/h \to 0, \qquad \eta^* = \eta, \qquad \eta \to 0, \qquad \delta/\eta \to 0 \quad \text{per } h \to 0,$$

ricordando le (9.4) e (9.5) si ottiene

$$\overline{\psi}(\delta+h)\;\delta^\alpha = o\big(h/(\delta+h)^{1-\alpha}\big)$$

e pertanto, posto $\delta + h = \lambda_1$, per $\varepsilon > 0$ e $0 \leqq h \leqq h_1(\varepsilon)$,

$$I(\varphi) < (H_\sigma + \varepsilon)\;h/\lambda_1^{1-\alpha}$$

e vale $(A_1)$. Scegliendo infine $\delta$, $\eta^*$, $\eta$ in modo che sia

$$\overline{\psi}(\delta+h)\,(\delta+h)/h \to +\infty, \qquad \eta^* = \eta \to 0, \qquad \delta/\eta \to 0 \quad \text{per } h \to 0,$$

tenendo presenti ancora le (9.4) e (9.5) si ottiene

$$h/\delta^{1-\alpha} = o\left(\overline{\psi}(\delta + h)\,\delta^{\alpha}\right)$$

e posto $\delta + h = \lambda_2$ risulta, per $\varepsilon > 0$ e per $0 \leqq h \leqq h_2(\varepsilon)$,

$$I(\varphi) < (2/\alpha + \varepsilon)\,\overline{\psi}^{1-\alpha}(\lambda)\,\lambda_2^{\alpha}$$

e vale ($A_2$).

Il Teor. (A) risulta così completamente dimostrato.

**10. - Dimostrazione del Teorema** (C).

Se $\psi(t) = c + \psi_1(t)$, per la (7.1) si ha $(c > 0)$

$$\left| I(\varphi) - \left\{ c\,(2^{2-\alpha} - 1)/\alpha \cdot h^{\alpha} - ch + O(h^2) \right\} \right| \leqq I(\varphi_1)\,,$$

avendo posto $\varphi_1(t) = \psi_1(t)/|\,t\,|^{1-\alpha}$.

Poichè $\psi_1(t) \to 0$ per $t \to 0$, tenendo presente il Teor. (A) applicato a $\varphi_1(t)$ si ricava

$$I(\varphi_1) < \left\{ K(\psi_1,\ \alpha) + \varepsilon \right\} \overline{\psi}_1^{1-\alpha}(\lambda)\ h^{\alpha} \qquad \text{per} \quad 0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon),$$

e si conclude

$$I(\varphi) = \frac{(2^{2-\alpha} - 1)c}{\alpha}\ h^{\alpha} - c\,h + \theta \left\{ \left(K(\psi_1, \alpha) + \varepsilon\right) \psi_1^{1-\alpha}(\lambda)\ h^{\alpha} \right\} + O(h^2),$$

dove $-1 \leqq \theta \leqq 1$ e la costante in $O(h^2)$ è indipendente da $\varepsilon$.

**11. - Dimostrazione dei Teoremi** (D) e ($D_1$).

1) Per l'Oss. 2) del n. **9** risulta

$$I^{+} = \int_0^1 |\,\varphi(t + h) - \varphi(t)\,|\,dt = \int_0^1 (A_1 + A_2)\,dt = I_1 + I_2\,.$$

Sia $0 < \delta_1 < 1$. Allora

$$I_1 = \int_0^{\delta_1} A_1\,dt + \int_{\delta_1}^1 A_1\,dt = I_1' + I_1''\,.$$

Con un calcolo analogo a quello svolto per il Teor. (A) si ottiene

$$I_1' \leqq (1/\alpha)\ \overline{\psi}(\delta_1 + h)\ h^\alpha, \qquad I_1'' \leqq \overline{\psi}(1)\ h/\delta_1^{1-\alpha}.$$

Inoltre, se è $0 < \delta_2 < 1$,

$$I_2 = \int_0^{\delta_2} A_2\, dt + \int_{\delta_2}^1 A_2\, dt = I_2' + I_2''.$$

