Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 137-148

BIANCA MANFREDI (*)

Sulla riducibilità dei problemi termoelastici a problemi isotermi. (**)

1. - Introduzione.

R. J. KNOPS, nel campo dei problemi linearizzati stazionari relativi a mezzi continui isotropi omogenei, stabiliva ([3], nn. 2, 3, 4) un'interessante relazione fra stati elastici e stati termoelastici. Precisamente provava: a partire da un'assegnata configurazione di riferimento la differenza, detta « stato addizionale », degli stati elastici di due mezzi comprimibili ugualmente sollecitati aventi lo stesso modulo di rigidità, coincide con una trasformazione termoelastica di un mezzo comprimibile soggetto a forze esterne trascurabili e ad un campo termico proporzionale alla dilatazione di uno dei due mezzi elastici. Tale relazione permetteva allo stesso KNOPS ([3], nn. 5, 6, 7) di ottenere, con elegante semplicità, in alcuni problemi specifici, risultati ottenuti laboriosamente da altri Autori ([6]).

Nel mio recente lavoro [5], sempre nel campo di problemi linearizzati stazionari relativi a mezzi continui isotropi omogenei, ho provato che per un'assegnata configurazione di riferimento, la distribuzione di spostamenti, di strains e di stresses relativa ad un mezzo termoelastico incomprimibile soggetto a forze esterne, compete anche ad un mezzo termoelastico comprimibile soggetto alle stesse forze esterne e ad un conveniente campo termico.

In questa Nota, accostando i precedenti lavori [3] e [5], trovo un legame diretto fra stati elastici e gli stati termoelastici incomprimibili con forze esterne.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 2-IV-1963.

Questo lavoro è stato oggetto di una comunicazione al 7º Congresso della « Unione Matematica Italiana » (Genova, 30 settembre - 5 ottobre 1963).

Provo precisamente che i detti stati termoelastici risultano dalla sovrapposizione di uno stato elastico incomprimibile $\boldsymbol{u}_0$ relativo alle assegnate forze esterne e dello «stato addizionale» $\boldsymbol{w}$ di KNOPS. Ciò, in quanto il campo termico risulta proporzionale alla dilatazione di $\boldsymbol{w}$ e l'invariante primo del tensore sforzo (nuova incognita nel caso incomprimibile) viene a coincidere con la somma degli invarianti primi dei tensori sforzo di $\boldsymbol{u}_0$ e di $\boldsymbol{w}$. Pertanto, in accordo con i risultati ottenuti in [3] e [5], le trasformazioni termoelastiche, sia comprimibili che incomprimibili, relative a forze esterne trascurabili e a convenienti campi termici, sono riducibili agli stessi stati elastici. Inoltre, nel caso particolare frequente in cui le dilatazioni degli stati elastici caratteristici dello «stato addizionale» siano fra loro proporzionali, il campo termico del mezzo comprimibile risulta proporzionale al campo termico del mezzo incomprimibile; il che si presenta, ad esempio, nel problema relativo al semispazio considerato in questa Nota (n. **6**).

L'opportunità di accostamenti fra [3] e [5] è stata sentita, in modo indipendente, anche dallo stesso KNOPS, come egli ebbe a scrivermi molto gentilmente.

2. - Sulla scomponibilità di una trasformazione termoelastica incomprimibile, con forze esterne.

Sia s un mezzo continuo termoelastico incomprimibile omogeneo isotropo, di costanti termiche ed elastiche h, a, b, l, m. Per effetto di una distribuzione stazionaria di forze esterne e di un campo termico pure stazionario, il mezzo s subisca una trasformazione linearizzata, a partire da una configurazione C^* a contorno regolare $\sum^*$, di equilibrio naturale e stabile. Indicando: $\boldsymbol{u}$ lo spostamento, τ l'incremento unitario della temperatura assoluta, q lo scalare atto a rappresentare la reazione vincolare interna di s, la trasformazione $T \equiv \equiv (\boldsymbol{u}, \tau, q)$ è definita dal sistema

