Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 83-106

GIOVANNI BATTISTA RIZZA (*)

Strutture di Finsler di tipo quasi Hermitiano. (**) (1)

1. – Questo lavoro è dedicato alle varietà reali di dimensione pari, dotate simultaneamente di strutture di FINSLER e di strutture quasi complesse.

Punto di partenza è l'introduzione di una opportuna nozione di compatibilità tra i due tipi di strutture (n. 6). Formulata dapprima in modo astratto, essa rivela successivamente un notevole contenuto geometrico (oss. del n. 6, teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{II}}$ del n. 10 e, sopra tutto, teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{III}}$ del n. 10). Invero, in ipotesi di compatibilità, le ordinarie determinazioni metriche, che si ottengono in modo intrinseco a partire dalle due strutture in considerazione, risultano tra loro sostanzialmente equivalenti.

Si riconosce poi che le strutture di FINSLER, compatibili con una qualche struttura quasi complessa, costituiscono una naturale generalizzazione delle ordinarie strutture quasi hermitiane; di qui il nome di *strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano* (n. 7). Esse sono geometricamente caratterizzate dalla proprietà che, in ogni punto, il corpo convesso definito dalla struttura è un corpo circolare di CARATHÉODORY (teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{I}}$, n. 8).

Conviene ancora segnalare un altro risultato, cui si perviene considerando, in ogni punto della varietà, un gruppo di isomorfismi, denotato con G_J, ottenuto a partire dall'isomorfismo fondamentale J, associato ad una struttura quasi complessa (nn. 2, 11). Precisamente si dimostra che, in ipotesi di compatibilità, le determinazioni metriche finsleriane dipendenti dalla considerazione di un arbitrario elemento d'appoggio risultano invarianti rispetto al gruppo G_J; e viceversa (teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{IV}}$, n. 11).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Parma, Italia.

(**) Ricevuto il 4-VII-1963.

(1) Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 1 del C.N.R. per l'anno 1961-62. Alcuni dei risultati, già segnalati al Congresso di Stoccolma, sono riassunti senza dimostrazione in una recente nota Lincea (vedi i nn. [13], [14] della Bibliografia).

Alcune osservazioni sui coefficienti $g_{jk}(x, \xi)$ della forma $\boldsymbol{R}$-bilineare simmetrica $\Phi_{x,\xi}$, definita dalla struttura, conducono poi a caratterizzare nuovamente, tra le strutture di FINSLER, quelle di tipo quasi hermitiano (teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}$, n. 12) e suggeriscono lo studio di strutture più particolari, dette speciali (n. **14**).

Per queste ultime, la funzione fondamentale soddisfa alla condizione di positiva omogeneità isotropa e la funzione coseno riesce simmetrica sui 2-spazi caratteristici (invarianti rispetto a G_J) (teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VII}}$, n. **14**). Inversamente, una struttura di FINSLER, che possegga le proprietà ora accennate, è necessariamente di tipo quasi hermitiano (teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VI}}$, n. **14**).

Infine, al n. **16**, si è indicato un procedimento che permette, su una varietà quasi complessa, di ottenere strutture di tipo quasi hermitiano, a partire da ordinarie strutture di FINSLER (teor. $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VIII}}$). Il risultato generalizza un teorema di A. LICHNEROWICZ, relativo alle strutture di RIEMANN.

Un esempio non banale di struttura di FINSLER di tipo quasi hermitiano è costruito esplicitamente al n. **18**.

2. - Strutture quasi complesse.

Sia c una *struttura quasi complessa* su di una varietà reale V di dimensione $2n$ (²), x un punto di V, T_x lo spazio vettoriale tangente in x a V.

In un conveniente intorno U di x su V si introducano $2n$ coordinate locali complesse, a due a due coniugate, tali che la base naturale da esse definita in T_x sia una *base isotropa* (³).

Siano x^p, $x^{\bar{p}}$ $(p \in \boldsymbol{I})$ le coordinate localmente isotrope del punto x (⁴).

In relazione alla base isotropa fissata in T_x, i tensori reali di V, di origine x, sono dotati di componenti isotrope a due a due coniugate.

Posto $\boldsymbol{\Gamma} = \{\gamma \in \boldsymbol{R} \mid 0 \leqslant \gamma < 2\pi\}$ e indicate con $(\xi^p, \xi^{\bar{p}})$ $(p \in \boldsymbol{I})$ le componenti isotrope di un vettore $\xi \in T_x$, si considerino ora gli *isomorfismi* J_φ di T_x $(\varphi \in \boldsymbol{\Gamma})$ definiti da

$$J_\varphi: \quad (\xi^p, \xi^{\bar{p}}) \to (e^{i\varphi}\xi^p, e^{-i\varphi}\xi^{\bar{p}}) \tag{1}$$

e intrinsecamente dipendenti dalla struttura c (⁵).

(²) Per le nozioni generali, vedi p. es. B. ECKMANN, [2], I, III, VI; A. LICHNEROWICZ, [7], V; E. MARTINELLI, [9], [10].

(³) Cioè associata alla struttura c.

(⁴) Intervengono gli insiemi di indici $\boldsymbol{I} = \{1, \ldots, n\}$; $\bar{\boldsymbol{I}} = \{\bar{1}, \ldots, \bar{n}, \}$; $\tilde{\boldsymbol{I}} = \boldsymbol{I} \cup \bar{\boldsymbol{I}}$. Di regola gli indici $p, q, \ldots$ percorrono $\boldsymbol{I}$; gli indici $j, k, \ldots$ percorrono $\tilde{\boldsymbol{I}}$.

(⁵) Isomorfismi di questo tipo, con $\varphi = \pi/2m$ $(m \in \boldsymbol{N}^*)$, sono stati considerati da H. GUGGENHEIMER nello spazio duale T^*_x. Ved. [4], (2) p. 271; [5], (7) al n. 2.

In particolare, J_0 e $J_{\pi/2}$ sono rispettivamente l'isomorfismo identico e l'isomorfismo fondamentale relativo alla struttura quasi complessa, indicati generalmente con I e J. Risulta

$$J_\varphi = I \cos\varphi + J \sin\varphi \qquad (\varphi \in \boldsymbol{\Gamma}). \tag{2}$$

L'insieme G_J degli isomorfismi J_φ, con l'ordinaria legge di composizione, è un gruppo abeliano, isomorfo al gruppo delle rotazioni piane di centro fissato e cioè al gruppo additivo $\boldsymbol{R}/2\pi\boldsymbol{Z}$. I sottospazi vettoriali di T_x invarianti per G_J si dicono *caratteristici*; essi hanno dimensioni pari e possono essere orientati in modo intrinseco a partire dalla struttura quasi complessa (6).

3. – Ciò premesso, *la struttura quasi complessa c di V determina canonicamente in T_x la relazione di equivalenza R_c, definita dalla uguaglianza:*

$$\vartheta\, R_c\, \xi \Longleftrightarrow \exists\ J_\varphi \in G_J \mid \vartheta = J_\varphi\, \xi \qquad (\vartheta,\ \xi \in T_x)\ (^7). \tag{3}$$

I vettori $J_\varphi\, \xi$ $(\varphi \in \boldsymbol{\Gamma})$ equivalenti a ξ appartengono tutti ad un medesimo spazio 2-dimensionale caratteristico, che può indicarsi con h_ξ (8).

Conviene ora notare che, per ogni coppia di vettori $\mu,\ v \in h_\xi - 0$, risulta:

$$\mu = m\, J_\psi\, v\,, \tag{4}$$

con $m \in \boldsymbol{R}_+^*$ e $\psi \in \boldsymbol{\Gamma}$ univocamente determinati. La (4) sussiste anche per $\mu = 0$; risulta allora $m = 0$, ma ψ è indeterminato (9). In altri termini, *la struttura quasi complessa c di V determina canonicamente, per ogni 2-spazio caratteristico h_ξ, le applicazioni:*

$$R:\quad h_\xi \times h_\xi - 0 \to \boldsymbol{R}_+, \qquad\qquad A:\quad h_\xi - 0 \times h_\xi - 0 \to \boldsymbol{\Gamma}\,,$$

definite da:

$$R(\mu,\ v) = m\,, \qquad A(\mu,\ v) = \psi\,.$$

---

(6) Ved. p. es. G. B. Rizza, [12], n. 4-6.

(7) I risultati e le osservazioni di questo numero sono sostanzialmente dovuti a E. Martinelli (ved. [9], n. 5; [10], n. 5). In vista del seguito vengono qui esposti in forma un pò diversa dall'usuale.

(8) Il risultato è immediata conseguenza della (2). È poi evidente che h_ξ è l'unico 2-spazio caratteristico che contiene ξ. L'orientazione positiva su h_ξ (annotazione (6)) è data dal crescere di φ.

(9) Alla (4) si perviene subito considerando in h_ξ la base costituita dai vettori v e Jv e tenendo presente la (2). Le quantità m e ψ sono risp. il modulo e l'argomento del numero complesso corispondente alla coppia ordinata delle componenti di μ.