Ancora, tenendo presenti i calcoli e le notazioni del Teor. (A), si ottiene:

$$I_2' = \int_0^{\delta_2} t^{\alpha-1}\, |\, \psi(t+h) - \psi(t)\, |\, dt \leqq (2/\alpha)\ \overline{\psi}(\delta_2 + h)\ \delta_2^\alpha,$$

$$I_2'' = \int_{\delta_2}^1 A_2\, dt \leqq \sigma_1\, \overline{H}(\eta^*, \sigma, h)\, \frac{h}{\delta_2^{1-\alpha}} + 2\sigma_1 \left(M(\sigma) + \overline{\psi}(1)\right) \frac{h}{\eta^{*1-\alpha}}.$$

Raccogliendo i risultati si ottiene

$$I_1 \leqq \frac{1}{\alpha}\, \overline{\psi}(\delta_1 + h)\ h^\alpha + \overline{\psi}(1)\, \frac{h}{\delta_1^{1-\alpha}} = R_{11} + R_{12}\,,$$

$$I_2 \leqq \frac{2}{\alpha}\, \overline{\psi}(\delta_2 + h)\ \delta_2^\alpha + \sigma_1\, \overline{H}(\eta^*, \sigma, h)\, \frac{h}{\delta_2^{1-\alpha}} + 2\sigma_1 \left(M(\sigma) + \overline{\psi}(1)\right) \frac{h}{\eta^{*1-\alpha}}$$

$$= R_{21} + R_{22} + R_{23}\,.$$

Scegliamo $\delta_1 = \delta_1(h)$ in modo che sia $\delta_1 \to 0$, $h/\delta_1 \to 0$ per $h \to 0$. Scegliamo poi $\delta_2 = h$ ed $\eta^* = \delta_1$. Allora è immediato che $R_{12} = o(R_{11})$, $R_{23} = o(R_{21})$. Essendo

$$1 = \lim_{t \to 0} \overline{\psi}(t) = \overline{\lim_{t \to 0}}\ \psi(t),$$

si può scrivere $\psi(\delta_1 + h) = 1 + o(1)$ per $h \to 0$. Si conclude che per $\varepsilon > 0$, $0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon)$,

$$I^+ < (3/\alpha + H_\sigma + \varepsilon)\ h^\alpha.$$

Per l'integrale con l'incremento negativo $-h$ $(h > 0)$ si ottiene, analogamente a quanto visto nel n. **9**,

$$I^- = \int_0^1 | \varphi(t-h) - \varphi(t) | \, dt \leqq \int_{-h}^0 (A_1 + A_2) \, dt + I^+ = I_1^- + I_2^- + I^+;$$

$$I_1^- \leqq \frac{2(2^{2-\alpha}-1)}{\alpha} \, \overline{\psi}(h) \, h^\alpha, \qquad I_2^- \leqq (2/\alpha) \, \overline{\psi}(h) \, h^\alpha .$$

Risulta cioè

$$I^- \leqq (2^{2-\alpha}/\alpha) \, \overline{\psi}(h) \, h^\alpha + I^+.$$

Ne segue la $(D_0)$.

2) Per la (7.2), applicando il Teor. (D) alla funzione $\varphi_1(t)$ si ricava immediatamente il risultato.

## 12. - Dimostrazione dei Teoremi I e II.

1) Con il procedimento seguito per dimostrare il Teorema (A) si ottiene (con il solito significato dei simboli):

$$I_1 \leqq \frac{1}{\alpha} \, \psi(\delta + h) \, h^\alpha + \overline{\psi} \, (\eta + h) \, \frac{h}{\delta^{1-\alpha}} + \overline{\psi}(1 + h) \, \frac{h}{\eta^{1-\alpha}}$$

$$= B_{11} + B_{12} + B_{13},$$

$$I_2 \leqq \frac{2}{\alpha} \, \overline{\psi}(\delta_2 + h) \, \delta_2^\alpha + \sigma_1 \, \overline{H}(\eta^*, \sigma, h) \, \frac{h}{\delta_2^{1-\alpha}} + 2\sigma_1 \, \overline{H}(\eta^*, \sigma, h) \, \frac{h}{(\eta^*)^{1-\alpha}}$$

$$= B'_{21} + B'_{22} + B'_{23} .$$

Poichè $\psi(t)$ è a variazione finita, è $H_\sigma = \sigma_1 \lim_{\eta \to 0} \overline{H}(\eta, \sigma) = \sigma_1 \lim_{\eta \to 0} \overline{H}(\eta, \sigma, h) = 0$.

