Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 57 - 81

ALDO BRESSAN (*)

Termo - magneto - fluido - dinamica in Relatività generale. Gas perfetti. (**)

1. - Introduzione.

Pongo le basi di una teoria fisicamente accettabile (1) di termo-magneto-fluido-dinamica in relatività generale per fluidi eventualmente viscosi e nei quali si consideri la conduzione del calore. Tra l'altro relativizzo una generalizzazione dell'ipotesi di FOURIER indicata da C. CATTANEO (2) [cfr. annotazione (17) e 2, annotazione (8)].

Considero sia il caso omogeneo — come si fa usualmente (cfr. [7], [8], [9], [11], [12] e [13]) — che quello inomogeneo. In corrispondenza a ciascuno di essi considero, tra l'altro, un quadro completo delle equazioni inerenti al problema interno di CAUCHY e verifico che, per certe opportune scelte delle funzioni incognite, il numero delle equazioni eguaglia quello delle incognite.

Posto il 2° principio della termodinamica, in armonia con trattazioni classiche a base termodinamica definisco i fluidi perfetti [Def. 7.1] e poi li caratte-

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Padova, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 7 del Comitato Nazionale per la Matematica del C.N.R., per l'anno accademico 1962-1963.

Ricevuto il 27-V-1963.

(1) Dico che la teoria relativistica T_r è fisicamente accettabile se, al tendere all'infinito della velocità c della luce nel vuoto, le equazioni fondamentali di T_r tendono, in senso opportuno, a equazioni classiche, almeno riguardo a campi in cui queste sono verificate dall'esperienza con buona approssimazione [cfr. 2, annotazione (3)]. Non mi sembra siano accettabili in tal senso le precedenti teorie di termo-fiuido-dinamica in relatività generale di mia conoscenza [cfr. più avanti].

(2) Come in [3] indico ad esempio il n. 3, la annotazione (2) e la formula (32) contenuti nel lavoro [7] ordinatamente con [7 n. 3], [7 annotazione (2)] e [7 (32)].

rizzo [Teor. 7.1] sostanzialmente come i materiali di un certo tipo a priori molto generale, i quali verificano i primi due principi della termodinamica (3).

Inoltre, con un metodo molto simile all'analogo classico, nel caso adiabatico ed isoentropico determino [n. 9] la velocità V di propagazione di onde acustiche e la confronto con la velocità classica (4) $V^{(c)}$, senza usare la corrispondente teoria dei materiali elastici in senso lato svolta in (5) [2] e [3].

In Fisica classica l'equazione dei gas perfetti si può scrivere nella forma (6) $p = RTk$ ove k è la densità e quindi è inversamente proporzionale al rapporto fra il volume dC occupato attualmente da una porzione elementare dp del

---

(3) Tale impostazione della teoria dei fluidi perfetti è in armonia precisamente con la trattazione (classica) fattane in [15] (cfr. p. 117). Però rispetto a questa essa ha, mi sembra, un certo carattere di novità che conserva anche dopo esser stata trasportata alla Fisica classica.

La Def 7.1 e il Teor. 7.1 vanno accostati a [2, Def. 20.1] e [2, Teor. 21.1], ove ci si riferisce a materiali elastici in senso lato.

Anche l'enunciato del 2° principio della termodinamica per fluidi eventualmente viscosi dato al n. 7 va accostato a quello dato in [2, n. 19].

(4) La velocità V di propagazione, nel caso suddetto, è sostanzialmente calcolata anche in [9] p. 43. Nel presente lavoro ne dò un'espressione differente [cfr. (57)] permessa sostanzialmente dall'aggiunta di un'equazione costitutiva [cfr. (54)] involgente la densità convenzionale k, all'equazione $\varrho = \varphi(p)$ usata in [9] ed involgente la densità propria vera $c^{-2}\varrho$ ove c è la velocità della luce nel vuoto [cfr. $(6)_2$ con $w = \tilde{w}(T, k)$].

Appunto la suaccennata espressione di V permette un confronto con l'analoga velocità classica $V^{(c)}$, precisamente si trova $V = V^{(c)}/\sqrt{1 + p\varrho^{-1}}$ [cfr. 3 (37)], come nel caso di materiali elastici in senso lato [cfr. annotazione (3)].

In [11] p. 183, si fa un calcolo della velocità di propagazione relativistica delle onde acustiche nei fluidi riferendosi, in particolare, al caso adiabatico. Però si suppongono continue le derivate prime della temperatura cosicchè si ottiene lo stesso risultato che nel caso isotermo, come si riconosce facendo tendere a $+\infty$ la velocità c della luce nel vuoto. Ciò, spesso, non è in buon accordo con l'esperienza [cfr. [14] p. 144].

(5) In base a conclusioni tratte al n. 10 si possono trasportare ai fluidi perfetti vari risultati ottenuti in [3] per materiali elastici in senso lato, fra cui appunto la suddetta relazione tra V e $V^{(c)}$ [cfr. annotazione (4)]. Sebbene, quando siano già acquisiti i lavori [1] e [2], quella seguita al n. 10 sia la più breve via per arrivare alla detta relazione, tuttavia la sopraddetta sua deduzione diretta, pure relativamente breve e indipendente dai lavori [1] e [2], è molto opportuna dato che così si evitano molto complesse considerazioni cinematiche e dinamiche, di tipo lagrangiano [cfr. [1], [2]].