Si consideri ora l'*applicazione*:

$$L: \quad h_\xi \to \boldsymbol{R}_+$$

definita da

(5) $$L(\mu) = m\,,$$

la quale può identificarsi con l'applicazione parziale ottenuta da R in corrispondenza al valore v del secondo argomento. Il numero reale positivo $L(\mu)$ dicesi *lunghezza* del vettore μ (rispetto ad v) .

Sussistono le relazioni:

$$L(\zeta) = L(\eta) \Longleftrightarrow \zeta\, R_c\, \eta\,,$$

(6) $$L(r\mu) = r\, L(\mu) \qquad (r \in \boldsymbol{R}_+),$$

$$L(v) = 1\,,$$

che discendono immediatamente dalla (4) (10).

Risulta inoltre, per ogni $\nu \in h_\xi - 0$,

(7) $$R(\mu,\ \nu) = \frac{L(\mu)}{L(\nu)}\,,$$

da cui segue subito che una diversa scelta del vettore unitario v porta soltanto ad alterare le lunghezze per un fattore reale positivo.

La nozione di lunghezza si estende poi in modo ovvio ad ogni vettore di T_x (11).

Il numero reale $A(\mu,\ v)$ $(\mu,\ v \in h_\xi - 0)$, che può anche intendersi mod. 2π, dicesi invece *angolo* di v con μ.

Conviene osservare esplicitamente che la nozione di lunghezza considerata, a differenza di quella di angolo, non ha carattere intrinseco rispetto alla struttura quasi complessa c; invero la scelta del vettore unitario in ogni 2-spazio caratteristico non è intrinsecamente determinata da c.

Ha invece natura intrinseca nel senso accennato, come appare ad es. dalla (7), la nozione di rapporto tra lunghezze, in particolare quella di uguaglianza tra lunghezze, con riferimento a vettori di un medesimo 2-spazio caratteristico.

---

(10) Inversamente le (6) definiscono l'applicazione L. Infatti dalle (6), (4) segue la (5).

(11) Invero, come si è accennato, ogni vettore di T_x appartiene ad uno e ad un solo spazio 2-dimensionale caratteristico.

Nel seguito, le determinazioni metriche intrinseche, cui si perviene a partire dalla struttura quasi complessa c, sono denotate globalmente con $\mathfrak{M}\mathfrak{G}^c$.

4. - Strutture di Finsler.

Si consideri ora su V una *struttura di Finsler* f (12) e sia $F(x,\ \xi)$ $(x \in V,$ $\xi \in T_x)$ la funzione fondamentale (13). Con riferimento alle coordinate di x ed alle componenti di ξ, $F(x,\ \xi)$ è rappresentata da $F_*(x^p,\ x^{\bar p};\ \xi^p,\ \xi^{\bar p})$ $(p \in \boldsymbol{I})$. Posto

$$g_{jk}(x,\ \xi) = \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2 F_*^2}{\partial \xi^j\, \partial \xi^k} \qquad (j,\ k \in \tilde{\boldsymbol{I}}) \quad (14)\,, \tag{8}$$

sia

$$\Phi_{x,\xi}:\ T_x \times T_x \to \boldsymbol{R} \qquad (x \in V,\ \ \xi \in T_x)\,,$$

la *forma* $\boldsymbol{R}$*-bilineare simmetrica*, canonicamente determinata dalla struttura f, definita da

$$\Phi_{x,\xi}(\sigma,\ \tau) = g_{jk}(x,\ \xi)\ \sigma^j\, \tau^k \qquad (\sigma,\ \tau \in T_x)\,. \tag{9}$$

Sono utili le relazioni:

$$F_* = \left(\frac{\partial F_*}{\partial \xi^p}\ \xi^p\right) + \left(\frac{\partial F_*}{\partial \xi^{\bar p}}\ \xi^{\bar p}\right), \tag{10}$$

$$g_{jk}(x,\ r\xi) = g_{jk}(x,\ \xi) \qquad (r \in \boldsymbol{R}_+^*)\,, \tag{11}$$

---

(12) L'esistenza di strutture di Riemann (strutture di Finsler particolari (n. **7**)) su ogni varietà quasi complessa è assicurata dal classico teorema di Whitney. Esempi di strutture di Finsler non Riemanniane su una V a struttura quasi complessa, sono indicati ai nn. **17**, **18**.

(13) Per le nozioni generali ved. H. Rund, [**15**], I.

(14) Le g_{jk} $(x,\ \xi)$ $(x \in V,\ \xi \in T_x)$ sono componenti di un tensore reale simmetrico. Le espressioni a secondo membro sono derivate formali complesse (ved. p. es. G. B. Rizza, [**11**], n. 2). Precisamente, posto $\xi^p = X^p + i\, X^{n+p}$ $(X^l \in \boldsymbol{R};\ \ l = 1, \ldots, 2n)$ e $F_{**}(x^p,\ x^{\bar p};\ X^p,\ X^{n+p}) = F_*(x^p,\ x^{\bar p};\ \xi^p,\ \xi^{\bar p})$ si ha: $\dfrac{\partial F_*}{\partial \xi^p} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial F_{**}}{\partial X^p} - i\ \dfrac{\partial F_{**}}{\partial X^{n+p}}\right)$, $\dfrac{\partial F^*}{\partial \xi^{\bar p}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial F_{**}}{\partial X^p} + i\ \dfrac{\partial F_{**}}{\partial X^{n+p}}\right)$, ecc..

immediate conseguenze della positiva omogeneità, di grado uno, della funzione fondamentale, rispetto al vettore ξ variabile in T_x.

Nello spazio tangente $T_x\,(x \in V)$, ora riguardato come spazio affine di centro O, si denoti poi con K_x il *corpo convesso*, luogo dei punti $\xi \in T_x$ soddisfacenti a

$$F(x,\ \xi) \leqslant 1 .$$

5. – È ben noto che una struttura di FINSLER f permette di introdurre intrinsecamente, per i vettori di T_x $(x \in V)$, le nozioni di lunghezza e di angolo in due modi sostanzialmente diversi.

Uno di essi si fonda sulla considerazione sistematica degli elementi lineari orientati della varietà (elementi di appoggio) (15).

Precisamente, in relazione all'elemento lineare orientato individuato da $(x,\ \xi)$ $(x \in V,\ \xi \in T_x - 0)$, la *lunghezza* $\lambda_\xi(\varrho)$ del vettore ϱ e l'*angolo* $\alpha_\xi(\sigma,\ \tau)$ dei vettori $\sigma,\ \tau$ sono definiti dalle uguaglianze (16):

$$\lambda_\xi^2(\varrho) = \Phi_{x,\xi}(\varrho,\ \varrho) \qquad (\varrho \in T_x)\,, \tag{12}$$

$$\cos \alpha_\xi(\sigma,\ \tau) = \frac{\Phi_{x,\xi}(\sigma,\ \tau)}{\lambda_\xi(\sigma)\ \lambda_\xi(\tau)} \qquad (\sigma,\ \tau \in T_x - 0). \tag{13}$$

L'altro modo, in certo senso più semplice, conduce invece a determinazioni metriche che non dipendono da un generico elemento d'appoggio.

Precisamente, la *lunghezza* $l(\varrho)$ di un vettore ϱ e l'*angolo* $a(\sigma,\ \tau)$ dei vettori $\sigma,\ \tau$ sono definiti dalle uguaglianze (17):

$$l^2(\varrho) = \lambda_\varrho^2(\varrho) = \Phi_{x,\varrho}(\varrho,\ \varrho) = F^2(x,\ \varrho) \qquad (\varrho \in T_x)\,, \tag{14}$$

$$\cos a(\sigma,\ \tau) = \frac{\Phi_{x,\sigma}(\sigma,\ \tau)}{l(\sigma)\ l(\tau)} \qquad (\sigma,\ \tau \in T_x - 0)\,. \tag{15}$$

Si noti che, in generale, non sussiste la relazione

$$\cos a(\sigma,\ \tau) = \cos a(\tau,\ \sigma)\,, \tag{16}$$

cioè, a differenza di $\cos \alpha_\xi(\sigma,\ \tau)$, la funzione $\cos a(\sigma,\ \tau)$ *non* è simmetrica.

---

(15) Indicata con R_{d_0} la relazione di equivalenza definita in $T_x - 0$ da: $\eta R_{d_0} \xi \Longleftrightarrow \eta = r\xi$ $(r \in \boldsymbol{R}_+^*)$, sia $[\xi]$ l'elemento di $T_x - 0/R_{d_0}$ determinato da ξ (direzione orientata di ξ). Le coppie $(x,\ [\xi])$ con $x \in V$ e $\xi \in T_x - 0$ si dicono elementi lineari orientati di V.

(16) Naturalmente si assume $\lambda_\xi(\varrho) \in \boldsymbol{R}_+$. La (13), in realtà, definisce soltanto $\cos \alpha_\xi(\sigma,\ \tau)$.