Scegliamo $\delta$, $\eta^* = \eta$ come al n. **9** $(\delta/\eta \to 0)$. Scegliamo invece $\delta_2$ in modo che sia

$$\delta_2/\delta \to 0, \quad h/\delta_2 \to 0, \quad \overline{H}(\eta, \sigma, h) \, h/\delta_2^{1-\alpha} = o(h/\delta^{1-\alpha}) \quad \text{per } h \to 0.$$

Allora risulta anche

$$\overline{\psi}(\delta_2 + h)\ \delta_2^\alpha \leqq \overline{\psi}(\delta + h)\ \delta^\alpha\ (\delta_2/\delta)^\alpha = o\Big(\overline{\psi}(\delta + h)\ \delta^\alpha\Big)$$

e tutti i $B_{1k}$, $B'_{2k}$ sono $o(h/\delta^{1-\alpha})$.

D'altra parte è ancora, come al n. **9**,

$$I^- \leqq I^+ + (2^{2-\alpha}/\alpha)\ \overline{\psi}(h)\ h^\alpha = I^+ + o(h/\delta^{1-\alpha}) \quad \text{per } h \to 0.$$

Ponendo $\lambda = \delta + h$ si ottiene il risultato del Teorema I.

2) Come abbiamo già osservato, il Teor. II è conseguenza immediata del Teor. I.

## 13. - Dimostrazione dei Teoremi III e IV.

1) Sia $0 < t < t_0 \leqq 1$ e assumiamo $\varphi(t_0) = 0$. Allora

$$\varphi(t) = \int_t^{t_0} \frac{\varepsilon(u)}{u^{2-\alpha}}\, du\,,$$

$$(13.1) \qquad |\,\varphi(t + h) - \varphi(t)\,| \leqq \int_t^{t+h} \frac{|\,\varepsilon(u)\,|}{|\,u\,|^{2-\alpha}}\, du \leqq \frac{\overline{\varepsilon}(t + h)}{1 - \alpha}\, \Big|\,|\,t\,|^{\alpha-1} - |\,t + h\,|^{\alpha-1}\Big|\,.$$

Sia $0 < \delta < \eta < 1$, è allora

$$I^+ = \int_0^1 \frac{\overline{\varepsilon}(t + h)}{1 - \alpha}\, \{t^{\alpha-1} - (t + h)^{\alpha-1}\}\, dt = \int_0^\delta \dots + \int_\delta^\eta \dots + \int_\eta^1 \dots = I_1 + I_2 + I_3\,.$$

Con calcoli elementari si ricava

$$I_1 \leqq \frac{\overline{\varepsilon}(\delta + h)}{\alpha(1 - \alpha)}\, h^\alpha$$

e, ricordando che per $h < t$ è $t^{\alpha-1} - (t + h)^{\alpha-1} < (1 - \alpha)\ t^{\alpha-2}\ h$,

$$I_2 \leqq \frac{\overline{\varepsilon}(\eta + h)}{1 - \alpha}\ \frac{h}{\delta^{1-\alpha}}\,.$$

Infine, ponendo $N = \bar{\varepsilon}(1)$,

$$I_3 \leqq \frac{N}{1-\alpha} \frac{h}{\eta^{1-\alpha}}.$$

Quind i

$$I^+ \leqq \frac{\bar{\varepsilon}(\delta + h)}{\alpha(1-\alpha)} h^\alpha + \frac{\bar{\varepsilon}(\eta + h)}{1-\alpha} \frac{h}{\delta^{1-\alpha}} + \frac{N}{1-\alpha} \frac{h}{\eta^{1-\alpha}}.$$

Scegliamo $\delta = \operatorname{Sup} u \left(\bar{\varepsilon}(u+h)(u+h)^{1-\alpha} \leqq h^{1-\alpha}\right)$. Osserviamo che $\delta \to 0$ e $h/\delta \to 0$ per $h \to 0+$. Scegliamo poi $\eta$ tale che sia $\eta \to 0$ e $\delta/\eta \to 0$ per $h \to 0$. Risulta allora

$$I^+ \leqq \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \bar{\varepsilon}(\delta + h)\ h^\alpha + o\left(\bar{\varepsilon}(\delta + h)\right) h^\alpha \quad \text{per } h \to 0.$$

D'altra parte

$$I^- = \int_0^1 |\varphi(t-h) - \varphi(t)|\, dt = \int_{-h}^{1-h} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|\, dt \leqq \int_{-h}^{0} \ldots + I^+.$$