La suddetta deduzione diretta contribuisce a mettere in luce le differenze d'impostazione che la presente teoria di termo-fluido-dinamica ha rispetto a quella di Pham Mau Quan svolta in [11], [12] e [13] e, sia pur in minore misura e senza contrasti, rispetto a quella considerata in [9].

(6) Tale equazione si scrive pure $pV = RT$. In relatività il peso molecolare si può definire, come nella teoria classica, prescindendo dallo stato (T^*, p^*) di riferimento, ma dipende da T^* e p^* il concetto di mole e quindi pure il valore della costante universale R dei gas [n. 8].

fluido che si considera e quella dC^* da essa occupata nello stato (T^*, p^*) di riferimento $[k = k^* \, dC^*/dC]$. In tal senso uso largamente la variabile k in relatività — chiamiamola *densità (propria) convenzionale* — e ciò determina già uno spontaneo procedimento di relativizzazione della equazione $p = RTk$. Un altro di tali procedimenti si ottiene sostituendo la densità classica k con la densità relativistica propria (vera) $c^{-2}\varrho$ ove c è la velocità della luce nel vuoto.

In Fisica classica si usa una certa caratterizzazione (cfr. [**15**], p. 119) dei gas perfetti a base termodinamica, la quale tra l'altro rispecchia, mi sembra, proprietà più essenziali che non la $p = RTk$. Mi è sembrato interessante mostrare [n. **8**] che applicando a tale caratterizzazione i due suddetti procedimenti si ottengono risultati equivalenti e che da questi segue la $p = RTk$ con k densità convenzionale. Naturalmente, in base a quanto precede ritengo quest'ultima l'equazione relativistica dei gas perfetti [cfr. annotazione (6)].

Le considerazioni fatte ai nn. **8**, **9** sui gas perfetti relativistici, specialmente quelle connesse con le onde sonore, avvalorano, mi sembra, certi precedenti apprezzamenti della correzione relativistica alla velocità di propagazione ([**3**], annotazione (5)).

Infine, basandomi essenzialmente sui lavori [**1**] e [**2**] di cinematica e dinamica relativistica dei sistemi continui, fatti prevalentemente da un punto di vista lagrangiano, mostro come, in analogia al caso classico, i fluidi eventualmente viscosi qui considerati siano particolari materiali viscoelastici [cfr. **2**] e i fluidi perfetti particolari materiali elastici in senso lato [**2**, Def. 20.1] il che permette un rapido trasporto ai fluidi perfetti di vari risultati conseguiti in [**2**] e [**3**] [cfr. annotazione (5)].

Si potrebbe forse pensare che i risultati ottenuti in questo lavoro, a parte quelli concernenti i gas perfetti, siano sostanzialmente contenuti in [**2**] e che per stabilirli sarebbe bastato scrivere l'ultimo paragrafo del presente lavoro. A tal proposito si osservi invece che, in primo luogo, anche se riconducendosi a [**2**] qualcuno dei suddetti risultati (7) si può ottenere rapidamente, tuttavia sono molto opportuni i procedimenti euleriani usati nel presente lavoro, in quanto indipendenti dalle complesse considerazioni, prevalentemente di tipo lagrangiano, insite in [**1**] e [**2**] [cfr. annotazione (5)]. In secondo luogo il problema fondamentale di termo-magneto-fluido-dinamica qui considerato è quello di scegliere: a) un sistema di equazioni completo, opportuno e fisicamente accettabile; b) un sistema ragionevole di dati costituitivi (funzioni, tra l'altro, indipendenti dalle contingenze dei fatti); c) alcuni opportuni sistemi

(7) Si tratta sostanzialmente della sopra detta relazione fra V e $V^{(c)}$ e delle differenze fra l'equazione relativistica della conduzione del calore e quella classica, differenze solo parzialmente rilevate dagli Autori precedenti. [cfr. annotazione (19)].

D'altro canto si porta qualche complemento a [2] [cfr. annotazione (20)].

di funzioni incognite (dipendenti dalle contingenze dei fatti) in modo che il numero di queste eguagli quello delle equazioni (a tal riguardo considero sia il caso omogeneo che quello inomogeneo).

È ben noto, in Fisica classica, che riguardo ai fluidi il punto di vista lagrangiano è malagevole e decisamente inopportuno, specialmente se si tratta di fluidi perfetti (8). In armonia con ciò, ad esempio le equazioni, i dati e le funzioni incognite inerenti al suaccennato problema di CAUCHY per fluidi, considerato al n. **6**, non rientra affatto come caso particolare dell'analogo problema di CAUCHY per i materiali visco-elastici considerati in [2], ma va considerato come un problema differente (9).

Naturalmente di tali sensibili differenze risentono alquanto pure le considerazioni preliminari svolte nei nn. **2**, **3**, **4**. Fra l'altro, sebbene questa teoria sia fatta sostanzialmente secondo lo stesso punto di vista di [2] — dal che fra l'altro essa è convalidata — tuttavia l'impostazione autonoma di essa, fatta al n. **2** da un punto di vista rigorosamente euleriano, appare, mi sembra, tutt'altro che banale dal punto di vista concettuale anche dopo aver letto i lavori [**1**] e [**2**] sui materiali visco-elastici.