$$[T] \qquad \left\{ \begin{array}{lr} \Delta\tau = 0 & \ldots\ C^* \\[2ex] \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}n = h\,(\tau - \theta) & \ldots\ \sum^* \\[2ex] m\,\Delta\boldsymbol{u} + (l + m)\nabla\nabla.\boldsymbol{u} = \varrho\,\boldsymbol{F} + \nabla(q + a\tau) & \ldots\ C^* \\[2ex] \nabla.\boldsymbol{u} = b\tau & \ldots\ C^* \\[2ex] \varphi\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} & \ldots\ \sum^*, \end{array} \right.$$

con: θ la temperatura ambiente, $\varrho\,\boldsymbol{F}$ la forza specifica di massa, $\boldsymbol{f}$ la forza specifica superficiale, $\boldsymbol{n}$ il versore della normale esterna, φ il tensore sforzo dato da

$$\varphi \equiv \| \varphi_{hk} \| = \| 2me_{hk} + l\, \nabla.\boldsymbol{u}\; \delta_{hk} - (q + a\tau)\delta_{hk} \| . \tag{1}$$

Ora dalla (1) discende la relazione che esprime la variabile q in funzione dell'invariante primo I_φ del tensore sforzo:

$$q = -a\tau - (1/3)I_\varphi + [(3l + 2m)/3]\nabla.\boldsymbol{u}; \tag{2}$$

sostituendo in $[T]$, si ottiene

$$[T]' \quad \begin{cases} \Delta\tau = 0 & \dots\; C^* \\ \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}n = h(\tau - \theta) & \dots\; \Sigma^* \\ m\,\Delta\boldsymbol{u} + (1/3)\nabla I_\varphi = \varrho\boldsymbol{F} - (1/3)m\nabla\nabla.\boldsymbol{u} & \dots\; C^* \\ \nabla.\boldsymbol{u} = b\tau & \dots\; C^* \\ \varphi\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} & \dots\; \Sigma^*, \end{cases}$$

con

$$\varphi \equiv \| \varphi_{hk} \| = \| 2me_{hk} + (1/3)I_\varphi\delta_{hk} - (2/3)m\nabla.\, \boldsymbol{u}\delta_{hk} \| , \tag{1'}$$

risultando ora la trasformazione in esame definita dalle variabili $(\boldsymbol{u}, \tau, I_\varphi)$.
D'altra parte posto

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}_\tau \\ I_\varphi = I_{\varphi_0} + I_{\varphi_\tau} , \end{cases} \tag{3}$$

la trasformazione $T \equiv (\boldsymbol{u}, \tau, I_\varphi)$, per la sua linearità, si scompone nella trasformazione elastica incomprimibile (con forze esterne) $T_0 \equiv (\boldsymbol{u}_0, I_{\varphi_0})$ definita dal sistema

$$[T_0] \quad \begin{cases} m\,\Delta\boldsymbol{u}_0 + (1/3)\nabla I_{\varphi_0} = \varrho\,\boldsymbol{F} & \dots\; C^* \\ \nabla.\boldsymbol{u}_0 = 0 & \dots\; C^* \\ \varphi_0\,\boldsymbol{n} = \boldsymbol{f} & \dots\; \Sigma^*, \end{cases}$$

con

$$\varphi_0 \equiv \| \varphi^0_{hk} \| = \| 2me^0_{hk} + (1/3)I_{\varphi_0}\delta_{hk} \| , \tag{4}$$

e nella trasformazione termoelastica incomprimibile $T_\tau \equiv (\boldsymbol{u}_\tau , \tau, I_{\varphi_\tau})$ esente da forze esterne, definita dal sistema

$$[T_\tau] \qquad \begin{cases} \Delta\tau = 0 & \ldots\ C^* \\ \mathrm{d}\tau/\mathrm{d}n = h(\tau - \theta) & \ldots\ \sum^* \\ m\Delta\boldsymbol{u}_\tau + (1/3)\nabla I_{\varphi_\tau} = -(1/3)m\nabla\nabla.\boldsymbol{u}_\tau & \ldots\ C^* \\ \nabla.\boldsymbol{u}_\tau = b\tau & \ldots\ C^* \\ \varphi_\tau\,\boldsymbol{n} = 0 & \ldots\ \sum^*, \end{cases}$$

con

$$\varphi_\tau \equiv \| \varphi^{(\tau)}_{hk} \| = \| 2me^{(\tau)}_{hk} + (1/3)I_{\varphi_\tau}\delta_{hk} - (2m/3)\nabla.\boldsymbol{u}_\tau\ \delta_{hk} \| . \tag{5}$$