(17) Naturalmente si assume $l(\varrho) \in \boldsymbol{R}_+$. La (15), in realtà, definisce soltanto $\cos a(\sigma,\tau)$.

È poi immediato che *la struttura di* F i n s l e r f *determina canonicamente in* T_x *la relazione di equivalenza* R_f *definita dall'uguaglianza*:

$$\vartheta \, R_f \, \xi \iff l(\vartheta) = l(\xi) . \tag{17}$$

Le totalità delle determinazioni metriche intrinseche, cui si perviene a partire dalla struttura di FINSLER f, dipendenti o indipendenti dalla scelta di un arbitrario elemento d'appoggio, sono nel seguito indicate con $\mathfrak{M}^f$, $\overset{*}{\mathfrak{M}}{}^f$ rispettivamente.

6. - Condizioni di compatibilità.

Le premesse dei numeri precedenti permettono ora di porre la definizione:

D – *Una struttura quasi complessa* c *ed una struttura di* F i n s l e r f *di una varietà* V *si dicono compatibili, se le relazioni di equivalenza* R_c, R_f *intrinsecamente determinate dalle strutture, risultano uguali su ogni 2-spazio caratteristico. Cioè*:

$$R_{c|h_\xi \times h_\xi} = R_{f|h_\xi \times h_\xi} \qquad (\xi \in T_x, \; x \in V) \; (^{18}) . \tag{18}$$

La condizione di compatibilità può venire espressa in diversi modi.

Ad esempio, introdotta a partire dalle strutture la nozione di lunghezza per i vettori, in virtù delle $(6)_1$, (17) essa diviene:

$$L(\zeta) = L(\eta) \iff l(\zeta) = l(\eta) , \tag{19}$$

con $\zeta, \eta \in h_\xi$; $\xi \in T_x$; $x \in V$.

Tenuto conto delle osservazioni alla fine del n. **3** e all'inizio del n. **5**, i termini della uguaglianza (19) dipendono intrinsecamente dalla struttura quasi complessa c e dalla struttura di FINSLER f.

Si noti che, se c ed f sono compatibili, previa opportuna scelta del vettore unitario in ogni 2-spazio caratteristico, la (19) diviene semplicemente

$$L(\xi) = l(\xi) \qquad (\xi \in T_x, \; x \in V) \; (^{19}) . \tag{20}$$

---

(18) Le relazioni di equivalenza R_c, R_f sono qui riguardate come applicazioni di $T_x \times T_x$ nell'insieme $\{0, 1\}$.

(19) Il risultato è conseguenza immediata delle osservazioni del n. **4**.

È bene poi segnalare che, in virtù delle (3), (17), (14), la condizione di compatibilità può anche scriversi così:

$$(21) \qquad F(x,\ \xi) = F(x,\ J_\varphi\, \xi) \qquad (x \in V,\ \xi \in T_x,\ \varphi \in \boldsymbol{\Gamma}).$$

Quindi, *le strutture c ed f sono compatibili se, in ogni punto x di V, la funzione fondamentale $F(x, \xi)$ della struttura di Finsler f è invariante rispetto al gruppo G_J definito dalla struttura quasi complessa c.*

Infine, si riconosce facilmente che la compatibilità delle strutture c ed f equivale alla validità delle *relazioni*:

$$(22) \qquad \begin{array}{ll} g_{pq}(x,\ J_\varphi\, \xi) = e^{-2i\varphi}\, g_{pq}(x,\ \xi); & g_{\bar p\bar q}(x,\ J_\varphi\, \xi) = e^{2i\varphi}\, g_{\bar p\bar q}(x,\ \xi) \\ g_{p\bar q}(x,\ J_\varphi\, \xi) = g_{p\bar q}(x,\ \xi); & g_{\bar p q}(x,\ J_\varphi\, \xi) = g_{\bar p q}(x,\ \xi) \end{array}$$

con $x \in V,\ \xi \in T_x,\ \varphi \in \boldsymbol{\Gamma}$.

Invero, tenuta presente la (8), le relazioni (22), a due a due coniugate, si ottengono immediatamente derivando la (21); a sua volta la (21) può dedursi dalle (22) in virtù delle (9), (14).

7. - Strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano.

Conviene ora ricordare che le *strutture di Riemann* sono caso particolare delle strutture di FINSLER. Precisamente f è una struttura di RIEMANN, se e solo se la forma ***R**-bilineare* simmetrica $\Phi_{x,\xi}$ definita al n. **4**, è *indipendente* dall'elemento d'appoggio; cioè $\Phi_{x,\xi} = \Psi_x$.

In questa ipotesi, denotati con $\gamma_{jk}(x)$ i coefficienti $g_{jk}(x,\ \xi)$ $(j,\ k \in \tilde{\boldsymbol{I}})$, le (22) implicano:

$$(23) \qquad \gamma_{pq}(x) = \gamma_{\bar p\bar q}(x) = 0 \qquad (p,\ q \in \boldsymbol{I}),$$

onde Ψ_x è una forma ***R**-bilineare simmetrica associata ad una forma hermitiana* ([20]). Viceversa, è evidente che i coefficienti $\gamma_{jk}(x)$ di una forma Ψ_x avente questa proprietà, soddisfano alle (22).

In conclusione, *una struttura di Riemann f, compatibile con una struttura quasi complessa c* (n. **6**), *è una struttura quasi hermitiana* (*relativa a c*); *e viceversa* ([21]).

([20]) La simmetria e la realità di $g_{jk}(x,\ \xi)$ (annotazione ([14])) assicurano la simmetria hermitiana di $\gamma_{jk}(x)$ $(j,\ k \in \tilde{\boldsymbol{I}})$.

([21]) Alcune osservazioni del seguito (nn. **9**, **10**) indicano che questo risultato deve ritenersi sostanzialmente noto.

Le strutture di FINSLER soddisfacenti alla condizione di compatibilità del n. 6 rispetto ad una qualche struttura quasi complessa di V costituiscono dunque una generalizzazione delle ordinarie strutture quasi hermitiane e pertanto si diranno *strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano.*

Indicati con $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{R}$ gli insiemi delle strutture di FINSLER e di RIEMANN di V, con $\mathfrak{F}_H^c$, $\mathfrak{H}^c$ i rispettivi sottoinsiemi delle strutture compatibili con c, con $\mathfrak{C}$ l'insieme delle strutture quasi complesse di V, le strutture di FINSLER di tipo quasi hermitiano e le ordinarie strutture quasi hermitiane di V costituiscono precisamente gli insiemi:

$$\mathfrak{F}_H = \bigcup_{c \in \mathfrak{C}} \mathfrak{F}_H^c, \qquad \mathfrak{H} = \bigcup_{c \in \mathfrak{C}} \mathfrak{H}^c ;$$

le osservazioni precedenti possono quindi riassumersi così:

$$\mathfrak{F} \supset \mathfrak{R}, \qquad \mathfrak{F}_H \supset \mathfrak{H}, \qquad \mathfrak{F}_H^c \supset \mathfrak{H}^c .$$

8. - Teorema sul corpo convesso K_x.

Conviene ora segnalare una caratterizzazione geometrica delle strutture di FINSLER di tipo quasi hermitiano (n. 7).

Riguardato T_x come spazio affine di centro O, la nozione di lunghezza, introdotta al n. 3 per i vettori, si traduce in quella di distanza dei punti di T_x da O. Si possono quindi considerare, in particolare, le circonferenze di centro O situate sui piani caratteristici per O e, successivamente, i domini di T_x aventi sezioni circolari di centro O con i piani caratteristici per O: *corpi circolari di Carathéodory*, di centro O (22). In virtù dell'osservazione al termine del n. 3, queste ultime nozioni hanno carattere intrinseco rispetto alla struttura quasi complessa.

Ciò premesso, sussiste il teorema:

T_{I}. – *Una struttura di Finsler f di V è compatibile con una struttura quasi complessa c di V* (n. 6), *se e solo se, in ogni punto x di V, il corpo convesso K_x definito da f nello spazio tangente T_x* (n. 4) *è un corpo circolare di Carathéodory di centro O, relativamente a c.*

(22) Il risultato del n. 7 mostra che la definizione di corpo circolare di CARATHÉODORY ha qui una formulazione più generale di quella ordinaria. Invero essa dipende soltanto dalla struttura quasi complessa c di V e non dalle strutture quasi hermitiane relative a c (cfr. p. es. H. BEHNKE e P. THULLEN, [1], p. 34; F. SEVERI, [16], n. 18).

Il risultato si stabilisce così. Siano ξ, ϑ due punti di T_x appartenenti al contorno del corpo convesso K_x e ad uno stesso piano caratteristico. È quindi:

$$F(x, \vartheta) = F(x, \xi) = 1 . \tag{24}$$

Ora, se K_x è un corpo circolare di CARATHÉODORY di centro O, si ha immediatamente $L(\vartheta) = L(\xi)$, onde, in virtù delle $(6)_1$, (3), risulta $\vartheta = J_\varphi \xi$ ([23]). Sussiste perciò la relazione (19) per ogni punto ξ del contorno di K_x; anzi, tenuto conto della positiva omogeneità della funzione fondamentale $F(x, \xi)$ nelle variabili ξ^j $(j \in \tilde{I})$ e della permutabilità delle applicazioni J_φ con le omotetie di centro O, la (21) sussiste per ogni ξ di T_x. È quindi provata la compatibilità delle strutture.