Dopo i primi saggi di EINSTEIN e PLANCK (cfr. [**11**], p. 121) sul comportamento delle grandezze termodinamiche di fronte al gruppo di LORENTZ, sono apparse altre ricerche miranti a stabilire le equazioni del fluido termodinamico sia in relatività ristretta (C. ECKART) che in relatività generale (D. VAN DANTZIG). VAN DANTZIG si è limitato ai cosidetti fluidi perfettamente perfetti [cfr. [**17**]]. Solo C. ECKART ha introdotto la conduzione del calore in modo simmetrico nel tensore d'impulso energia. In [**11**, p. 122] si aggiunge, riferendosi a C. ECKART, « Malheureusement, sa généralisation de l'hypothèse de conduction de FOURIER se revèle fort peu naturelle: la temperature y est présente elle-même, à coté de ses dérivées. En fait, aucun de ces auteurs n'a effectivament utilisé l'équation de conduction ».

PHAM MAU QUAN, costruisce una teoria del fluido termodinamico in relatività generale in assenza di campo elettromagnetico [cfr. [**11**], [**13**]] e in presenza di esso [cfr. [**12**]] usando, in contrasto con gli Autori precedenti, un certo principio di continuità del calore.

---

(8) Uno stato di pura pressione è rappresentato da un tensore euleriano isotropo $X^{rs} = p\,\delta^{rs}$ mentre in generale non sono tali nè il tensore di KIRCHHOFF $K^{rm} = \mathfrak{D}^{-1} p\, \partial y^l / \partial x^m$ nè quello (completamente) lagrangiano $Y^{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}^{-1} p\ \delta^{rs} \dfrac{\partial y^\varrho}{\partial x^r} \dfrac{\partial y^\sigma}{\partial x^s}$ ove $\mathfrak{D}$ è lo jacobiano della trasformazione $x^r = x^r(y^1, y^2, y^3)$ fra le coordinate di riferimento y^ϱ e quelle attuali x^r [cfr. annotazione (23)].

(9) Fra l'altro, per i fluidi vi è, in più, una funzione incognita (la densità convenzionale k) e un'equazione (quella di continuità).

A mio avviso, specialmente a causa di tale principio la suddetta teoria svolta in [**11**], [**12**] e [**13**] è fisicamente inaccettabile [cfr. annotazione (1)], in generale, per certi suoi tre aspetti (10). Mi sembra che in base a questi, tale teoria sia da ritenersi in accordo con l'esperienza solo in alcuni casi particolari quali quello adiabatico [cfr. **2**, n. 1].

Non sembrandomi dunque che attualmente esista qualche teoria di termo-fluido-dinamica in relatività generale che sia fisicamente accettabile [cfr. annotazione (1)], ho ritenuto opportuno riprendere la questione alla base e in modo conforme al lavoro [**6**] di C. ECKART (relatività ristretta) che ritengo soddisfacente.

Riguardo alle differenze del presente lavoro rispetto a quelli [**11**], [**12**] e [**13**] di fluido-dinamica da un lato e rispetto alla pubblicazione [**2**] di visco-elasticità, fatta secondo gli stessi criteri del presente lavoro dall'altro, ha interesse, mi sembra, specialmente l'impostazione e il suaccennato quadro delle equazion i fondamentali e in particolare l'uso di equazioni costitutive involgenti la densità propria convenzionale k [cfr. annotazione (24)].

2. - Preliminari. Massa convenzionale ed energia interna. Equazioni costitutive nel caso di un fluido viscoso.

Considero nel cronotopo U — insieme di punti eventi — una metrica cronometrica [cfr. **16**; p. 107 e **1** n. 2] $ds^2 = g_{LM}\, dx^L\, dx^M$ localmente riducibile alla forma $\delta'_{LM}\, d\bar{x}^L\, d\bar{x}^M$, ove (11):

$$\delta'_{lm} = -\,\delta_{lm}\,, \qquad \delta'_{0L} = \delta'_{L0} = \delta_{0L}\,, \tag{1}$$

con δ_{LM} simbolo di KRONECKER. Con referenza a un fluido magari omogeneo, sia $u^L = dx^L/ds$ la 4-velocità e $c^{-2}\varrho$ la densità propria di massa gravitazionale cosicchè, detto dC un elemento di volume ortogonale ad u^L, $c^{-2}\varrho\, dC$ è la massa gravitazionale a riposo della porzione dp di fluido contenuta nell'elemento dC.

Sia X_{LM} la parte simmetrica del tensore degli sforzi e p la pressione, cosicchè è:

$$X_{LM} = X_{ML}, \qquad X_{LM}u^M = 0\,, \qquad p = -\frac{1}{3}\tilde{g}^{LM}\, X_{LM} \qquad \text{con } \tilde{g}^{LM} = g^{LM} - u^L u^M\,. \tag{2}$$

(10) Tali aspetti sono considerati nell'ultima sezione dell'introduzione in [**2**]. Ivi, nella anontazione (22), vi è pure un esempio di fenomeno incompatibile con la teoria svolta in [**11**] ecc. ma, d'altro canto, evidentemente possibile e magari producibile in un laboratorio. Vedi pure la annotazione (24) al n. **6** di questo lavoro.

(11) Gli indici maiuscoli variano da 0 a 3 a quelli minuscoli da 1 a 3.