Ne segue che per ricondurre la trasformazione T a problemi tutti isotermi è sufficiente analizzare la trasformazione termoelastica incomprimibile T_τ. A tal fine estendo il metodo indicato dal Knops in [3].

3. - Lo «stato addizionale».

Siano s' e s'' due mezzi continui elastici comprimibili omogenei isotropi, di costanti elastiche l', m' e l'', m'' rispettivamente, con

$$l' = l, \qquad m' = m'' = m .$$

Per effetto di una distribuzione stazionaria di forze superficiali esterne $\boldsymbol{g}$ (1) il mezzo s', a partire dalla configurazione $C^* + \sum^*$, subisce la trasformazione linearizzata $T' \equiv \boldsymbol{u}'$ definita dal sistema

$$[T'] \qquad \begin{cases} m\,\Delta\boldsymbol{u}' + (l' + m)\nabla\nabla.\boldsymbol{u}' = 0 & \ldots\ C^* \\ \varphi'\boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} & \ldots\ \sum^*, \end{cases}$$

(1) $\boldsymbol{g}$ può eventualmente coincidere con $\boldsymbol{f}$.

con

(6) $$\varphi' \equiv \| \varphi'_{hk} \| = \| 2me'_{hk} + l' \; \nabla . \boldsymbol{u}' \delta_{hk} \| ;$$

analogamente il mezzo s'' subisce la trasformazione linearizzata $T'' \equiv \boldsymbol{u}''$, definita dal sistema

$$[T''] \qquad \begin{cases} m \, \Delta \boldsymbol{u}'' + (l'' + m) \nabla \nabla . \boldsymbol{u}'' = 0 & \ldots \; C^* \\ \varphi'' \boldsymbol{n} = \boldsymbol{g} & \ldots \; \Sigma^*, \end{cases}$$

con

(7) $$\varphi'' \equiv \| \varphi''_{hk} \| = \| 2me''_{hk} + l'' \; \nabla . \boldsymbol{u}'' \delta_{hk} \| .$$

Si consideri ora il vettore

(8) $$\boldsymbol{w} \equiv \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}'',$$

che, usando le denominazioni introdotte dal KNOPS, si dirà lo «stato addizionale» relativo allo «stato iniziale» $\boldsymbol{u}''$ e allo «stato finale» $\boldsymbol{u}'$: esso rappresenta la variazione del campo elastico corrispondente alla variazione del rapporto di POISSON dal valore $\nu'' = l''/\{2(l'' + m)\}$ al valore $\nu' = l'/\{2(l' + m)\}$, fisse restando le altre condizioni.

Il vettore non solenoidale $\boldsymbol{w}$ (2) soddisfa il sistema ottenuto per differenza dai sistemi $[T']$ e $[T'']$:

$$[w] \qquad \begin{cases} m \, \Delta \boldsymbol{w} + (l' + m) \nabla \nabla . \boldsymbol{w} = (l'' - l') \nabla \nabla . \boldsymbol{u}'' & \ldots \; C^* \\ \psi \, \boldsymbol{n} = 0 & \ldots \; \Sigma^*, \end{cases}$$

con

(9) $$\psi \equiv \| \psi_{hk} \| \equiv \| \varphi'_{hk} - \varphi''_{hk} \| = \| 2me^{(w)}_{hk} + l' \; \nabla . \boldsymbol{w} \delta_{hk} - (l'' - l') \nabla . \boldsymbol{u}'' \delta_{hk} \| ,$$

indicando $e^{(w)}_{hk} = e'_{hk} - e''_{hk}$. D'altra parte

$$I_{\varphi'} = (3l' + 2m) \nabla . \boldsymbol{u}', \qquad I_{\varphi''} = (3l'' + 2m) \nabla . \boldsymbol{u}'', \qquad I_\psi = I_{\varphi'} - I_{\varphi''} \; ;$$

