Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 127-136

MARIO G. GALLI (*)

Sopra alcune proprietà del campo elettromagnetico generato dal moto iperbolico. (**)

1. – Il moto iperbolico ha richiamato l'attenzione degli studiosi di meccanica e di elettrodinamica essenzialmente per due ragioni:

1) In meccanica relativistica tale moto occupa la medesima posizione che è occupata in meccanica classica dal moto uniformemente accelerato.

2) Se poi la particella mobile è supposta elettricamente carica, il campo generato può essere descritto in modo relativamente semplice. Come è ben noto, le formole generali esprimenti il campo elettromagnetico generato da una carica mobile di moto qualunque, assegnato in funzione dello spazio e del tempo, coinvolgono il tempo t' di emissione, nonchè le coordinate $x'(t')$, $y'(t')$, $z'(t')$ della particella mobile. Insomma si riesce a dare alle espressioni del campo la forma seguente:

$$(1) \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x, y, z, t; x', y', z', t'), \qquad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(x, y, z, t; x', y', z', t').$$

In linea di principio è possibile eliminare le variabili (x', y', z', t') mediante l'equazione

$$(2) \qquad c\,(t - t') = \sqrt{[x - x'(t')]^2 + [y - y'(t')]^2 + [z - z'(t')]^2},$$

sostituendo il valore di t' da questa ricavato nelle precedenti espressioni del campo. Ne consegue la possibilità di dare alle espressioni del campo la forma più semplice:

$$(3) \qquad \boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(x, y, z, t), \quad \boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}(x, y, z, t).$$

(*) Indirizzo: Convento PP. Domenicani, Piazza S. Maria Novella 18, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 17-XI-1962.

Esprimere il campo in questo modo può considerarsi come l'ideale del fisico, ma si tratta di un ideale difficilmente conseguibile in pratica. Ed infatti non è sempre agevole risolvere l'equazione (2). Quando poi sostituiamo nelle espressioni del campo di tipo (1) il valore di t' da questa ricavato in funzione di (x, y, z, t), ne risultano espressioni della forma (3), ma troppo complicate, non aventi un chiaro contenuto fisico. Il vantaggio della trasformazione è puramente illusorio.

Vi sono però due importanti eccezioni, il moto uniforme ed il moto iperbolico, per i quali si riesce ad ottenere espressioni della forma (3) abbastanza semplici.

Questa constatazione fa comprendere abbastanza bene la ragione per la quale il campo elettromagnetico generato dal moto iperbolico sia stato oggetto di particolari attenzioni da parte degli studiosi di elettromagnetismo ([1]).

È strano però che il verificarsi di questa circostanza non abbia facilitato la soluzione dei problemi connessi, primo dei quali è quello concernente l'irradiazione di energia elettromagnetica. Ed infatti studiosi di prim'ordine ([2]), partendo da espressioni del campo di tipo (3), hanno ammesso che il moto iperbolico di una carica elettrica non coinvolge emissione di radiazione, contro una regola generale ben nota ai fondatori dell'elettrodinamica classica ([3]).

Studi più recenti ([4]) hanno messo fuori dubbio che l'eccezione non è compa-

---

([1]) Per una analisi dettagliata del campo originato dal moto iperbolico cfr. G. A. Schott, *Electromagnetic radiation*, Cambridge 1912, pp. 63-69; S. R. Milner, *Does an accelerated electron necessarily radiate energy on the classical theory?*, Phil. Mag. **41** (1921), 405-419.

([2]) M. Born, *Die Theorie des starren Elektrons in der Kinematik des Relativitätsprinzip*, Ann. der Phys. (4) **30** (1909), 1-56; W. Pauli, Enc. der Math. Wissenschaften, Bd. V_2, pp. 647-648; M. von Laue, *Das Relativitätsprinzip*, Braunschweig 1913 (cfr. pp. 131-142); E. L. Hill, *On the kinematics of uniformly accelerated motions and classical electromagnetic theory*, Phys. Rev. **72** (1947), 143-149.