Inoltre siano I_1, I_2 e I_3 gli invarianti principali della velocità (spaziale) di deformazione Δ_{LM} onde, fra l'altro, detto ε^{LMPQ} il tensore di Ricci in U con $\varepsilon^{0123} = \sqrt{-g}$ (cfr. [7], p. 97) si ha:

$$(3) \quad \begin{cases} 2\Delta_{LM} = -\tilde{g}_L{}^A\tilde{g}_M{}^B(u_{A/B} + u_{B/A}) \,, & I_1 = \Delta_L{}^L = u^L{}_{/L} \,, \\ 2I_2 = \varepsilon_A{}^{BC}{}_L u^L \varepsilon^{ADE}{}_M u^M \Delta_{BD}\Delta_{CE} \,, & 6I_3 = \varepsilon^{ABC}{}_L u^L \varepsilon^{DEF}{}_M u^M \Delta_{AD}\Delta_{BE}\Delta_{CF} \,. \end{cases}$$

Nella presente fase iniziale è opportuno pensare, a priori, ϱ come una funzione del tipo:

$$(4) \qquad \varrho = \tilde{\varrho}(p, T, I_1, I_2, I_3) \,.$$

Sia $k\,\mathrm{d}C$ la massa gravitazionale a riposo della porzione dp quando questa si trovi alla temperatura T^*, per esempio, di quattro gradi centigradi e alla pressione atmosferica p^*. Dunque:

$$(5) \qquad c^2k\,\mathrm{d}C = \tilde{\varrho}(p^*, T^*, 0, 0, 0)\,\mathrm{d}C^* = c^2k^*\,\mathrm{d}C^*, \qquad k^* = c^{-2}\tilde{\varrho}(p^*, T^*, 0, 0, 0)$$

ove $\mathrm{d}C^*$ è il volume occupato dalla porzione dp nelle condizioni ([12]) $p = p^*$, $T = T^*$ e $I_r = 0$.

In base alla nota equivalenza relativistica tra massa ed energia, l'energia interna $kw\,\mathrm{d}C$ della porzione dp nello stato p, T, I_1, I_2, I_3 dà alla massa gravitazionale a riposo della porzione dp il contributo ([13]) $c^{-2}\,k\,w\,\mathrm{d}C$.

Dalla costanza della *massa convenzionale* $k\,\mathrm{d}C = k^*\,\mathrm{d}C^*$ della porzione dp segue che anche per fluidi inomogenei k soddisfa l'equazione di continuità [cfr. **1**, $(141)_2$]. Riassumendo possiamo dunque scrivere:

$$(6) \qquad (ku^L)_{/L} \equiv \frac{\mathrm{d}k}{\mathrm{d}s} + ku^L{}_{/L} = 0 \,, \qquad \varrho = k(c^2 + w) \,.$$

([12]) Stante (5) e l'eguaglianza $k\,\mathrm{d}C = k^*\,\mathrm{d}C^*$, k^* potrebbe chiamarsi la *densità convenzionale di riferimento* [cfr. **1**, n. 19]. Inoltre, posto $\varrho^* = \varrho k/k^*$ onde $\varrho^*\,\mathrm{d}C^* = \varrho\,\mathrm{d}C$, ϱ^* in generale differisce da $\tilde{\varrho}(p^*, T^*, 0, 0, 0)$ e rappresenta la densità di riferimento della massa inerziale (vera) a riposo [cfr. **1**, n. 19].

Si noti che nella presente trattazione k, k^* e ϱ^* sono state introdotte senza bisogno di una configurazione di riferimento φ^* in uno spazio del tipo di quello S_3^* introdotto in [**1**, n. 3] e largamente usato in [**2**] nello studio di materiali eventualmente solidi.

([13]) Si è, direi, costretti a tale assunzione, da parte di certe deduzioni tratte dalle equazioni gravitazionali [cfr. **2** (108)]. Ipotesi conformi a questa si fanno, ad es., in [8, p. 93] pur senza introdurre la temperatura (caso abiabatico e isoentropico).

Chiamerò k *densità convenzionale propria*, w *energia specifica* (*per unità di massa convenzionale*) e $\mathfrak{D}^{-1} = k/k^* = \mathrm{d}C^*/\mathrm{d}C$ *rapporto inverso di volume* (cfr. [1], (150)). In quanto proporzionale a $\mathfrak{D}^{-1} = \mathrm{d}C^*/\mathrm{d}C$, k individua, come in Fisica classica, il rapporto inverso di volume (14). Inoltre in Fisica classica si ritiene k come una funzione di p, T e magari delle I_r. Quanto precede ci induce a ritenere valida tale dipendenza di k nonostante k non abbia in relatività generale il significato gravitazionale o inerziale che invece possiede in Fisica classica.

Un'analoga dipendenza vale allora per w in base a (4) e $(6)_2$; precisamente si ha:

$$(7) \qquad k = \tilde{k}\,(p,\, T,\, I_1,\, I_2,\, I_3)\,, \quad w = \tilde{w}\,(p,\, T,\, I_1,\, I_2,\, I_3)\,, \quad \tilde{w}(p^*,\, T^*,\, 0,\, 0,\, 0) = 0\,.$$

Intendendo k come densità e w come energia interna specifica, in Fisica classica sussistono relazioni del tipo $(7)_1$, ove anzi almeno per w si può ritenere come non effettiva la indicata dipendenza dalle I_1, I_2, I_3. Si noti che in Fisica classica le relazioni $(7)_{1,2}$ vanno considerate come indipendenti tra loro (15).