---

(2) Per provare che è $\nabla . \boldsymbol{w} \neq 0$, si veda [7], p. 230.

ne segue che il sistema $[w]$ può porsi anche nella forma seguente (3)

$$[w]' \qquad \begin{cases} m\,\Delta \boldsymbol{w} + (1/3)\nabla I_\psi = -(1/3)m\nabla\nabla.\boldsymbol{w} & \ldots\ C^* \\ \psi\,\boldsymbol{n} = 0 & \ldots\ \Sigma^*, \end{cases}$$

con

$$(9') \qquad \psi \equiv \| \psi_{hk} \| = \| 2me^{(w)}_{hk} + (1/3)I_\psi\,\delta_{hk} - (2m/3)\nabla.\boldsymbol{w}\ \delta_{hk} \| \,.$$

Il confronto del sistema $[w]'$ con il sistema $[T_\tau]$ porterà (n. 4) alla desiderata riduzione a casi isotermi della trasformazione termoelastica incomprimibile in esame.

4. - Sulla riducibilità di una trasformazione termoelastica incomprimibile allo «stato addizionale».

Se su Σ^* *il flusso termico avviene in un ambiente a temperatura* θ *data da*

$$(10) \qquad bh\theta = -\{ \mathrm{d}(\nabla.\boldsymbol{w})/\mathrm{d}n - h\nabla.\boldsymbol{w} \}_{\Sigma^*} \,,$$

---

(3) Infatti, da $[w]_1$ risulta

$$(\cdot) \qquad m\,\Delta\boldsymbol{w} + (l'+m)\,\nabla\nabla.\boldsymbol{w} - (l''-l')\nabla\nabla.\boldsymbol{u}'' \equiv m\Delta\boldsymbol{w} + (1/3)\nabla I_\psi - (1/3)\nabla I_\psi + + (l'+m)\nabla\nabla.\boldsymbol{w} - (l''-l')\nabla\nabla.\boldsymbol{u}'' \,;$$

d'altra parte essendo

$$\begin{cases} I_\psi = (3l'+2m)\nabla.\boldsymbol{u}' - (3l''+2m)\nabla.\boldsymbol{u}'' \\ \nabla.\boldsymbol{w} = \nabla.\boldsymbol{u}' - \nabla.\boldsymbol{u}'', \end{cases}$$

il secondo membro di $(\cdot)$ diventa

$$m\Delta\boldsymbol{w} + (1/3)\nabla I_\psi + \nabla\,\{[(3l''+2m)/3]\nabla.\boldsymbol{u}'' - [(3l'+2m)/3]\nabla.\boldsymbol{u}' + (l'+m)\nabla.\boldsymbol{u}' - - (l''+m)\nabla.\boldsymbol{u}''\} \equiv m\Delta\boldsymbol{w} + (1/3)\nabla I_\psi + (m/3)\nabla\nabla.\boldsymbol{w}\,.$$

Così procedendo analogamente, dalla (9) discende

$$\psi \equiv \| 2me^{(w)}_{hk} + \{ (1/3)I_\psi - (1/3)I_\psi + l'\nabla.\boldsymbol{w} - (l''-l')\nabla.\boldsymbol{u}'' \}\,\delta_{hk} \| \,,$$

ed anche

$$\psi \equiv \| 2me^{(w)}_{hk} + (1/3)I_\psi\,\delta_{hk} - \{[(3l'+2m)/3]\nabla.\boldsymbol{u}' - [(3l''+2m)/3]\nabla.\boldsymbol{u}'' - l'\nabla.\boldsymbol{u}' + + l''\,\nabla.\boldsymbol{u}''\}\,\delta_{hk} \| = \| 2me^{(w)}_{hk} + (1/3)I_\psi\,\delta_{hk} - (2m/3)\nabla.\boldsymbol{w} \| \,.$$

la trasformazione termoelastica incomprimibile T_τ risulta definita, in modo univoco, dallo « stato addizionale », essendo

$$\tau = (1/b)\nabla . \boldsymbol{w}, \qquad \boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{w}, \qquad I_{\varphi_\tau} = I_\varphi . \tag{11}$$