Viceversa, se le due strutture sono compatibili, dalle (24), (14), (19) segue $L(\vartheta) = L(\xi)$, onde K_x è un corpo circolare di CARATHÉODORY di centro O.

9. - Osservazioni.

Alcune osservazioni discendono facilmente considerando nella (21) valori particolari di φ.

Precisamente, posto $\varphi = \pi$, si ottiene la relazione

$$F(x, \xi) = F(x, -\xi) , \tag{25}$$

quindi, *una struttura di Finsler di tipo quasi hermitiano è necessariamente simmetrica.*

Posto invece $\varphi = \pi/2$, si perviene alla relazione

$$F(x, \xi) = F(x, J\xi) . \tag{26}$$

Ebbene *per le strutture di Riemann, le condizioni* (21), (26) *sono equivalenti. Questo, però, non è più vero, in generale, per le strutture di Finsler.*

La prima parte dell'asserto si ottiene così. La (26) equivale evidentemente alla (22) con $\varphi = \pi/2$ e da queste, se f è una struttura di RIEMANN, segue subito la (23), che, come si è visto al n. **7**, nella stessa ipotesi su f, risulta equivalente alla (22) e quindi alla (21). Un esempio al n. **17** prova poi la seconda parte.

([23]) Naturalmente tutto va ora interpretato con riferimento a punti anzichè a vettori. Ad es. $L(\xi)$ è la distanza di ξ da O; J_φ $(\varphi \in \Gamma)$ è l'applicazione biunivoca di T_x su T_x definita dalla (1); $m\xi$ $(m \in \boldsymbol{R})$ è il punto corrispondente a ξ nell'omotetia di centro O e rapporto m.

In virtù della proprietà ottenuta, la compatibilità tra una struttura di RIEMANN f ed una struttura quasi complessa c sulla varietà V può esprimersi anche con la condizione (26). È ormai immediato riconoscere che il risultato del n. **7** non differisce sostanzialmente da una nota caratterizzazione delle strutture quasi hermitiane ([24]).

10. - Relazione tra gli angoli.

Si è visto al n. **6** come la compatibilità tra le strutture f e c di V si traduca in una relazione diretta tra le nozioni di lunghezza intrinsecamente determinate da f e da c.

Ora, in ipotesi di compatibilità, anche le nozioni di angolo, introdotte ai nn. **3**, **5** a partire dalle strutture, appaiono collegate in modo assai semplice. Precisamente, sussiste il teorema:

$\boldsymbol{T}_{\mathrm{II}}$. – *Se f è una struttura di Finsler di tipo quasi hermitiano, relativamente ad una struttura quasi complessa c di V, per ogni coppia di vettori non nulli μ, v, appartenenti ad un medesimo 2-spazio caratteristico, risulta:*

$$\cos A(\mu,\ v) = \frac{1}{2}\left[\cos a(\mu,\ v) + \cos a(v,\ \mu)\right]. \tag{27}$$

Prima di iniziare la dimostrazione di $\boldsymbol{T}_{\mathrm{II}}$, conviene notare che l'ipotesi sui vettori μ, v è essenziale perchè riesca definito il primo membro della (27) (n. **3**).

Sia dunque h_ξ un 2-spazio caratteristico ($\xi \in T_x$, $x \in V$) e μ, $v \in h_\xi - 0$. Sussiste allora la (4) con m, ψ univocamente determinati (n. **3**). Anzi, nel caso attuale, è lecito supporre $m = 1$ cioè $\mu = J_\psi\, v$ ([25]).

È immediato allora riconoscere che il primo membro della (27) è precisamente $\cos\psi$ e che, in virtù delle (3), (17) e della condizione di compatibilità (18), risulta $l(\mu) = l(v)$.

Tenuta presente la (1), dalle condizioni di compatibilità (22) segue poi direttamente la relazione:

$$g_{jk}(x,\ \mu)\, \mu^j v^k + g_{jk}(x,\ v)\, v^j \mu^k = 2\, g_{jk}(x,\ v)\, v^j v^k \cos\psi\,,$$

con j, $k \in \widetilde{\boldsymbol{I}}$, la quale, a causa delle (9), (14), diviene:

$$\Phi_{x,\mu}(\mu,\ v) + \Phi_{x,v}(v,\ \mu) = 2\, l^2(v) \cos\psi\,.$$

([24]) Ved. p. es. B. ECKMANN, [2], 3.2, p. 18.

([25]) Invero, come è naturale, dalle definizioni segue subito $A(\mu,\ v) = A(r_1\mu,\ r_2 v)$, $a(\mu,\ v) = a(r_1\mu,\ r_2 v)$ con r_1, $r_2 \in \boldsymbol{R}_+^*$.

Si perviene ormai facilmente alla (27) dividendo i due membri dell'ultima uguaglianza per $l(\mu)\, l(v)$ e tenendo conto delle osservazioni precedenti e della (15).

Dal risultato stabilito discendono poi alcune osservazioni.

La relazione (27) indica che le funzioni $\cos A(\mu, v)$, $\cos a(\mu, v)$, previa eventuale simmetrizzazione della seconda (n. **5**), risultano uguali sui 2-spazi caratteristici. Il teorema $\boldsymbol{T}_{\rm II}$ afferma quindi che, in ipotesi di compatibilità tra le strutture f e c di V, le corrispondenti nozioni di angolo, limitatamente ai 2-spazi caratteristici, sono da ritenersi sostanzialmente equivalenti.

Questa osservazione e la considerazione della (20) del n. **6** permettono ora di dare una formulazione più espressiva alla nozione di compatibilità; precisamente:

$\boldsymbol{T}_{\rm III}$. – *Una struttura quasi complessa c ed una struttura di Finsler f di V sono compatibili, se e solo se inducono sui 2-spazi caratteristici determinazioni metriche equivalenti. Cioè, simbolicamente:*

$$\mathfrak{M}^c|_{h_\xi} = \overset{*}{\mathfrak{M}}{}^f|_{h_\xi} \qquad (\xi \in T_x,\ x \in V)\,. \tag{28}$$

In questa forma, la definizione di compatibilità, con riferimento però alle strutture di Riemann, è stata considerata per la prima volta da E. Martinelli e da lui utilizzata per giungere ad una caratterizzazione delle strutture hermitiane [26]. È immediato riconoscere che la caratterizzazione ora accennata non differisce sostanzialmente dal risultato del n. **7**.

11. - Teorema di invarianza.

È opportuno segnalare ora che la condizione di compatibilità del n. **6** si riflette non soltanto sulle determinazioni metriche di $\overset{*}{\mathfrak{M}}{}^f$ (n. **10**), ma anche su quelle di $\mathfrak{M}^f$, sempre intrinsecamente associate alla struttura di Finsler f, ma dipendenti dalla considerazione di un arbitrario elemento d'appoggio (n. **5**).

Prima di enunciare il risultato, occorre notare che gli isomorfismi J_φ di T_x ($x \in V$), considerati al n. **2**, si possono prolungare canonicamente in isomorfismi dell'anelloide dei tensori, di origine x, non appena si assuma che operino identicamente sugli scalari. Essi costituiscono evidentemente un gruppo, ancora denotato con G_J.

---

[26] Ved. E. Martinelli, [9], n. 14; [10], n. 13; e precedentemente, [8].

Ciò premesso, sussiste il teorema:

$\boldsymbol{T}_{\mathrm{IV}}$. – *Condizione necessaria e sufficiente perchè la struttura di* F i n s l e r *f sia di tipo quasi hermitiano relativamente a c, è che le determinazioni metriche di $\mathfrak{M}^f$ siano invarianti rispetto al gruppo G_J definito dalla struttura quasi complessa c* (n. **2**). *Cioè:*

$$[\mathfrak{M}^f,\ J_\varphi] = \mathfrak{M}^f\, J_\varphi - J_\varphi\, \mathfrak{M}^f = 0 \qquad (J_\varphi \in G_J)\,. \tag{29}$$

La sufficienza si prova così. Dall'ipotesi di invarianza segue in particolare la validità della relazione:

$$\Phi_{x,\xi}(\sigma,\ \tau) = \Phi_{x,J_\varphi\xi}\ (J_\varphi\,\sigma,\ J_\varphi\,\tau)\,, \tag{30}$$

per ogni ξ, σ, $\tau \in T_x$ ed ogni $J_\varphi \in G_J$. Posto allora nella precedente $\sigma = \tau = \xi$ e tenuta presente la (14), si perviene subito alla (21), che assicura la compatibilità delle due strutture.