Fra l'altro forse è più naturale ammettere (7), magari dopo avervi soppressi gli argomenti I_r in analogia con quanto si fa in Fisica classica, e poi dedurne (4) mediante $(6)_2$. Si è preferita la via seguita ritenendo opportuno che la definizione di k e k^* preceda l'introduzione di w.

Nel seguito — sebbene la cosa non sia essenziale per i prossimi sviluppi analitici — riterrò appunto $w = \tilde{w}(p,\, T)$ ossia w indipendente dalle I_r. Inoltre riterrò la $(7)_1$ invertibile come in Fisica classica cosicchè da essa si possa ricavare $p = \tilde{p}(k,\, T,\, I_1,\, I_2,\, I_3)$. Inoltre va ammesso che la parte $X^{LM} + p\tilde{g}^{LM}$ degli sforzi ad invariante lineare nullo [cfr. $(2)_{3,4}$] dipende dalla velocità (spaziale) di deformazione Δ_{LM} in modo isotropo. Allora, considerate genericamente le equazioni costitutive globali

$$(8) \qquad X^{LM} = \tilde{X}^{LM}(k,\, T,\, \Delta_{AB},\, u^A,\, g_{AB})\,, \quad X^{LM} = X^{ML}, \quad X^{LM}u_M = 0\,,$$

e fatto $g_{LM} = \delta'_{LM}$ e $u^L = \delta^L_0$, qualunque sia la matrice ortogonale $\|\varrho_r{}^s\| = \|\varrho^r{}_s\|$ di terz'ordine — con ovvio simbolismo — è (16):

$$(9) \quad \tilde{X}^{lm}(k,\, T,\, \varrho_r{}^s\Delta_{sk},\, u^L,\, g_{LM}) = \varrho^l{}_a\varrho^m{}_b\tilde{X}^{ab}(k,\, T,\, \Delta_{rh},\, u^L,\, g_{LM}) \text{ per } u^L = \delta^L_0 \text{ e } g_{LM} = \delta_{LM}\,.$$

---

(14) Tale punto di vista, sebbene diverso, è in accordo col lavoro [6] di relatività ristretta ove C. Eckart attribuisce a $k\,\mathrm{d}C$ direttamente il significato di quantità di materia, precisamente di dato insieme di molecole aventi un dato peso molecolare [cfr. 6, p. 920].

(15) In [11], [12], [13] queste due relazioni si riducono a una sola: la $\varrho = \varphi(p,\, T)$ come risulta in [11, p. 143] o meglio in [11, p. 165] dove si considera un quadro di tutte le equazioni inerenti al problema interno di Cauchy.

(16) Per analogia con quanto si fa in [10, p. 11] riguardo ai corpi iperelastici classici, la funzione $X^{LM}(k,\, T,\, \Delta_{LM},\, u^L,\, g_{LM})$ può dirsi emitropica.

Per la suddetta isotropia e per (2) da (9) segue $p = \tilde{p}(k, T, I_1, I_2, I_3)$ il che giustifica $(7)_1$. Una linearizzazione di (8) rispetto a Δ_{LM} fatta tenendo conto di (2) è data, stanti $(2)_4$ e $(3)_1$, da

$$X^{LM} = -\left[\tilde{p}(k, T) + \frac{2}{3}\lambda(k, T)\, u^A_{/A}\right]\tilde{g}^{LM} - \lambda(k, T)\Delta^{LM} . \tag{10}$$

Fissato il punto evento E esiste in U un sistema (x) di coordinate localmente proprio e geodetico in E, ossia (cfr. [**1**], annotazione (³)) verificante:

$$g_{LM} = \delta'_{LM}, \qquad \left\{ {A \atop LM} \right\} = 0 , \qquad u^L = \delta^L_0 \quad (\text{in } E) . \tag{11}$$

Si riconosce allora facilmente che (10) prende l'aspetto classico (cfr. [**7**], (99), p. 342).

3. - Equazione del calore. Tensore termodinamico.

Sia cq^L il vettore di corrente termica euleriana. Dunque se $d\sigma_L$ rappresenta una superficie infinitesima con $u^L d\sigma_L = 0$, allora $cq^L d\sigma_L$ è il calore che attraversa $d\sigma_L$ per conduzione termica. Si può allora ritenere $q^L u_L = 0$. Inoltre, relativizzando una generalizzazione della legge di conduzione termica di FOURIER dovuta a C. CATTANEO [17] si ha (cfr. [**2**], n. 2):

$$q^L = \varkappa \tilde{g}^{LM} T_{/M} + \sigma \tilde{g}^{LM}\left(\frac{dT}{ds}\right)_{/M}, \quad \varkappa = \varkappa(p, T), \quad \sigma = \sigma(p, T) \quad (q^L u_L = 0) . \tag{12}$$

Per $\sigma = 0$ si ottiene la legge di Fourier come si riconosce supponendo (x) scelto in modo che in E valga (11).

In generale in E si ottiene $q^l = -\varkappa\, \partial T/\partial x^l - \sigma \partial(dT/ds)/\partial x^l$, $q^0 = 0$, per cui risulta relativizzata precisamente l'equazione (18) di [**4**] (p. 92). Va detto che il coefficiente σ è da ritenersi molto piccolo e quindi spesso trascurabile con buona approssimazione; però interessa considerarlo, almeno da un punto di vista di principio.