([3]) Si confronti al riguardo qualsiasi trattato di elettromagnetismo, ad es.: R. Becker, *Teoria dell'elettricità*, Sansoni, Firenze, **2** (1950), 74-81.

([4]) D. L. Druckey, *Radiation from a uniformly accelerated charge*, Phys Rev. **76** (1949), 543-545; H. Bondi, T. Gold, *The field of a uniformly accelerated charge, with special reference to the problem of gravitational acceleration*, Proc. Roy. Soc. London. Ser. A **229** (1955), 416-424; T. Fultom, F. Rohrlich, *Classical radiation from a uniformly accelerated charge*, Ann. Phys. **9** (1960), 499-517; Vachaspati, L. Bali, *Definition of uniform acceleration and its conformal invariance*, Nuovo Cimento (10) **21** (1961), 422-458; L. Lanzi, *On the energy conservation for the motion of a radiating electron with particular reference to the hyperbolic motion*, Nuovo Cimento **23** (1962), 195-201.

tibile con la regola predetta e che d'altra parte questa è logicamente inattaccabile (5). Però ciò che è avvenuto meriterebbe un chiarimento sotto l'aspetto genetico. Come mai un errore del genere si è potuto verificare? È ammissibile che fisici tanto autorevoli si siano basati su futili ragioni?

Tale questione non è affatto oziosa, ma la discussione esauriente di essa richiederebbe un lungo discorso. Ci limiteremo a fare due osservazioni che spiegano in parte l'evento, poichè queste hanno connessione con le proposizioni che vogliamo dimostrare.

In primo luogo si deve tenere presente che la teoria della irradiazione elettromagnetica è stata elaborata a partire da formole del tipo (1), nè potrebbe essere diversamente. Infatti, come già abbiamo osservato, la riduzione a formole del tipo (3) è praticamente possibile solo in casi eccezionali. Quando questi si verificano si può essere indotti ad utilizzare concetti che hanno un chiaro significato allorchè si studia il campo mediante formole del tipo (1), ma non lo hanno allorchè si utilizzano formole del tipo (3). Da ciò può nascere confusione. In secondo luogo si deve osservare che il campo generato dal moto iperbolico, espresso mediante formole del tipo (3), possiede delle proprietà alquanto sconcertanti, a prima vista quasi incredibili. Queste proprietà, a dire il vero, non giustificano l'illazione di cui sopra abbiamo parlato, ma predispongono ad ammetterla. Con ciò è facilitata l'accettazione di ragionamenti che hanno solo una forza apparente.

La proprietà più sorprendente è forse quella che concerne il campo magnetico. In un istante particolare, che può essere fatto coincidere con l'istante iniziale scegliendo opportunamente l'origine del tempo, il campo magnetico è nullo in tutto lo spazio, pur essendo generato da un movimento che dura da un tempo infinito. La cosa sembra a prima vista quasi inverosimile. Tuttavia una accurata revisione del processo che conduce alle formole di tipo (3) ci induce ad ammetterla, senza peraltro mostrarne la vera ragione.

Con questa Nota vogliamo dimostrare che questa particolarità può essere giustificata a partire da formole del tipo (1). Con ciò si ottiene non solo una conferma di quanto era noto per altra via, risultato del resto non disprezzabile, quando si tiene presente che si tratta di una proprietà a prima vista incredibile, ma si consegue una visione più profonda e completa della medesima proprietà. Ed infatti, adoperando il metodo consueto, non si saprebbe decidere se la pro-

---

(5) È superfluo osservare che nella presente questione le categorie del vero e del falso sono applicate in senso condizionale: accettando la comune definizione di energia elettromagnetica ne consegue logicamente la regola predetta. Questo naturalmente non esclude che i principi stessi possano essere assoggettati a discussione ed a revisione. Sono anzi noti parecchi tentativi di questo genere. Ma allora la questione cambia aspetto completamente.

prietà in questione appartiene solo al moto iperbolico, con esclusione di ogni altro moto. Questo è invece dimostrabile rigorosamente col metodo che noi proponiamo.

Inoltre si consegue un chiarimento circa il carattere semistatico del campo elettrico nell'istante $t = 0$.