Per la necessità, tenuto conto delle (12), (13), relative alle determinazioni fondamentali di lunghezza e di angolo per i vettori, tutto si riduce evidentemente a stabilire la relazione (30), che esprime l'invarianza del prodotto scalare. Si riconosce però, senza difficoltà, che la (30) è immediata conseguenza delle condizioni (22) e cioè della compatibilità delle strutture considerate.

Il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{IV}}$ è quindi dimostrato.

Al risultato ottenuto conviene aggiungere qualche osservazione.

Dalla dimostrazione di $\boldsymbol{T}_{\mathrm{IV}}$ appare immediatamente che le condizioni (30), (21) sono equivalenti. Con analogo procedimento si prova che la relazione:

$$\Phi_{x,\xi}(\sigma,\ \tau) = \Phi_{x,J\xi}(J\sigma,\ J\tau) \tag{31}$$

e la relazione (26), ottenute rispettivamente dalle (30), (21) per $\varphi = \pi/2$ e relative al solo isomorfismo fondamentale J, risultano tra loro equivalenti.

In virtù di un risultato del n. **9** si può quindi affermare che, *per le strutture di* R i e m a n n, *le condizioni* (30), (31) *risultano equivalenti. Questo però non è più vero, in generale, per le strutture di* F i n s l e r. In altri termini, nel caso Riemanniano, già la (31) assicura la compatibilità delle strutture; non così nel caso generale.

12. - Proprietà delle $g_{jk}(x,\ \xi)$.

Una prima caratterizzazione delle strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano (n. **7**) a partire dai coefficienti $g_{jk}(x,\ \xi)$ della forma $\boldsymbol{R}$-bilineare simmetrica $\Phi_{x,\xi}$ definita dalla struttura (n. 4), è costituita dalle relazioni (22) del n. **6**. In questo numero è ottenuta una nuova caratterizzazione, analoga ma più espressiva della precedente, la quale nuovamente mostra che le strutture di FINSLER di tipo quasi hermitiano sono diretta generalizzazione delle ordinarie strutture quasi hermitiane.

Al risultato si perviene considerando, in ogni punto x di V, alcune semplici condizioni relative al comportamento dei coefficienti $g_{jk}(x, \xi)$ $(j, k \in \bar{\boldsymbol{I}})$ della forma $\Phi_{x,\xi}$ al variare di ξ in T_x.

Un primo gruppo di condizioni, via via più restrittive, è il seguente:

$\boldsymbol{K}_1$ - $g_{jk}(x, \xi)$ *è costante, in modulo, su ogni 2-spazio caratteristico di* T_x.

$\boldsymbol{K}_2$ - $g_{jk}(x, \xi)$ *è costante su ogni 2-spazio caratteristico di* T_x.

$\boldsymbol{K}_3$ - $g_{jk}(x, \xi)$ *è costante in* T_x.

Denotato poi con σ_ξ il sottoinsieme di h_ξ costituito dai vettori $\eta = r\, J_\varphi\, \xi$ con $r \in \boldsymbol{R}_+$ e $0 \leqslant \varphi < \pi/2$, e sia $M_{\sigma_\xi}(g_{jk})$ *la media dei valori di* $g_{jk}(x, \eta)$ *al variare di* η *in* σ_ξ. In virtù della (11) è:

$$M_{\sigma_\xi}(g_{jk}) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} g_{jk}(x,\ J_\varphi\, \xi)\, d\varphi\,. \tag{32}$$

Si può ora considerare un secondo gruppo di condizioni, precisamente:

$\boldsymbol{M}_1$ - $M_{\sigma_\xi}(g_{jk}) = \varepsilon(j, k)\, g_{jk}(x, \xi) \qquad (\xi \in T_x)$,

$\boldsymbol{M}_2$ - $M_{\sigma_\xi}(g_{jk}) = 0 \qquad (\xi \in T_x)$,

dove $\varepsilon(j, k) = \mp\, 2i/\pi$ per $j, k \in \boldsymbol{I}$ e $j, k \in \bar{\boldsymbol{I}}$ rispettivamente, e $\varepsilon(j, k) = 0$ per $j \in \boldsymbol{I}$, $k \in \bar{\boldsymbol{I}}$ e $j \in \bar{\boldsymbol{I}}$, $k \in \boldsymbol{I}$. Nei primi due casi la condizione $\boldsymbol{M}_1$ è da ritenersi più ampia della $\boldsymbol{M}_2$; negli altri due è evidentemente $\boldsymbol{M}_1 = \boldsymbol{M}_2$.

Ciò premesso, il risultato accenato all'inizio di questo numero è il seguente:

$\boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}$. – *Le condizioni* $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{M}_1$ *per i coefficienti* $g_{pq}(x, \xi)$, $g_{\bar{p}\bar{q}}(x, \xi)$ *e la condizione* $\boldsymbol{K}_2$ *per i coefficienti* $g_{p\bar{q}}(x, \xi)$, $g_{\bar{p}q}(x, \xi)$ $(p, q \in \boldsymbol{I})$, *in ogni punto* x *di* V, *caratterizzano, entro le strutture di Finsler di* V, *quelle di tipo quasi hermitiano* (n. **7**). *In particolare, le condizioni* $\boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{M}_2$ *e la condizione* $\boldsymbol{K}_3$, *per i medesimi coefficienti, caratterizzano le ordinarie strutture quasi hermitiane.*

Rinviando al n. **13** la dimostrazione di $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}$, conviene qui segnalare ancora una proprietà che è immediata conseguenza delle (11), (22).

Se f è una struttura di F i n s l e r *di V, di tipo quasi hermitiano, in ciascun punto $x \in V$ i coefficienti $g_{pq}(x, \xi)$, $g_{\bar{p}\bar{q}}(x, \xi)$ $(p, q \in \boldsymbol{I})$ hanno media nulla al variare di ξ in ogni 2-spazio caratteristico di T_x.*

13. – Per stabilire il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}$ conviene anzitutto notare che la seconda parte dell'asserto è di dimostrazione immediata.

Quando alla prima parte, se f è una struttura di Finsler di tipo quasi hermitiano (n. **7**), sussistono le (22) del n. **6** e da questa discendono senza difficoltà le condizioni $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{M}_1$ e $\boldsymbol{K}_2$ dell'enunciato ([27]).

Occorre ancora mostrare, inversamente, che da queste derivano le (22).

Intanto, è immediato che la condizione $\boldsymbol{K}_2$ per $g_{p\bar{q}}(x, \xi)$, $g_{\bar{p}q}(x, \xi)$ equivale alle relazioni (22), seconda riga ([28]).

La condizione $\boldsymbol{K}_1$ per $g_{pq}(x, \xi)$ permette poi di scrivere

$$g_{pq}(x, J_\varphi \xi) = e^{i\vartheta(\varphi)} g_{pq}(x, \xi) , \tag{33}$$

essendo ϑ una funzione reale di φ (a priori dipendente anche da ξ e dagli indici $p, q \in \boldsymbol{I}$). Le ordinarie ipotesi sulla funzione fondamentale della struttura di Finsler e la definizione (1) degli isomorfismi J_φ assicurano che ϑ è almeno di classe $\mathcal{C}^1$ in φ.

È evidente che, se $g_{pq}(x, \xi) = 0$ la prima delle (22) è soddisfatta. Se invece ciò non accade, dalla (33) segue $\vartheta(0) \equiv 0 \pmod{2\pi}$; si può assumere $\vartheta(0) = 0$ ([29]).

Scelto ora un angolo $\Delta\varphi$, tale che $0 \leqslant \varphi + \Delta\varphi < 2\pi$, poichè $J_{\varphi+\Delta\varphi} = J_{\Delta\varphi} \cdot J_\varphi$, dalla (33) discende

$$\vartheta(\varphi + \Delta\varphi) = \vartheta(\varphi) + \vartheta(\Delta\varphi) .$$

Dividendo poi membro a membro per $\Delta\varphi$ e passando al limite per $\Delta\varphi \to 0$, si ha $\vartheta'(\varphi) = \vartheta'(0) = \beta$ (β costante reale) e successivamente

$$\vartheta = \beta\,\varphi . \tag{34}$$

In virtù delle (32), (33), (34), la condizione $\boldsymbol{M}_1$ relativa a $g_{pq}(x, \xi)$, ora per ipotesi non nullo, implica $\beta \neq 0$ e diviene

$$\int_0^{\pi/2} e^{i\beta\varphi}\,d\varphi = \frac{1}{i\beta}\,(e^{i\beta\pi/2} - 1) = -\,i . \tag{35}$$

([27]) Basta avere presenti le (4), (11).

([28]) Ved. annotazione ([27]).

([29]) Appare dal seguito che una diversa scelta porterebbe in definitiva alle stesse conclusioni.

Ne segue $e^{i\beta\pi/2} = 1 + \beta$, da cui, passando ai moduli, si trova per β il valore -2.

In conclusione la funzione $\vartheta(\varphi)$, considerata nella (33), è precisamente:

$$\vartheta(\varphi) = -2\varphi ,$$

e riesce indipendente da ξ e dagli indici p, q. Di conseguenza la (23) si riduce alla prima delle (22).