---

(17) In [4] C. CATTANEO osserva che la legge di FOURIER implica, in Fisica classica, una propagazione del calore con velocità infinita. I ragionamenti ivi svolti valgono anche in relatività ristretta il che fa ritenere molto probabile che anche in relatività generale l'equazione (12) con $\sigma = 0$ implichi una propagazione del calore con velocità $> c$. Da un punto di vista di principio ciò è in relatività ancor meno accettabile della suddetta implicazione osservata in Fisica classica.

Considero il tensore termodinamico [18]:

$$Q^{LM} = q^L u^M + u^L q^M . \tag{13}$$

Poichè per $(12)_4$ è $q^L_{/M} u_L = - q^L u_{L/M}$ da (13) segue [cfr. **11**, p. 142]:

$$c^{-1} q_{\text{ass.}} = - u_L Q^{LM}{}_{/M} = q^L u_{L/M} u^M - q^M_{/M} = q^L \frac{\mathrm{D}u^L}{\mathrm{D}s} - q^L_{/L} . \tag{14}$$

Sulla base di deduzioni tratte dalle equazioni gravitazionali in [**2** n. **13**] la quantità $q_{\text{ass.}}$ definita da $(14)_1$ va interpretata come calore assorbito per secondo e per centimetro cubo, dovuto alla distribuzione di temperatura. È quindi interessante vedere la differenza fra l'espressione relativistica di $q_{\text{ass.}}$ in un riferimento localmente proprio e geodetico [**11**] e quella classica in coordinate cartesiane.

Si potrebbe calcolare tale differenza basandosi sulle formule (23), (60), (64) di [**2**], valide anche per solidi e ottenute giovandosi essenzialmente del punto di vista lagrangiano.

Preferendo prescindere da tali formule, a causa delle grandi semplificazioni complessive che così si hanno nel caso dei fluidi, osservo che per $(2)_4$ è:

$$\tilde{g}^{AB}{}_{/B} = - u^A_{/B} u^B - u^A u^B_{/B} = - u^A u^B_{/B} - \mathrm{D}u^A/\mathrm{D}s , \tag{15}$$

onde da (12) con $\sigma \equiv 0$ si ottiene:

$$q^L_{/L} = \varkappa g^{AB} T_{/AB} + \tilde{g}^{AB} \varkappa_{/A} T_{/B} - \varkappa u^L_{/L} \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} - \varkappa T_{/M} \frac{\mathrm{D}u^M}{\mathrm{D}s} \qquad (\sigma \equiv 0) . \tag{16}$$

Per $\sigma \neq 0$ (16) vale dopo aver aggiunto al secondo membro ciò che da questo si ottiene sostituendo $\varkappa$ e T con σ e $\mathrm{d}T/\mathrm{d}s$ rispettivamente. Allora si deduce facilmente che, stanti (12), (13) e (14), si ha la decomposizione (cfr. [**2**], (64)):

$$q_{\text{ass.}} = q^{(c)}_{\text{ass.}} + q^{(a)}_{\text{ass.}} + q^{(i)}_{\text{ass.}} , \tag{17}$$

---

[18] Tale tensore è stato introdotto in relatività ristretta da C. Eckart in [6] nel 1940. Esso è stato usato nei successivi lavori di relatività generale [**11**], [**12**], [**13**] concernenti i fluidi, sempre sotto la validità di (12) con $\sigma \equiv 0$. Non conosco altri metodi per trattare la temperatura in relatività generale. Inoltre esso dà, mi sembra, risultati accettabili [cfr. annotazione [1]; oppure **2**, annotazione [3]].

ove, come si riconosce riferendosi ad un sistema di coordinate (x) verificante in E le (11),

$$(18)\qquad q^{(c)}_{\text{ass.}} = -c\tilde{g}^{AB}\left(\varkappa T_{/A} + \sigma\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s}\right)_{/B},$$

$$(19)\qquad q^{(d)}_{\text{ass.}} = c\left(\varkappa\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}s} + \sigma\frac{\mathrm{d}^2T}{\mathrm{d}s^2}\right)u^L_{/L}, \qquad q^{(a)}_{\text{ass.}} = 2cq_L\frac{\mathrm{D}u^L}{\mathrm{D}s},$$

sono ordinatamente il calore assorbito ordinario (classico), il calore complementare di deformazione (o di dilatazione) (cfr. [2], (60)) e il calore complementare di accelerazione [19].

4. - Preliminari di elettromagnetismo per fluidi.

Com'è ben noto esistono due tensori emisimmetrici (elettromagnetici) F_{LM} e f_{LM} tali che in ogni riferimento (x) localmente geodetico, ma eventualmente non localmente proprio [v. $(11)_{2,1}$] è:

$$(20)\qquad F_{i0} = E_i,\ F_{i+1,i+2} = B_i,\ f_{i0} = D_i,\ f_{i+1,i+2} = H_i,$$

ove E_i è il campo elettrico e H_i quello magnetico quali appaiono ad un osservatore solidale col sistema (x) e inoltre D_i e B_i sono ordinatamente le corrispondenti induzioni.