Infine si dimostra un teorema che può essere utilizzato a conferire una precisazione quantitativa al concetto alquanto indeterminato di zona d'onda.

2. – Come è ben noto, il moto iperbolico, scegliendo opportunamente l'origine delle coordinate spazio-temporali e facendo coincidere la traiettoria con l'asse Ox, può essere definito mediante la formola

$$x' = \sqrt{\alpha^2 + c^2 t'^2}\,. \tag{5}$$

Da qui si deduce rispettivamente per il modulo della velocità v e per quello della accelerazione w:

$$v = (c^2 t')/\sqrt{\alpha^2 + c^2 t'^2}\,, \tag{6}$$

$$w = (c^2 \alpha^2)/(\alpha^2 + c^2 t'^2)^{3/2}\,. \tag{7}$$

Usiamo le lettere accentate x', t' per esprimere posizione e tempo relativi alla particella mobile, poichè vogliamo riservare le lettere non accentate per indicare le coordinate (x, y, z) del punto P in cui osserviamo il campo nell'istante t.

Poichè il moto si svolge lungo una retta, il campo elettromagnetico ha ovviamente simmetria assiale, per cui possiamo limitarci a considerare ciò che avviene nel piano Oxy. Si consideri un punto $P(x, y)$ di questo piano e si voglia valutare il campo magnetico in questo punto nell'istante t. L'onda che perviene in P nell'istante t è stata emessa dall'elettrone mobile nell'istante anteriore t' e nella posizione $Q(x')$, essendo le coordinate spazio-temporali (x', t') legate alle coordinate spazio-temporali (x, y, t) dalla relazione

$$c\,(t - t') = \sqrt{(x - x')^2 + y^2}\,, \tag{8}$$

dove x' dipende da t' conformemente alla formola (5).

Qualunque sia la legge del moto, il campo magnetico è espresso in generale dalla formola

$$\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2\,, \tag{9}$$

essendo

$$(10) \qquad \boldsymbol{H}_1 = (\gamma^3/R^2)(1 - v^2/c^2)\{(\boldsymbol{v}/c) \wedge \boldsymbol{R}_0\},$$

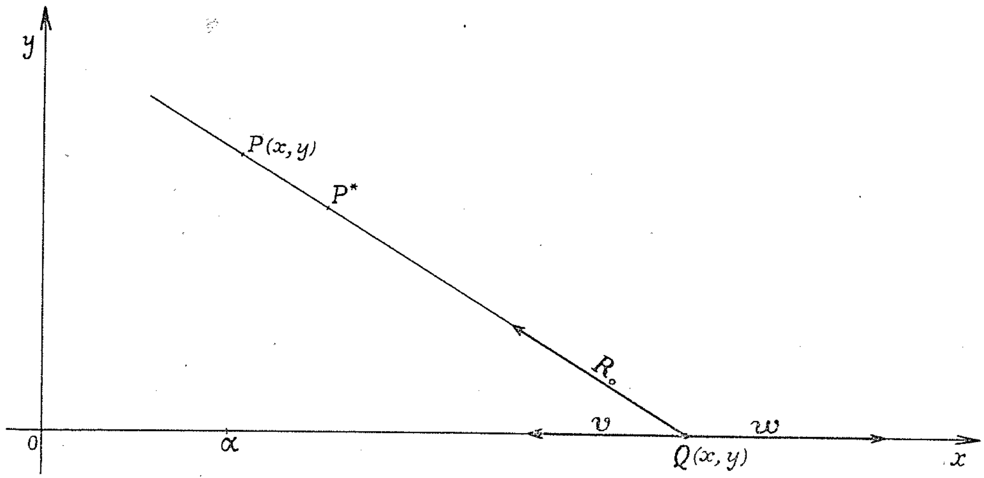
$$(11) \qquad \boldsymbol{H}_2 = (\gamma^3/c^2R)(\boldsymbol{w} \times \boldsymbol{R}_0)\{(\boldsymbol{v}/c) \wedge \boldsymbol{R}_0\} + (\gamma^2/c^2R)(\boldsymbol{w} \wedge \boldsymbol{R}_0),$$

e $\boldsymbol{H}_1$ è il termine semistatico, $\boldsymbol{H}_2$ è il termine di radiazione. In queste formole abbiamo posto

$$(12) \qquad \boldsymbol{R}_0 = \text{vers}\,(P - Q), \quad R = \text{mod}\,(P - Q), \quad \gamma = \{1 - (\boldsymbol{v}/c) \times \boldsymbol{R}_0\}^{-1}.$$

Ciò premesso, procuriamo di rispondere alla domanda: è possibile che per qualche determinato istante l'equazione $\boldsymbol{H}(x, y, t) = 0$ sia verificata?