In ogni caso dunque, le condizioni $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{M}_1$ per i coefficienti $g_{pq}(x, \xi)$, $g_{\bar{p}\bar{q}}(x, \xi)$, tra loro coniugati, assicurano la validità delle relazioni (22), prima riga.

Il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}$ è quindi dimostrato.

14. - Strutture di Finsler di tipo quasi hermitiano speciali.

Il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{V}}$ del n. **12** suggerisce la considerazione di un insieme di strutture, denotato con $\mathfrak{F}_{H_0}$, più ristretto dell'insieme $\mathfrak{F}_H$ delle strutture di FINSLER di tipo quasi hermitiano, ma più ampio dell'insieme $\mathfrak{H}$ delle ordinarie strutture quasi hermitiane (n. **7**).

Precisamente, una struttura di FINSLER f di V, in cui valgano le condizioni $\boldsymbol{K}_2$, $\boldsymbol{M}_2$ per i coefficienti $g_{pq}(x, \xi)$, $g_{\bar{p}\bar{q}}(x, \xi)$ e la condizione $\boldsymbol{K}_2$ per i coefficienti $g_{\bar{p}q}(x, \xi)$, $g_{p\bar{q}}(x, \xi)$, si dirà *di tipo quasi hermitiano speciale* rispetto alla struttura quasi complessa c di V. In analogia col n. **7**, l'insieme di queste strutture è indicato con $\mathfrak{F}^c_{H_0}$ e si pone $\mathfrak{F}_{H_0} = \bigcup_{c \in \mathfrak{C}} \mathfrak{F}^c_{H_0}$.

È immediato riconoscere che, per una struttura $f \in \mathfrak{F}^c_{H_0}$, sussistono le relazioni:

$$
(36)\qquad
\begin{gathered}
g_{pq}(x, \xi) = g_{\bar{p}\bar{q}}(x, \xi) = 0 , \\
g_{p\bar{q}}(x, J_\varphi\xi) = g_{p\bar{q}}(x, \xi), \quad g_{\bar{p}q}(x, J_\varphi\xi) = g_{\bar{p}q}(x, \xi) ,
\end{gathered}
$$

con $x \in V$, $\xi \in T_x$, $\varphi \in \boldsymbol{\Gamma}$, e viceversa. Le (36), che sono caso particolare delle (20), ma più generali delle (23), indicano che, per ogni x di V ed ogni ξ di T_x, *la forma $\Phi_{x,\xi}$ definita dalla struttura $f \in \mathfrak{F}^c_{H_0}$ è una forma $\boldsymbol{R}$-bilineare simmetrica associata ad una forma hermitiana.*

Questa circostanza, si noti, non si presenta per le strutture di FINSLER di tipo quasi hermitiano *non speciali*, in quanto i coefficienti $g_{pq}(x, \xi)$, $g_{\bar{p}\bar{q}}(x, \xi)$ non risultano in generale nulli, pur avendo media nulla su ogni 2-spazio caratteristico (n. **12**).

Conviene ora segnalare qualche altro risultato.

Si considerino le proprietà:

S– *La funzione* $\cos a(\mu, v)$ *è simmetrica per ogni coppia di vettori* μ, v *non nulli, appartenenti ad un medesimo 2-spazio caratteristico* h_ξ *di* T_x $(x \in V)$.

O– *La funzione fondamentale della struttura di Finsler* (*n.* 4), *soddisfa alla relazione*

$$\frac{1}{2} F_* = \frac{\partial F_*}{\partial \xi^p} \xi^p = \frac{\partial F_*}{\partial \xi^{\bar{p}}} \xi^{\bar{p}} \qquad (p \in \boldsymbol{I}), \tag{37}$$

con $x \in V$ *e* $\xi \in T_x$.

È noto che, non appena dim. $V = 2n > 2$, la condizione analoga alla *S*, con riferimento però ad ogni coppia di vettori σ, τ dello spazio tangente T_x $(x \in V)$, implica che la struttura di FINSLER (di tipo quasi hermitiano) è addirittura una struttura di RIEMANN (quasi hermitiana) (30).

La (37) rappresenta invece un rafforzamento della ordinaria ipotesi di positiva omogeneità di grado uno della funzione fondamentale, espressa dalla relazione (10), e può riguardarsi come una condizione di *positiva omogeneità isotropa* di grado un mezzo, in quanto distingue, tra le componenti isotrope ξ^p, $\xi^{\bar{p}}$ del vettore ξ variabile in T_x, quelle ordinarie da quelle coniugate.

Ciò premesso, sussistono i teoremi:

T_{VI}. – *Una struttura di Finsler avente le proprietà* ***S*** *ed* O *è necessariamente di tipo quasi hermitiano.*

T_{VII}. – *Una struttura di Finsler di tipo quasi hermitiano speciale ha le proprietà* ***S*** *ed* O.

15. – Prima di iniziare le dimostrazioni conviene osservare che, in ogni punto x di V, la condizione ***S*** si traduce nella relazione:

$$\Phi_{x,\mu}(\mu, v) = \Phi_{x,v}(v, \mu), \tag{38}$$

per vettori μ, v non nulli di uno stesso 2-spazio caratteristico di T_x; mentre la O equivale alla relazione:

$$g_{pq}(x, \xi)\, \xi^p = g_{\bar{p}\bar{q}}(x, \xi)\, \xi^{\bar{p}} = 0 \qquad (p, q \in \boldsymbol{I}) \tag{39}$$

per ogni $\xi \in T_x$.

L'equivalenza tra la condizione ***S*** e la (38), nelle ipotesi precisate per μ e v, è immediata conseguenza della (15) del n. **5**. L'equivalenza tra la condizione O e la (39) si prova invece così. Nella ipotesi O le funzioni $\dfrac{\partial F_*^2}{\partial \xi^q}$, $\dfrac{\partial F_*^2}{\partial \xi^{\bar{q}}}$

(30) Cfr. p. es. H. RUND, [15], annotazione (1), p. 26; e il n. **7**.

risultano positivamente omogenee di grado zero nelle variabili ξ^p, $\xi^{\bar p}$ $(p, q \in \boldsymbol{I})$ rispettivamente. Da ciò, tenuta presente la (8), segue subito la (39). Viceversa la positiva omogeneità di grado uno della F_*, nelle $2n$ variabili ξ^p, $\xi^{\bar p}$ (n. 4), permette di applicare il teorema di Eulero alle funzioni $\dfrac{\partial F_*^2}{\partial \xi^q}$ e $\dfrac{\partial F_*^2}{\partial \xi^{\bar q}}$ (31). È immediato allora riconoscere che, in virtù della (39), le quantità in parentesi a secondo membro della (10) sono ugali. Sussiste quindi la (37) e cioè la proprietà O.

È ormai facile provare i teoremi $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VI}}$ e $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VII}}$.

Se μ, v sono vettori non nulli, appartenenti ad uno stesso 2-spazio caratteristico, risulta:

$$\mu = m\, J_\psi\, v\,, \qquad v = m^{-1}\, J_{2\pi-\psi}\, \mu\,,$$

con $m \in \boldsymbol{R}_+^*$ e $\psi \in \boldsymbol{\Gamma}$ univocamente determinati (n. 3).

Dalle (3), $(6)_1$, $(6)_2$ segue poi immediatamente:

$$L(\mu) = m\, L(J_\psi v) = m\, L(v)\,. \tag{40}$$

D'altra parte, tenuto conto delle (9), (14), in virtù della proprietà O, espressa dalla (39), risulta subito:

$$\begin{aligned} \Phi_{x,\mu}(\mu,\ v) &= 2m^{-1}\cos\psi .\ \Phi_{x,\mu}(\mu,\ \mu) = 2m^{-1}\, l^2(\mu)\cos\psi, \\ \Phi_{x,v}(v,\ \mu) &= 2m\cos\psi .\ \Phi_{x,v}(v,\ v) = 2m\, l^2(v)\cos\psi\,. \end{aligned} \tag{41}$$

Dalla proprietà $\boldsymbol{S}$, espressa dalla (38), segue allora (32):

$$l(\mu) = m\, l(J_\psi\, v) = m\, l(v)\,. \tag{42}$$

Il confronto delle (40), (42) conduce alla condizione di compatibilità (19) e pertanto il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VI}}$ è dimostrato.

Conviene ora osservare che l'ipotesi di $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VII}}$, espressa dalla (36), assicura immediatamente la validità delle (39) e cioè della proprietà O. Per i vettori μ, v, in virtù della dimostrazione precedente, sussistono quindi le (41).

D'altro canto, poichè la struttura in considerazione è di tipo quasi hermitiano, a causa della condizione di compatibilità (19), dalla (40) segue la (42).

---

(31) Il teorema sussiste ovviamente anche in relazione alla derivazione formale (annotazione (14), n. 4).

(32) Nei casi $\psi = \pi/2$, $3\pi/2$ il risultato si ottiene per continuità.