Ricordando la (13.1) si ha

$$\int_{-h}^{0} |\varphi(t+h) - \varphi(t)|\, dt \leqq \frac{2\bar{\varepsilon}(h)(2^{1-\alpha} - 1)}{\alpha(1-\alpha)} h^\alpha.$$

Quindi

$$I^- \leqq \frac{2(2^{1-\alpha} - 1)}{\alpha(1-\alpha)} \bar{\varepsilon}(h)\ h^\alpha + I^+,$$

da cui, ponendo $\lambda = \delta + h$, per $\varepsilon > 0$ e $0 \leqq h \leqq h_0(\varepsilon)$,

$$I(\varphi) < \left\{\frac{2^{2-\alpha} - 1}{\alpha(1-\alpha)} + \varepsilon\right\} \bar{\varepsilon}(\lambda)\ h^\alpha.$$

Il Teorema III è così dimostrato.

2) Sia $0 < \delta < 1$; è allora

$$I^+ = \int_0^1 \frac{\bar{\varepsilon}(t+h)}{1-\alpha} \{t^{\alpha-1} - (t+h)^{\alpha-1}\}\, dt = \int_0^\delta \ldots + \int_\delta^1 \ldots = I_1 + I_2.$$

Si ha, ponendo $N = \bar{\varepsilon}(1)$,

$$I_1 = \int_0^\delta \frac{\bar{\varepsilon}(t+h)}{1-\alpha} \{t^{\alpha-1} - (t+h)^{\alpha-1}\} \, dt \leqq \frac{\bar{\varepsilon}(\delta+h)}{\alpha(1-\alpha)} h^\alpha ,$$

$$I_2 = \int_\delta^1 \ldots \leqq N h \int_\delta^1 t^{\alpha-2} \, dt \leqq \frac{N}{1-\alpha} \frac{h}{\delta^{1-\alpha}} .$$

Risulta cioè:

$$I^+ \leqq \frac{\bar{\varepsilon}(\delta+h)}{\alpha(1-\alpha)} h^\alpha + \frac{N}{1-\alpha} \frac{h}{\delta^{1-\alpha}} = N_1 + N_2 .$$

Scegliamo $\delta$ in modo che sia $h/\delta \to 0$ per $h \to 0$. Allora $N_2 = o(N_1)$. D'altra parte

$$I^- \leqq \int_{-h}^0 | \varphi(t+h) - \varphi(t) | \, dt + I^+ \leqq \frac{2(2^{1-\alpha}-1)}{\alpha(1-\alpha)} \bar{\varepsilon}(h) \; h^\alpha + I^+.$$

Se ne deduce

$$I(\varphi) \leqq \frac{2^{2-\alpha}-1}{\alpha(1-\alpha)} \bar{\varepsilon}(\delta+h) \; h^\alpha \left(1 + o(1)\right) \qquad \text{per } h \to 0,$$

e, posto $R = \lim_{t \to 0} \bar{\varepsilon}(t)$,

$$I(\varphi) \leqq \frac{2^{2-\alpha}-1}{\alpha(1-\alpha)} R \; h^\alpha \left(1 + o(1)\right).$$

Il Teorema IV risulta dimostrato.

## 14. - Dimostrazione dei Teoremi V e VI.

1) Si può scrivere

$$(14.1) \qquad | \varphi(t+h) - \varphi(t) | = \Big| \, | t+h |^{\beta-1} \, \psi(t+h) - | t |^{\beta-1} \, \psi(t) \Big| \leqq$$

$$\leqq \Big| \, | t+h |^{\beta-1} - | t |^{\beta-1} \Big| \, |\psi(t+h)| + | t |^{\beta-1} \, | \psi(t+h) - \psi(t) |$$

$$= B_1 + B_2 .$$

Allora

$$I^+ = \int_0^1 |\,\varphi(t+h) - \varphi(t)\,|\, dt \leqq \int_0^1 B_1\, dt + \int_0^1 B_2\, dt = I_1 + I_2\,.$$