Esaminando la formola ora scritta è facile vedere che, quando, come nel caso attuale, la velocità $\boldsymbol{v}$ e l'accelerazione $\boldsymbol{w}$ non si possono annullare contemporaneamente, l'eventualità ora prospettata può verificarsi solo per reciproca elisione del termine semistatico e del termine di radiazione. Procuriamo di vedere come questo è possibile. Avvertiamo peraltro che in questa indagine noi prenderemo in considerazione un moto qualunque, ma che si svolge lungo una retta, che faremo coincidere con l'asse Ox.



Indicando con $\boldsymbol{i}$ il versore diretto come l'asse Ox, possiamo ovviamente scrivere

$$(13) \qquad \boldsymbol{v} = v\boldsymbol{i}, \qquad \boldsymbol{w} = w\boldsymbol{i}.$$

Sostituendo queste espressioni nelle (10) e (11), queste diventano, dopo qualche riduzione e semplificazione,

$$H_1 = (v/c)(\gamma^3/R^2)(1 - v^2/c^2)(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{R}_0)\,, \tag{10'}$$

$$H_2 = w(\gamma^3/c^3R)(\boldsymbol{i} \wedge \boldsymbol{R}_0)\,. \tag{11'}$$

Da qui si deduce agevolmente che i campi $\boldsymbol{H}_1$ ed $\boldsymbol{H}_2$ sono uguali in valore assoluto per quel valore di R che soddisfa all'equazione

$$(|\,v\,|/R)(1 - v^2/c^2) = |\,w\,|/c\,, \tag{14}$$

ovvero, in forma esplicita,

$$R = c\,(t - t') = [c\,|\,v\,|\,(1 - v^2/c^2)]/\,|\,w\,|\,. \tag{15}$$

Se poi $\boldsymbol{H}_1$ ed $\boldsymbol{H}_2$ sono diretti in senso contrario, si avrà altresì $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{H}_1 + \boldsymbol{H}_2 = 0$, ossia

$$(v/R)(1 - v^2/c^2) = -(w/c)\,, \tag{14'}$$

da cui segue

$$R = c\,(t - t') = [c\,v\,(1 - v^2/c^2)^2]/(-w)\,. \tag{15'}$$

Si osservi che, mentre la (14) può essere sempre soddisfatta per un opportuno valore di R, il verificarsi della (14') implica che le grandezze di $\boldsymbol{v}$ e $\boldsymbol{w}$ abbiano segno contrario. Questa circostanza si verifica nel caso del moto iperbolico nell'intervallo temporale $(-\infty, 0)$. In questo intervallo il moto è retrogrado con velocità decrescente in valore assoluto.

Non sarà inutile rilevare che, come appare chiaro da una superficiale ispezione della formola ora scritta, il valore di R è del tutto indipendente dalla direzione della retta che abbiamo preso in considerazione. In altre parole, il luogo dei punti nei quali l'onda emessa da una data posizione Q è caratterizzata dall'annullamento del campo magnetico è una sfera con centro in Q. Il verificarsi di questa circostanza non era del tutto evidente « a priori ».

È chiaro peraltro che, assegnata la legge di moto $x' = x'(t')$, il valore di R sarà una ben determinata funzione di t'. Potremo cioè scrivere

$$R = c\,(t - t') = F(t')\,.$$

A valori distinti di t' corrisponderanno in generale valori diversi di R. Poichè possiamo risolvere la precedente equazione rispetto a t, ottenendo

$$t = t' + (1/c)\ F(t')\ ,$$

consegue parimenti che a valori distinti di t' corrisponderanno in generale diversi valori di t. In altre parole, i valori di t per i quali si ha annullamento del campo magnetico emesso dai vari punti del tratto di traiettoria preso in considerazione saranno generalmente diversi.