Infatti $\nabla . \boldsymbol{w}$ è armonica, essendo armoniche $\nabla . \boldsymbol{u}'$ e $\nabla . \boldsymbol{u}''$; ne segue che la funzione $(1/b)\nabla . \boldsymbol{w}$ soddisfa l'equazione $[T_\tau]_1$ e, valida la (10), l'equazione $[T_\tau]_2$. Pertanto essa rappresenta la soluzione, unica ([2], p. 25) del problema termico di $[T_\tau]$. La validità poi di $(11)_2$ e di $(11)_3$ discende dal confronto del sistema $[w]'$ con il problema elastico interessante il sistema $[T_\tau]$.

Pertanto: *nell'ambito linearizzato e stazionario, lo « stato addizionale » individua univocamente uno stato termoelastico incomprimibile esente da forze esterne, mentre uno stato termoelastico incomprimibile esente da forze esterne è deducibile dallo « stato addizionale » se la temperatura ambiente soddisfa la* (10).

Inoltre, dalle relazioni (3) e (11) si ha

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_0 + \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}'', \qquad \tau = (1/b)\nabla . (\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}''), \qquad I_\varphi = I_{\varphi_0} + I_{\varphi'} - I_{\varphi''}, \tag{12}$$

cioè: *la trasformazione termoelastica incomprimibile $T \equiv (\boldsymbol{u}, \tau, I_\varphi)$ determinata da una distribuzione di forze esterne comunque assegnate e da un campo termico soddisfacente la* (10), *è deducibile dai tre stati elastici $\boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}''$, con $\boldsymbol{u}_0$ incomprimibile e $\boldsymbol{u}'$, $\boldsymbol{u}''$ comprimibili.*

Tali risultati rappresentano un legame fra la teoria elastica e la teoria termoelastica incomprimibile, entrambi linearizzate, dei mezzi continui, e perciò vengono ad essere di particolare utilità pratica quando si tengano presenti i numerosi problemi già risolti nel caso elastico.

Osservazione. I risultati ottenuti si mantengono validi anche se: a) gli stati elastici $\boldsymbol{u}'$ e $\boldsymbol{u}''$ sono relativi a forze di massa non trascurabili, purchè conservative e a potenziale armonico; b) nella trasformazione termoelastica incomprimibile T figurano altre condizioni al contorno, quali temperatura e sforzi, flusso termico e spostamento, temperatura e spostamento.

Si prevede inoltre la possibilità di estendere il metodo a casi non stazionari.

5. - Sulla riducibilità di trasformazioni termoelastiche, comprimibili od incomprimibili, allo « stato addizionale ».

La trasformazione $T_\tau \equiv (\boldsymbol{u}_\tau, \tau, I_{\varphi_\tau})$ rientra, come caso particolare, nelle trasformazioni studiate in [5]. Per quanto è stato provato in questo lavoro si ha che la distribuzione di spostamenti, di strains e di stresses relativa alla T_τ

compete anche ad un mezzo S, continuo termoelastico *comprimibile*, omogeneo isotropo, di costanti termiche ed elastiche h, a, l, m, occupante il campo $C^* + \sum^*$, quando, in assenza di forze esterne, il mezzo S venga assogettato al campo termico (4)

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{3a}\{(3l + 2m)b\tau - I_{\varphi_\tau}\}. \tag{13}$$

Ora per $(11)_1$ e $(11)_3$ la relazione (13) diventa

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{3a}\{(3l + 2m)\nabla.(\boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}'') - I_{\varphi'} + I_{\varphi''}\},$$

da cui, essendo $l' = l$, si ha

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{a}(l'' - l')\nabla.\boldsymbol{u}''. \tag{14}$$