Sia $0 < h < \delta < 1$. Risulta

$$I_1 = \int_0^\delta B_1\, dt + \int_\delta^1 B_1\, dt = I_1' + I_1''\,.$$

Con facili calcoli, posto $M = \operatorname*{Sup}_{0<t\leqq 1} |\,\psi(t)\,|$, si ha

$$I_1' = \int_0^\delta \{t^{\beta-1} - (t+h)^{\beta-1}\}\ |\,\psi(t+h)\,|\, dt \leqq (1/\beta)\ \overline{\psi}(\delta+h)\ h^\beta\ .$$

$$I_1'' \leqq (M/\beta)\ \{(\delta+h)^\beta - \delta^\beta\} \leqq M\ h/\delta^{1-\beta},$$

$$I_2 = \int_0^1 t^{\beta-1}\,|\,\psi(t+h) - \psi(t)\,|\, dt \leqq \varepsilon(h)\ h^{\alpha+1-\beta} \int_0^1 t^{\beta-1}\, dt = (1/\beta)\ \varepsilon(h)\ h^{\alpha+1-\beta}$$

e pertanto

$$I^+ \leqq \frac{1}{\beta}\,\overline{\psi}(\delta+h)\, h^\beta + M\,\frac{h}{\delta^{1-\beta}} + \frac{1}{\beta}\,\varepsilon(h)\, h^{\alpha+1-\beta}\,.$$

Scegliamo $\delta$ tale che sia $\delta \to 0$, $h/\delta \to 0$ per $h \to 0$. Allora $h/\delta^{1-\beta} = o(h^\beta)$. D'altra parte

$$I^- \leqq \int_{-h}^0 |\,\varphi(t+h) - \varphi(t)\,|\, dt + I^+ = \int_{-h}^0 B_1\, dt + \int_{-h}^0 B_2\, dt + I^+ = I_1^- + I_2^- + I^+.$$

Risulta, con semplici calcoli,

$$I_1^- = \int_{-h}^0 \{\,(-t)^{\beta-1} - (t+h)^{\beta-1}\}\ |\,\psi(t+h)\,|\, dt \leqq \frac{2(2^{1-\beta}-1)}{\beta}\ \overline{\psi}(h)\ h^\beta,$$

$$I_2^- = \int_{-h}^0 (-t)^{\beta-1}\,|\,\psi(t+h) - \psi(t)\,|\, dt \leqq (1/\beta)\varepsilon(h)\ h^{\alpha+1}.$$

Si conclude

$$\begin{aligned} I(\varphi) &\leqq \frac{2^{2-\beta}-1}{\beta}\,\overline{\psi}(\delta+h)\ h^\beta\Big(1+o(1)\Big) + \frac{1}{\beta}\,\varepsilon(h)\ h^{\alpha+1-\beta} \qquad \text{per } h \to 0 \\ &= M_1 + M_2 \end{aligned}$$

e, poichè $\psi(0+) = 1$, segue la (8.2). Se $h^{\beta-\alpha} = o\left(\varepsilon(h)h^{1-\beta}\right)$ allora $M_1 = o(M_2)$ e resta dimostrata la (8.3). Se invece $\varepsilon(h)\ h^{1-\beta} = o(h^{\beta-\alpha})$, allora $M_2 = o(M_1)$ e resta dimostrata la (8.4).

2) Un procedimento dimostrativo identico a quello seguito per il Teorema V ci conduce alla seguente valutazione:

$$I(\varphi) \leqq \frac{2^{2-\beta}-1}{\beta}\, \bar{\psi}(\delta+h)\ h^{\beta}\left(1+o(1)\right) + \frac{K}{\beta}\, h^{\alpha+1-\beta}\,.$$

Le (8.5) seguono immediatamente.

## Bibliografia.


[1] M. L. CARTWRIGHT, *The zeros of certain integral functions*, Quart. J. Math., Oxford Ser. **2** (1931), 113-129.

[2] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *Some properties of fractional integrals*, Math. Z. **27** (1928), 565-606.

[3] G. H. HARDY and J. E. LITTLEWOOD, *A convergence criterion for Fourier series*, Math. Z. **28** (1928), 612-633.

[4] E. W. HOBSON, *The theory of functions of a real variable and the theory of Fourier's series*, Vol. II, Cambridge 1926.

[5] E. C. TITCHMARSH, *A theorem on Lebesgue integrals*, J. London Math. Soc. **2** (1927), 36-37.


## Summary.


*We deal with integrated Hölder conditions of order $\alpha$ for real-valued functions which have a singular behaviour at a point of the integration interval; about this behaviour we consider hypotheses of both kinds: $o(\ldots)$ and $O(\ldots)$ and we determine the vanishing quantities involved in these conditions. In an interesting case the coefficient of the majorizing expression is, in a defined sense, a «best constant».*


* * *