In conclusione sono uguali i secondi membri della (41) e quindi sussiste la (38) e cioè la proprietà $\boldsymbol{S}$.

Il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VII}}$ è così dimostrato.

16. - Teorema fondamentale.

Dopo aver ottenute varie proprietà delle strutture di FINSLER di tipo quasi hermitiano (nn. **8-15**) è opportuno segnalare un risultato, che pone in relazione l'insieme $\mathfrak{F}_H$ di queste strutture con l'insieme $\mathfrak{F}$ delle strutture di FINSLER generali. Precisamente, sussiste il teorema:

$\boldsymbol{T}_{\mathrm{VIII}}$. – *Su di una varietà V, dotata di struttura quasi complessa c, esiste una applicazione idempotente (proiezione)*

$$\omega^c : \quad \mathfrak{F} \to \mathfrak{F}_H \,, \tag{43}$$

cioè, a partire da una qualunque struttura di Finsler di V è possibile costruirne una nuova, compatibile con la struttura quasi complessa considerata.

Per stabilire $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VIII}}$ si procede così.

Indicata con f una struttura di $\mathfrak{F}$ e con $F(x, \xi)$ la relativa funzione fondamentale (n. **4**), si consideri *la funzione reale non negativa* $\widehat{F}(x, \xi)$ implicitamente definita, in ogni punto x di V e per ogni vettore ξ di T_x, dalla uguaglianza

$$\widehat{F}^2 (x, \xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F^2(x, J_\varphi \xi) \, d\varphi \,. \tag{44}$$

Tenuta presente la relazione di equivalenza R_c determinata in T_x dalla struttura quasi complessa di V (n. **3**), è immediato rilevare che *$\widehat{F}(x, \xi)$ è la media quadratica della funzione $F(x, \vartheta)$ al variare di ϑ nella classe $[\xi] \in T_x/R_c$.*

Conviene ora dimostrare che *$\widehat{F}(x, \xi)$ può riguardarsi come funzione fondamentale di una nuova struttura di Finsler $\widehat{f}$.* Invero, la positiva omogeneità di grado uno di $\widehat{F}(x, \xi)$ rispetto a ξ discende subito dalla corrispondente proprietà di $F(x, \xi)$ e dalla (44). È poi immediato che, se $\widehat{F}(x, \xi) = 0$, la (44) implica $F(x, J_\varphi \xi) = 0$ $(\varphi \in \boldsymbol{\Gamma})$ cioè $\xi = 0$; e viceversa. Dunque $\widehat{F}(x, \xi)$, come $F(x, \xi)$, è funzione reale non negativa, nulla se e solo se $\xi = 0$. Infine, con le notazioni del n. **4**, dalla (44), tenuta presente la (1), segue:

$$\widehat{\Phi}_{x,\xi}(\varrho, \varrho) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Phi_{x,J_\varphi \xi}(J_\varphi \varrho, J_\varphi \varrho) \, d\varphi \qquad (\in T_x) \,.$$

Fissati allora x in V e ξ in T_x, poichè per ogni $\varphi \in \boldsymbol{\Gamma}$ la funzione integranda, al variare di ϱ in T_x, è sempre non negativa e riesce nulla se e solo se $J_\varphi \varrho = 0$, cioè per $\varrho = 0$, la forma quadratica a primo membro risulta definita positiva. È così provato l'asserto.

Ciò premesso, in virtù dell'accennato significato di media, $\widehat{F}(x, \xi)$ dipende soltanto dalla classe $[\xi] \in T_x/R_c$ e non dal particolare rappresentante scelto in essa; risulta quindi $\widehat{F}(x, \xi) = \widehat{F}(x, J_\psi \xi)$ per ogni $\psi \in \boldsymbol{\Gamma}$ (33).

È dunque soddisfatta la condizione di compatibilità (21) del n. **6** e pertanto *la struttura di Finsler* $\widehat{f}$ *è di tipo quasi hermitiano.*

Infine, dalla (44) appare immediatamente che l'applicazione ω^c: $f \to \widehat{f}$ è idempotente, cioè $\omega^c \circ \omega^c = \omega^c$.

Il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VIII}}$ è quindi dimostrato.

In particolare, se f è una struttura di RIEMANN, la corrispondente $\widehat{f}$, a causa del risultato ottenuto al n. **7**, è una ordinaria struttura quasi hermitiana ed il teorema $\boldsymbol{T}_{\mathrm{VIII}}$ si riduce ad un noto risultato di A. LICHNEROWICZ (34).

17. - Osservazioni ed esempi.

I nn. **17**, **18** sono essenzialmente dedicati alla costruzione di un esempio significativo di struttura di FINSLER di tipo quasi hermitiano (n. **7**).

Si assuma come varietà V (n. **2**) lo spazio reale $\boldsymbol{R}^{2n}$ sottogiacente allo spazio complesso $\boldsymbol{C}^n$, con la topologia ordinaria (35) e si considerino su V le funzioni reali non negative $D_{(m)}(\xi)$ $(\xi \in T_x,\ x \in V,\ m \in \boldsymbol{N}^*)$, rappresentate in componenti isotrope ξ_p, $\overline{\xi}_p$, $(p \in \boldsymbol{I})$ (n. **4**) (36) da:

$$(45) \qquad \underset{(m)}{D_*}(\xi_p, \overline{\xi}_p) = \left(\sum_{q \in I} \left(\frac{\xi_q + \overline{\xi}_q}{2} \right)^m + \left(\frac{\xi_q - \overline{\xi}_q}{2i} \right)^m \right)^{\frac{1}{m}} \quad (37) .$$

Ciò premesso, *la funzione reale non negativa* $F(\xi)$, *definita implicitamente dalla uguaglianza*

$$(46) \qquad F^2_*(\xi_p, \overline{\xi}_p) = \underset{(2)}{D^2_*}(\xi_p, \overline{\xi}_p) + \underset{(4)}{D^2_*}(\xi_p, \overline{\xi}_p) ,$$

determina su V *una struttura di Finsler* (n. **4**) (38) .

(33) A questa relazione si perviene anche direttamente, considerando l'integrale, nella φ, che definisce $\widehat{F}(x, J_\psi \xi)$, e notando che, a causa della (1), per $0 \leq \varphi < 2\pi - \psi$ è $J_\psi \circ J_\varphi = J_{\psi+\varphi}$, mentre per $2\pi - \psi \leq \varphi < 2\pi$ è $J_\psi \circ J_\varphi = J_{2\pi-(\psi+\varphi)}$.

(34) A. LICHNEROWICZ, [6], n. 14, p. 114; [7], p. 210. In virtù della (2) e delle proprietà elementari delle forme quadratiche la (44) diviene semplicemente $\widehat{F}^2(x, \xi) = \frac{1}{2} [F^2(x, \xi) + F^2(x, J\xi)]$.

(35) V è evidentemente dotata di struttura complessa.

(36) Per evitare confusione tra indici ed esponenti, si scrive ora ξ_p, $\overline{\xi}_p$ in luogo di ξ^p, $\xi^{\overline{p}}$ (n. **2**).

(37) Le potenze frazionarie che intervengono nel seguito vanno sempre considerate in $\boldsymbol{R}_+$.

(38) Essa è precisamente una struttura di MINKOWSKI (F è indipendente dal punto x di V). Ved. H. RUND, [**15**], p. 12.

Infatti, dalle (45), (46) segue immediatamente che $F(\xi)$ è funzione positivamente omogenea, di grado uno, del vettore $\xi \in T_x$ ed è funzione reale non negativa, nulla se e solo se $\xi = 0$.

Passando poi nella (46) alle derivate seconde, per le forme quadratiche corrispondenti alle funzioni $F(\xi)$, $D_{(2)}(\xi)$, $D_{(4)}(\xi)$, (n. 4) si ottiene la relazione:

$$\Phi_\xi(\varrho, \varrho) = \underset{(2)}{\Delta_\xi}(\varrho, \varrho) + \underset{(4)}{\Delta_\xi}(\varrho, \varrho) \qquad (\varrho \in T_x) .$$

Ora, per ogni $x \in V$ ed ogni $\xi \in T_x$, $\underset{(2)}{\Delta_\xi}(\varrho, \varrho) = \sum \varrho_p \bar{\varrho}_p$ è evidentemente definita positiva. D'altro canto, non è difficile dimostrare che $\underset{(4)}{\Delta_\xi}(\varrho, \varrho)$ è semidefinita positiva ([39]). In conclusione $\Phi_\xi(\varrho, \varrho)$ risulta definita positiva. È quindi provato l'asserto.

La struttura di FINSLER ottenuta dà luogo ad alcune osservazioni.

Anzitutto, sono immediate le relazioni:

$$(47) \qquad \underset{(2)}{D_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) = (\sum \xi_q \bar{\xi}_q)^{\frac{1}{2}}, \qquad \underset{(4)}{D_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) = 2^{-\frac{3}{4}}(\sum \xi_q^4 + \bar{\xi}_q^4 + 6\, \xi_q^2\, \bar{\xi}_q^2)^{\frac{1}{4}}$$

utili nel seguito.