Potrà verificarsi una eccezione? Ossia, sarà possibile che, per qualche particolare legge di moto, il valore di t che soddisfa all'equazione dianzi scritta sia indipendente da t'?

È facile constatare che, se il moto è iperbolico, questa eccezione ha effettivamente luogo. Se infatti sostituiamo nella (15') in luogo di v e di w i valori forniti dalle (6) e (7), otteniamo: $R = -ct'$.

Tenendo presente che $R = c\,(t - t')$, si vede bene che l'annullamento del campo magnetico totale si ha nell'istante $t = 0$, qualunque sia l'istante t' di emissione. In altre parole, nell'istante $t = 0$ il campo magnetico è ovunque nullo: $\boldsymbol{H}(x,\ y,\ z,\ 0) = 0$.

Quello che abbiamo detto del campo magnetico si può trasferire agevolmente alla componente trasversale del campo elettrico. Questo è definito in generale dalla formola

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_1 + \boldsymbol{E}_2\ , \tag{16}$$

essendo

$$\boldsymbol{E}_1 = (\gamma^3/R^2)(1 - v^2/c^2)(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{v}/c)\ , \tag{17}$$

$$\boldsymbol{E}_2 = (\gamma^2/c^2R)(\boldsymbol{R}_0 \times \boldsymbol{w})(\boldsymbol{R}_0 - \boldsymbol{v}/c) - (\gamma^2/c^2R)\boldsymbol{w}\ . \tag{18}$$

Se ricerchiamo le condizioni di reciproca elisione del campo di radiazione $\boldsymbol{E}_2$ (interamente trasversale) e del componente trasversale del campo semistatico $\boldsymbol{E}_1$, giungiamo alla medesima equazione (15'). Rinunciamo ad una giustificazione dettagliata di questa asserzione, poichè il procedimento è del tutto identico a quello ora esposto con riferimento al campo magnetico.

È importante osservare che questo risultato non è affatto appariscente nella trattazione ordinaria, in cui si procede, come abbiamo detto, alla laboriosa eliminazione di t' dalle (17) e (18), poichè la nozione di trasversalità implica la esplicita considerazione del centro di irradiazione dell'onda elettromagnetica.

Riassumendo, diremo che nel moto iperbolico, per $t = 0$, il campo elettrico è puramente longitudinale, mentre il campo magnetico è rigorosamente nullo.

3. – Ma la formola (15′) consente di dimostrare (cosa non conseguibile con il metodo ordinario) che la proprietà ora segnalata è realmente una proprietà caratteristica del moto iperbolico. Ossia, se una particella elettricamente carica si muove in modo tale che il campo magnetico da essa generato si annulla ovunque in un medesimo istante t, essa deve muoversi di moto iperbolico.

Ed effettivamente, se lasciamo indeterminata la legge di moto $x' = x'(t')$, il verificarsi della (15′) implica che sia valida l'equazione differenziale seguente:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2}(t-t') = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right]^2\right],$$

essendo $t = \text{cost.}$. Poichè possiamo disporre ad arbitrio dell'origine del tempo, possiamo fare in modo che l'istante t, in cui si ha annullamento del campo magnetico, coincida con l'istante iniziale. Per cui non si pone nessuna restrizione sostituendo alla equazione ora scritta la seguente:

$$t'\frac{\mathrm{d}^2 x'}{\mathrm{d}t'^2} = \frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left[\frac{\mathrm{d}x'}{\mathrm{d}t'}\right]^2\right]. \tag{19}$$