Penserò il coefficiente dielettrico ε $[D_i = \varepsilon E_i]$ e la permeabilità magnetica μ $[B_i = \mu H_i]$ come funzioni di k e T. Con procedimenti ben noti [cfr. [7], p. 424] si ha:

$$(21)\quad f^{LM} = \eta^{LM}_{\ \ AB}F^{AB} \text{ con } \eta^{LM}_{\ \ AB} \equiv \eta^{LM}_{\ \ AB}(k, T, u^P) = \frac{1}{\mu}\tilde{g}^L_A\tilde{g}^M_B + \frac{1-\varepsilon\mu}{\mu}u_A(\tilde{g}^L_B u^M - \tilde{g}^M_B u^L).$$

Per $(20)_1$ la legge di OHM è espressa [cfr. [7] p. 424] da:

$$(22)\qquad j_L - ju_L = \zeta F_{LM}u^M \qquad \text{con } \zeta = \zeta(k, T) \text{ e } j = j_L u^L,$$

---

(19) L'intervento di un termine del tipo di $q^{(a)}_{\text{ass.}}$ [cfr. $(19)_2$] in una certa espressione del primo principio della termodinamica è stato riconosciuto da C. ECKART in [6] in relatività ristretta e nel caso $\sigma \equiv 0$ [cfr. (12)]. Praticamente nello stesso caso PHAM MAU QUAN considera, in sua vece, l'espressione completa $(19)_2$ [cfr. **11**, p. 155].

Nessuno dei suddetti Autori, considerando le differenze di formule relativistiche con le analoghe classiche, ha rilevato fra queste il termine $(19)_1$ magari per $\sigma \equiv 0$. Questo si può ottenere facilmente, anche dall'espressione [2 (60)] di $q^{(d)}_{\text{ass.}}$ per materiali eventualmente solidi ponendo $\varkappa^{LM} = -\varkappa\tilde{g}^{LM}$ e $\sigma^{LM} = \sigma\tilde{g}^{LM}$.

ove ζ è la conduttività elettrica e j_L è il vettore covariante di 4-corrente elettrica cosicchè j è la densità propria di carica elettrica. Stanti (21) e (22) le equazioni di MAXWELL si scrivono:

$$\varepsilon^{LABC} F_{AB/C} = 0\,, \qquad f_{LB}{}^{/B} = j_L\,, \tag{23}$$

ove ε^{LABC} è il tensore di RICCI (con $\varepsilon^{0123} = 0$).

Sia K_L il vettore rappresentante le azioni ponderomotrici [cfr. [7], p. 425] e siano E_{LM} e $\overline{E}_{LM}$ i tensori di MINKOWSKI e di ABRAHAM, ossia:

$$K_L = F_{LM} j^M, \; E_{LM} = F_{LA} f^A{}_M + \frac{1}{4} F_{AB} f^{AB} g_{LM}\,, \qquad 2\overline{E}_{LM} = E_{LM} + E_{ML}\,. \tag{24}$$

Allora, com'è ben noto [cfr. [7], p. 426], si ha:

$$\overline{E}_{LM}{}^{/M} = K_L + K'_L + K''_L\,, \tag{25}$$

ove:

$$4K'_L = f_{AB/L} F^{AB} - F_{BA/L} f^{BA}\,, \qquad 2K''_L = (f_L{}^A F_A{}^B - F_L{}^A f_A{}^B)_{/B}\,. \tag{26}$$

Com'è noto $(23)_1$ equivale all'esistenza di un vettore φ_L — determinato a meno dell'aggiunta di un gradiente $\overline{\varphi}_{/L}$ — per cui:

$$F_{LM} = \varphi_{L/M} - \varphi_{M/L}\,, \tag{27}$$

cosicchè si può porre $\varphi_0 \equiv 0$. Allora assunto il vettore φ_L come incognita in luogo del tensore F_{LM}, le equazioni (21), (22) e (23) possono ridursi, stanti $(21)_2$, alle quattro:

$$j u^L = [(\eta^{LMAB} - \eta^{LMBA}) \varphi_{A/B}]_{/M} = \zeta\, g^{LM} (\varphi_{M/P} - \varphi_{P/M}) u^P\,, \tag{28}$$

nelle quattro incognite scalari φ_p e j.

5. - Equazioni gravitazionali e conseguenti equazioni della dinamica dei sistemi continui e della conservazione dell'energia.

Detto R_{ABCD} il tensore di RIEMANN pongo, com'è d'uso,

$$R_{LM} = R_{LA}{}^A{}_M\,, \quad R = R_L{}^L\,, \quad A_{LM} = R_{LM} - \frac{1}{2} R g_{LM}\,, \tag{29}$$

e, stanti (13) e $(24)_{2,3}$, scrivo le equazioni gravitazionali:

$$(30) \qquad A_{LM} + \frac{8\pi}{c^4} U_{LM} = 0 \qquad \text{ove } U_{LM} = \varrho u_L u_M + X_{LM} + \overline{E}_{LM} + Q_{LM} .$$

Com'è ben noto da (29) segue $A_{LM}{}^{/M} = 0$, cosicchè (30) implica:

$$(31) \qquad U_{LM}{}^{/M} = 0 \qquad \text{onde } u^L U_{LM}{}^{/M} = 0 .$$

Con l'usuale procedimento [cfr., ad es., [**11**], p. 142, oppure **2**, n. **11**] da (30) e (31) seguono le equazioni dinamiche:

$$(32) \qquad \varrho u^L_{/M} u^M + \tilde{g}^L{}_A (X^{AM} + \overline{E}^{AM} + Q^{AM})_{/M} = 0 \qquad (\tilde{g}^{LM} = g^{LM} - u^L u^M) ,$$

e anzi le equazioni di conservazione $(31)_1$ equivalgono alle $(32)_1$ associate all'equazione $(31)_2$ di conservazione dell'energia.