E va sottolineato che *questa relazione coincide con quella di* K n o p s ([3], formula (11)). Inoltre, poichè la distribuzione di temperatura data dalla (14) deriva da un flusso termico che su $\sum^*$ avviene in un ambiente a temperatura Θ, essendo

$$ah\Theta = (l' - l'')\{(\mathrm{d}\nabla.\boldsymbol{u}'')/\mathrm{d}n - h\nabla.\boldsymbol{u}''\}_{\Sigma^*}, \tag{15}$$

si ha: *nell'ambito linearizzato e stazionario, a partire da* $C^* + \sum^*$ *lo «stato addizionale» individua una trasformazione termoelastica incomprimibile ed una trasformazione termoelastica comprimibile che, entrambi omogenee isotrope ed esenti da forze esterne, siano originate da campi termici soddisfacenti la* (10) *e la* (15) *rispettivamente. Le trasformazioni termoelastiche hanno in comune la distribuzione di spostamenti, di strains e di stresses.*

C a s o p a r t i c o l a r e. Se $\nabla.\boldsymbol{u}' = K\nabla.\boldsymbol{u}''$, con K costante, si ha

$$\nabla.\boldsymbol{w} = (K - 1)\nabla.\boldsymbol{u}'', \tag{16}$$

e dalle (10), (14) e (15) segue allora

$$\theta = \varrho\Theta, \quad \tau = \varrho\mathfrak{T} \quad (\varrho = a(K-1)/[b(l'' - l')]), \tag{17}$$

---

(4) La relazione (13) si ottiene dalla relazione (10) di [5] quando si tengano presenti l'espressione di q data dalla (2) e le formule $(11)_1$ e $(11)_2$ qui ottenute.

cioè *in questo caso le trasformazioni individuate dallo « stato addizionale » hanno i campi termici fra loro proporzionali.*

La (16) si presenta in molti problemi specifici quale, ad esempio, nel problema analizzato nel n. **6**.

6. - Trasformazioni termoelastiche relative ad un semispazio.

Rispetto ad una terna di riferimento $(O; x, y, z)$ di versori $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, con $\boldsymbol{k}$ diretto secondo la verticale ascendente, sia $\boldsymbol{u}' = u_x' \, \boldsymbol{i} + u_y' \, \boldsymbol{j} + u_z' \, \boldsymbol{k}$ lo stato elastico comprimibile relativo al semispazio $z \geqslant 0$, a forze di massa trascurabili e a forze esterne superficiali non nulle solo nell'intorno di O. Queste forze abbiano componenti tangenziali nulle e componenti normali di risultante $P\boldsymbol{k}$, con P costante negativa.

Il LOVE ([**4**], p. 242, p. 191), osservato che l'effetto di questa sollecitazione superficiale è assimilabile all'azione di un carico P posto in O, trovò per lo spostamento $\boldsymbol{u}'$ le seguenti componenti:

$$(20) \qquad \begin{cases} u_x' = \dfrac{P}{4\pi m} \dfrac{xz}{r^3} - \dfrac{P}{4\pi(l' + m)} \dfrac{x}{r(z + r)} \\[2ex] u_y' = \dfrac{P}{4\pi m} \dfrac{yz}{r^3} - \dfrac{P}{4\pi(l' + m)} \dfrac{y}{r(z + r)} \\[2ex] u_z' = \dfrac{P}{4\pi m} \dfrac{z^2}{z^3} + \dfrac{P(l' + 2m)}{4\pi m(l' + m)} \dfrac{1}{r}, \end{cases}$$

con $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \neq 0$.