Ponendo $z = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t'$, l'equazione ora scritta diventa:

$$t'(\mathrm{d}z/\mathrm{d}t') = z(1 - z^2/c^2),$$

ovvero anche

$$\mathrm{d}z/z + z\,\mathrm{d}z/(c^2 - z^2) = \mathrm{d}t'/t',$$

che ammette per soluzione

$$z/\sqrt{c^2 - z^2} = k\,t', \tag{20}$$

dove k è una costante opportuna. Da qui si ricava

$$z = \mathrm{d}x'/\mathrm{d}t' = ckt'/\sqrt{1 + k^2 t'^2},$$

ovvero anche

$$\mathrm{d}x' = ckt'\,\mathrm{d}t'/\sqrt{1 + k^2\,t'^2}, \tag{21}$$

da cui otteniamo, trascurando un'inessenziale costante additiva e ponendo $\alpha = c/k$,

$$x' = (c/k)\sqrt{1 + k^2 t'^2} = \sqrt{\alpha^2 + c^2 t'^2}\,. \tag{22}$$

Questo risultato mostra che il moto iperbolico ha una situazione privilegiata. Esso è l'unico per il quale la compensazione tra campo magnetico semistatico e di radiazione si consegue nel medesimo istante, indipendentemente dalla posizione del centro emittente.

4. – A maggior chiarificazione di questo risultato occorre fare una osservazione. Il moto iperbolico (anche limitandoci a considerare quanto avviene tra $t' = -\infty$ e $t' = 0$) ha una estensione infinita, come appare chiaro dalla formola di definizione (3). In questo intervallo è costantemente retrogrado, procedendo da $x' = -\infty$ ad $x' = \alpha$, posizione raggiunta nell'istante $t' = 0$. Considerando la formola (11) in modo piuttosto qualitativo, possiamo vedere che il raggio R della sfera di compensazione (se così piace chiamarla) tende ad infinito per $t' \to -\infty$, mentre tende a zero per $t' \to 0$. Questo spiega l'apparente paradosso consistente nel fatto che, per $t = 0$, il campo ha un carattere semistatico con assenza di zona d'onda, pur essendo generato da un moto che dura da un tempo infinito. È precisamente questa assenza di zona d'onda che ha messo nell'imbarazzo un fisico eminente come PAULI.

Occorre peraltro aggiungere che il concetto di zona d'onda non è di natura sua un concetto molto preciso. Di solito si chiama zona d'onda quella regione dello spazio la quale è tanto lontana dai centri emittenti da potere ritenere che il campo elettromagnetico sia rappresentabile con i soli termini di radiazione $\boldsymbol{E}_2$ ed $\boldsymbol{H}_2$. Una definizione cosiffatta esclude manifestamente confini precisi.

Il teorema ora dimostrato può essere di aiuto nell'elaborazione di una nozione quantitativa. Abbiamo visto infatti che, per quanto si riferisce all'onda emessa in un istante determinato, si può assegnare una superficie ben determinata (e questa è sferica) oltre la quale incomincia a prevalere il campo di radiazione. Se poi si considera un tratto finito di traiettoria, allora (ammesso che sia sempre $\boldsymbol{w} \neq 0$) si ha sicuramente prevalenza del campo di radiazione nello spazio esterno alla totalità delle sfere predette.

Quando però si prende in considerazione, come nel caso presente, un tratto infinito, occorre essere cauti, poichè il raggio R, definito dalla (15), può tendere ad infinito. In ogni caso (a meno che non si tratti di moti periodici che durano da $t = -\infty$) nel concetto di zona d'onda entra in qualche modo anche il tempo.

Se si tengono presenti tutte queste avvertenze, l'indeterminazione del concetto di zona d'onda non può essere occasione di equivoci, come purtroppo si è verificato a proposito dell'irradiazione elettromagnetica dovuta al moto iperbolico.

Summary.

The electromagnetic field generated by the hyperbolic motion of a charge presents, at first sight, some strange properties, from which a few authors inferred the absence of radiation. One of these properties is as follows: The magnetic field in the instant $t = 0$ *is zero anywhere in the all space, although the particle is moving in the all intervall* $(-\infty, 0)$ *with accelerated motion.*

In this article the author gives a new proof of this property using a method by which it is also possible to demonstrate that this property is a characteristic one of the hyperbolic motion. By this new method it is put in clear light that it is completely unjustified to infer the absence of radiation.

* * *