Si considerino poi le uguaglianze

$$(48) \qquad D_{(2)}(J_\varphi\, \xi) = D_{(2)}(\xi), \qquad D_{(4)}(J_\varphi\, \xi) = D_{(4)}(\xi) ,$$

con $\xi \in T_x$ arbitrariamente fissato.

Ora, dalle (1), (47) discende immediatamente che, mentre la $(48)_1$ sussist per ogni $\varphi \in \Gamma$, ciò non avviene per la $(48)_2$, soddisfatta per $\varphi = \pi/2$, ma non ad es. per $\varphi \equiv \pi/4$.

In conclusione, tenuta presente la (46), *per la funzione fondamentale* $F(\xi)$ *sussiste la* (26) *ma non la* (21); pertanto la corrispondente struttura di FINSLER non è di tipo quasi hermitiano. Riesce così dimostrata una affermazione del n. **9**.

18. – Il procedimento indicato al n. **16** permette ora di costruire una nuova struttura di FINSLER, a partire da quella considerata al numero precedente.

La nuova funzione fondamentale $\widehat{F}(\xi)$ si ottiene da $F(\xi)$ mediante la (44). Precisamente, indicata con $\widehat{D}_{(m)}(\xi)$ la funzione ottenuta in modo analogo da

---

([39]) Al risultato si perviene ponendo $\xi_p = X_p + i\, X_{n+p}$, $\varrho_p = R_p + i\, R_{n+p}$ ($X_s, R_s \in \mathbf{R}$; $s = 1, \ldots, 2n$) e utilizzando il teorema di BINET. Per $n = 1$ cfr. p. es. H. RUND, [**15**], p. 17 e p. 8.

$D_{(m)}(\xi)$ $(m = 2, 4)$, con riferimento alle coordinate isotrope ξ_p, $\bar{\xi}_p$ $(p \in \boldsymbol{I})$, può scriversi

$$\widehat{F}^2_*(\xi_p, \bar{\xi}_p) = \underset{(2)}{\widehat{D}^2_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) + \underset{(4)}{\widehat{D}^2_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) . \tag{49}$$

Ora, dalla validità della $(48)_1$ per ogni $\varphi \in \boldsymbol{\Gamma}$ (n. **17**) segue immediatamente

$$\underset{(2)}{\widehat{D}^2_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) = \underset{(2)}{D^2_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) . \tag{50}$$

D'altra parte, posto

$$\begin{aligned} &\xi_q = r_q\, e^{it_q}, && \sum \xi_q^4 = r\, e^{it}, \\ &\sum \xi_q \bar{\xi}_q = \sum r_q^2 = s, && \sum (\xi_q \bar{\xi}_q)^2 = \sum r_q^4 = S, \end{aligned} \tag{51}$$

con r_q, r, s, $S \in \boldsymbol{R}_+$; t_q, $t \in \boldsymbol{\Gamma}$ $(q \in \boldsymbol{I})$ e, tenuto conto della (47), si ha

$$\underset{(4)}{\widehat{D}^2_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) = \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} (r \cos(4\varphi + t) + 3S)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi .$$

Poichè la funzione integranda è periodica (periodo $\pi/2$), l'integrale riesce indipendente da t (può quindi assumersi $t = 0$) e l'uguaglianza precedente diviene

$$\underset{(4)}{\widehat{D}^2_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (3S + r \cos 4\varphi)^{\frac{1}{2}}\, d\varphi . \tag{52}$$

Posto quindi $\psi = 2\varphi$, può scriversi

$$\underset{(4)}{\widehat{D}^2_*}(\xi_p, \bar{\xi}_p) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (3S + r \cos 2\psi)^{\frac{1}{2}}\, d\psi = \frac{(3S + r)^{\frac{1}{2}}}{2\pi} \int_0^{\pi} \left(1 - \frac{2r}{3S + r} \sin^2 \psi\right)^{\frac{1}{2}} d\varphi .$$

Infine, indicando con $E(k)$ *l'integrale ellittico completo di seconda specie* di modulo $k < 1$ [40] e notando che dalle (51) segue subito $r \leqslant S$ onde

[40] Ved. p. es. A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, [3], pp. 300 e 314.

$\left(\dfrac{2r}{3S+r}\right)^{\frac{1}{2}} < 1$, si perviene alla relazione

$$\widehat{\underset{(4)}{D}}{}^2_*(\xi_p,\ \bar{\xi}_p) = \frac{1}{\pi}\,(3S+r)^{\frac{1}{2}}\,E\left(\left(\frac{2r}{3S+r}\right)^{\frac{1}{2}}\right). \tag{53}$$

A questo punto, dalle (49), (50), (53) discende immediatamente la conclusione.

La funzione fondamentale $\widehat{F}(\xi)$ *è implicitamente definita dalla uguaglianza*

$$\widehat{F}{}^2_*(\xi_p,\ \bar{\xi}_p) = s + \frac{1}{\pi}\,(3S+r)^{\frac{1}{2}}\,E\left(\left(\frac{2r}{3S+r}\right)^{\frac{1}{2}}\right), \tag{54}$$

e dipende soltanto dalle quantità non negative r, s, S *introdotte nella* (51).

In virtù delle osservazioni del n. **16**, il procedimento seguito assicura poi che *la corrispondente struttura di Finsler è di tipo quasi hermitiano* (anzi *di tipo hermitiano*, in quanto V è addirittura una varietà complessa).

È bene però segnalare esplicitamente che, per $n \geqslant 2$, la struttura ottenuta *non è speciale* (n. **14**); essa quindi, a fortiori, *non rientra fra le ordinarie strutture hermitiane* (41).

La costruzione dell'esempio, di cui all'inizio del n. 17, è dunque terminata.

Bibliografia.

[1] H. Behnke, P. Thullen, *Theorie der Funktionen mehrerer komplexer Veränderlichen*, Ergebnisse der Math. **3**, 3, (1934).

[2] B. Eckmann, *Cours sur les variétés complexes*, Centro Int. Mat. Estivo (C.I.M.E.), Cremonese, Roma, 1956.

[3] A. Erdelyi, W. Magnus, F. Oberhettinger, F. G. Tricomi, *Higher Transcendental Functions*, Vol. **2**, McGraw-Hill, New York 1953.

[4] H. Guggenheimer, *Geometria psuedokähleriana*, II, Rend. Lincei **15** (1953).

[5] H. Guggenheimer, *Topologia differenziale delle trasformazioni cremoniane e delle riemanniane di funzioni di più variabili complesse*, Convegno Int. Geometria Differenziale, Italia 1953.

---

(41) Si consideri la derivata seconda di $\widehat{F}{}^2_*$ rispetto a ξ_1 ed a ξ_2, la quale si riduce alla analoga derivata di $\widehat{\underset{(4)}{D}}{}^2_*$ e pertanto può valutarsi ad es. partendo dalla (52). In corrispondenza ai vettori ξ di componenti $\xi_1 = \bar{\xi}_1 = \pm 1$, $\xi_2 = \bar{\xi}_2 = 1$, $\xi_q = \bar{\xi}_q = 0$ $(q = 3, 4, \ldots, n)$, si ottengono valori non nulli ed opposti della derivata. Ciò prova l'asserto.

[6] A. LICHNEROWICZ, *Généralization de la Géométrie Kählérienne globale*, C.B.R.M., Colloque de Géométrie Différentielle, Louvain 1951.

[7] A. LICHNEROWICZ, *Théorie globale des connexion et des groupes d'holonomie*, Cremonese, Roma 1955.

[8] E. MARTINELLI, *Qualche proprietà geometrica delle varietà a struttura complessa*, Atti Accad. Ligure **9** (1953).

[9] E. MARTINELLI, *Punti di vista geometrici nello studio delle varietà a struttura complessa*, Centro Int. Mat. Estivo (C.I.M.E.), Cremonese, Roma 1956.

[10] E. MARTINELLI, *Sulle varietà a struttura complessa*, Ann. Mat. Pura Appl. **43** (1957).

[11] G. B. RIZZA, *Su diverse estensioni dell'invariante di E. E. Levi nella teoria delle funzioni di più variabili complesse*, Ann. Mat. Pura Appl. **44** (1957).

[12] G. B. RIZZA, *Deviazione caratteristica e proprietà locali delle 2q-faccette di una V_{2n} a struttura complessa*, Rend. Acc. Naz. XL **10** (1959).

[13] G. B. RIZZA, *Finsler structure on almost complex manifolds*, Int. Math. Congress, Stockholm, aug. 1962.

[14] G. B. RIZZA, *Strutture di Finsler sulle varietà quasi complesse*, Rend. Accad. Lincei **33** (1962).

[15] H. RUND, *The differential geometry of Finsle spaces*, Springer, Berlin 1959.

[16] F. SEVERI, *Lezioni sulle funzioni analitiche di più variabili complesse*, C.E. D.A.M., Padova 1958.

* * *