Ora poichè la $(20)_3$ può scriversi nella forma

$$(21) \qquad u_z' = \frac{P}{4\pi m} \frac{z^2}{r^3} + \frac{P}{4\pi m} \frac{l' + 3m}{l' + m} \frac{1}{r} - \frac{P}{4\pi(l' + m)} \frac{1}{r},$$

il vettore $\boldsymbol{u}'$ risulta somma dei vettori $\boldsymbol{u}_1'$ e $\boldsymbol{u}_2'$ dati da (5)

$$(22) \qquad \begin{cases} \boldsymbol{u}_1' = -\dfrac{P}{4\pi m} \left\{ \dfrac{\partial}{\partial z} \left[\dfrac{\partial r}{\partial x} \, \boldsymbol{i} + \dfrac{\partial r}{\partial y} \, \boldsymbol{j} \right] + \left[\dfrac{\partial^2 r}{\partial z^2} - \dfrac{l' + 2m}{l' + m} \Delta r \right] \boldsymbol{k} \right\} \\[3ex] \boldsymbol{u}_2' = -\dfrac{P}{4\pi(l' + m)} \left\{ \dfrac{x}{r(z + r)} \, \boldsymbol{i} + \dfrac{y}{r(z + r)} \, \boldsymbol{j} + \dfrac{1}{r} \, \boldsymbol{k} \right\}, \end{cases}$$

(5) All'uopo è bene ricordare che si ha:

$$\frac{xz}{r^3} \equiv -\frac{\partial^2 r}{\partial z \, \partial x}, \qquad \frac{yz}{r^3} \equiv -\frac{\partial^2 r}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{z^2}{r^3} + \frac{l' + 3m}{l' + m} \frac{1}{r} \equiv \frac{1}{r} - \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{l' + 3m}{l' + m} \frac{1}{r} \equiv -\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{l' + 2m}{l' + m} \Delta r.$$

ed anche

$$
(22)' \qquad \left\{
\begin{aligned}
\boldsymbol{u}_1' &= -\frac{P}{4\pi m}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\nabla r - \frac{l'+2m}{l'+m}\Delta r\,\boldsymbol{k}\right\} \\
\boldsymbol{u}_2' &= -\frac{P}{4\pi(l'+m)}\nabla \lg(z+r)\,.
\end{aligned}
\right.
$$

Allora, quando si osservi che $\boldsymbol{u}_2'$ è solenoidale, da $(22)_1'$ segue [6]

$$
(23) \qquad \nabla.\boldsymbol{u}' \equiv \nabla.\boldsymbol{u}_1' = \alpha' z/r^3 \qquad (\alpha' = -P/\{2\pi(l'+m)\})\,.
$$

Si muti ora l' in l'', invariati restando il modulo di rigidità m e la sollecitazione superficiale; rimane allora definito nel semispazio un altro stato elastico $\boldsymbol{u}''$, le cui componenti si ottengono dalle (20)′ leggendo in queste l'' al posto di l'. Se si opera questa sostituzione nelle (22)′, il vettore $\boldsymbol{u}''$ risulta scomponibile in un vettore $\boldsymbol{u}_1''$ e in un vettore solenoidale $\boldsymbol{u}_2''$. Ne segue $\nabla.\boldsymbol{u}'' \equiv \nabla.\boldsymbol{u}_1''$, con $\nabla.\boldsymbol{u}_1''$ deducibile da (23) mediante la sostituzione indicata.

Pertanto lo « stato addizionale » $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{u}' - \boldsymbol{u}''$ per le (22)′ è dato da

$$
(24) \qquad \boldsymbol{w} = \beta\{\Delta r\,\boldsymbol{k} - \nabla \lg(z+r)\} \qquad \left[\beta = \frac{P(l''-l')}{4\pi(l'+m)(l''+m)}\right],
$$

da cui [7]

$$
(25) \qquad \nabla.\boldsymbol{w} = -2\beta z/r^3\,.
$$

Inoltre, essendo

$$
I_\psi \equiv (3l'+2m)\nabla.\boldsymbol{u}' - (3l''+2m)\nabla.\boldsymbol{u}'',
$$

dalla (23) e dalla sua analoga si ottiene

$$
(26) \qquad I_\psi = +\gamma z/r^3 \qquad (\gamma = 2\beta m)\,.
$$

---

[6] Si ha infatti $\nabla.u_1' = -\dfrac{P}{4\pi m}\left\{\dfrac{\partial}{\partial z}\Delta r - \dfrac{l'+2m}{l'+m}\dfrac{\partial}{\partial z}\Delta r\right\} = \dfrac{P}{2\pi(l'+m)}\dfrac{\partial r^{-1}}{\partial z}$, e quindi la (23).

[7] Il calcolo di $\nabla.\boldsymbol{w}$ risulta immediato quando si sfrutti la (23) e la sua analoga.

Per quanto è stato provato nel n. **4** la trasformazione termoelastica *incomprimibile* esente da forze esterne $T_\tau \equiv (\boldsymbol{u}_\tau, \tau, I_{\varphi_\tau})$ risulta allora individuata, essendo

$$\boldsymbol{u}_\tau = \boldsymbol{w}, \qquad \tau = (1/b)\nabla.\boldsymbol{w}, \qquad I_{\varphi_\tau} = I_\psi, \tag{27}$$

dove $\boldsymbol{w}$, $\nabla.\boldsymbol{w}$ e I_ψ hanno rispettivamente le espressioni (24), (25) e (26). Osservo che il campo termico dato dalla (27) è attribuibile ad un dipolo termico posto in O, avente l'asse diretto come la verticale discendente, di momento $\sigma Pz/r^3$ con $\sigma = (l'' - l')/[2\pi(l' + m)(l'' + m)]$.

Per quanto è stato provato poi nel n. **5** le relazioni (24) e (25) individuano anche la trasformazione termoelastica *comprimibile* esente da forze esterne $T_c \equiv (\boldsymbol{U}, \mathfrak{T})$. Precisamente si ha $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{w}$, mentre, risultando in questo caso

$$\nabla.\boldsymbol{u}' = [(l'' + m)/(l' + m)]\nabla.\boldsymbol{u}'',$$

il campo termico per la $(17)_2$ è dato da

$$\mathfrak{T} = \frac{\tau}{\varrho} \qquad \left[\varrho = \frac{a}{b(l' + m)}\right]. \tag{28}$$

Va rilevato che sostituendo nella (28) alla funzione τ la sua espressione data dalla $(27)_2$ si ottiene

$$\mathfrak{T} = \frac{P}{2\pi}\,\frac{l' - l''}{a(l'' + m)}\,\frac{z}{r^3},$$

e tale relazione è proprio quella ottenuta dal KNOPS ([3], p. 189).

Bibliografia.

[1] B. A. BOLEY, J. H. WEINER, *Theory of thermal stresses*, Wiley, New York 1960.

[2] H. S. CARSLAW, J. C. JAEGER, *Conduction of heat in solids*, Claredon Press, Oxford 1948.

[3] R. J. KNOPS, *A method for solving linear thermoelastic problems*, J. Mech. Phys. Solids **7** (1959), 182-192.

[4] A. E. LOVE, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Dover Publications, New York 1927.

[5] B. MANFREDI, *Una relazione fra le trasformazioni termoelastiche linearizzate di mezzi comprimibili ed incomprimibili*, Riv. Mat. Univ. Parma (2) **3** (1962), 193-204.

[6] E. STERNBERG, E. L. MC DOWELL, *On the steady-state thermoelastic problem for half-space*, Quart. Appl. Math. **14** (1957), 387-398.

[7] E. STERNBERG, R. MUKI, *Note on the expansion in powers of Poisson's ratio of solutions in Elastostatics*, Arch. Rat. Mech. Anal. **3** (1959), 229-234.

Summary.

Linear thermoelastic steady-state transformations of incompressible bodies with body and surface forces have been obtained here as superposition of a $\boldsymbol{u}_0$ *linear elastic steady-state incompressible transformation with body and surface forces, and of the* $\boldsymbol{w}$ *Knops' additional state* (see [3]). *This is possible becouse the steady-state temperature distribution is proportional to* $\boldsymbol{w}$*–dilatation and the first stress invariant is equal to the sum of the first stress invariant of* $\boldsymbol{u}_0$ *with the one of* $\boldsymbol{w}$*. Therefore, when there are no body and surface forces, the thermoelastic incompressible transformation is reduced to the same elastic states to wich the thermoelastic compressible transformation can be reduced, if the steady-state temperature distribution is convenient.*

The results are applied in order to determinate the thermoelastic displacements in half-space of both an incompressible and a compressible body.

* * *