Tenendo conto che $u^L q_L = 0$ [cfr. $(12)_4$], $u^L_{/M} u_L = 0$ e vale $(14)_3$, si può porre

$$(33) \quad P^L = -\tilde{g}^L{}_A \overline{E}^{AM}{}_{/M} , \qquad Q^L = -\tilde{g}^L{}_A Q^{AM}{}_{/M} \equiv -\left(\tilde{g}^L{}_A \frac{\mathrm{D}q^A}{\mathrm{D}s} + q^L u^M_{/M} + u^L_{/M} q^M\right) .$$

Per $(33)_{2,3}$ Q^L dipende dunque dalla velocità spaziale di deformazione e anche da quella spaziale di rotazione ([20]) ω_{LM} in quanto, stante $(3)_1$ è:

$$(34) \qquad -u^L_{/M} q^M = (\Delta^{LM} + \omega^{LM}) q_M \qquad \text{con } 2\omega_{LM} = (u_{B/A} - u_{A/B}) \tilde{g}^A{}_L \tilde{g}^B{}_A .$$

Con procedimenti fatti secondo il punto di vista euleriano (cfr. [**2**]: (25), $(95)_{2,3}$, (98)) da (32) si trae:

$$(35) \qquad (\varrho \tilde{g}^{LM} - X^{LM}) \frac{\mathrm{D}u_M}{\mathrm{D}s} = P^L + Q^L - \tilde{g}^L{}_M \tilde{g}^B{}_A X^{MA}{}_{/B} .$$

Da $(2)_4$ segue pure l'annullarsi della parte spaziale $\tilde{g}^L{}_A \tilde{g}^{AM}{}_{/\widetilde{M}}$ del derivato trasverso ([21]) di $\tilde{g}^{LM}$, precisamente:

$$(36) \qquad \tilde{g}^{LM}{}_{/\widetilde{M}} \equiv \tilde{g}^{LM}{}_{/H} \tilde{g}^H{}_M = -u^L u^M_{/M} , \qquad \tilde{g}^L{}_A \tilde{g}^{AM}{}_{/\widetilde{M}} = \tilde{g}^L{}_A \tilde{g}^{AM}{}_{/H} \tilde{g}^H{}_M = 0 .$$

([20]) Poichè in [2] non è stata scritta l'espressione tensoriale $(33)_3$ di Q^L ove si è messa in evidenza la dipendenza di Q^L da Δ_{LM} e ω_{LM}, conviene notare che essa vale non solo per fluidi ma, tra l'altro, anche per i sistemi materiali generali considerati in [2] (nella deduzione di $(33)_3$ non si è mai usata la particolare espressione (12) di q^L).

([21]) Stante $(2)_4$ dico *derivato trasverso* del tensore $T_{\cdots}^{\cdots}$ il tensore $T_{\cdots}^{\cdots}{}_{/L} \tilde{g}^L{}_M$ [cfr. **5**, p. 163].

Allora si riconosce facilmente che nell'ipotesi (10), la (35) diviene:

$$\left[\left(\varrho + \tilde{p} + \frac{2}{3}\,\lambda u^A_{/A}\right)\tilde{g}^{LM} + \lambda \Delta^{LM}\right]\frac{\mathrm{D}u}{\mathrm{D}s} = \tag{35'}$$

$$= P^L + Q^L + \tilde{g}^{LA}\left(p + \frac{2}{3}\,\lambda u^B_{/B}\right)_{/A} + \tilde{g}_{LA}(\lambda \Delta^{AB})_{/C}\tilde{g}_B{}^C\,,$$

da cui, tra l'altro, risulta evidente come per i fluidi la massa inerziale — ossia il coefficiente di $\mathrm{D}u_M/\mathrm{D}s$ — sia in generale un tensore che diviene isotropo, e precisamente rappresentabile mediante lo scalare $c^{-2}(\varrho + p)$, quando o il moto è localmente rigido $[\Delta_{LM} = 0]$ oppure è nullo il coefficiente di viscosità $\lambda = \lambda(k, T)$.

Per (6) è:

$$u_L(\varrho u^L u^M)_{/M} \equiv (\varrho u^M)_{/M} = (c^2 + w)(k u^M)_{/M} + k(c^2 + w)_{/M}u^M = k\,\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}s}\,. \tag{37}$$

Allora, posto:

$$k\,\mathrm{d}Q = -\,(\overline{E}^{LM} + Q^{LM})_{/M}\,u_L\,\mathrm{d}s = -\,\overline{E}^{LM}{}_{/M}u_L\,\mathrm{d}s + q_{\text{ass.}}\,\mathrm{d}t \quad (\mathrm{d}s = c\,\mathrm{d}t)\,, \tag{38}$$

$$\mathrm{d}l^{(i)} = \prod{}^{(i)}\,\mathrm{d}t = -\,X^{LM}u_{L/M}\,\mathrm{d}s = X^{LM}{}_{/M}u_L\,\mathrm{d}s \tag{39}$$

[cfr. **2** n. **13**], l'equazione $(31)_2$ equivale, stante $(30)_2$, a:

$$k\,\mathrm{d}Q + \mathrm{d}l^{(i)} = k\,\mathrm{d}w \equiv k\,\frac{\partial w}{\partial T}\,\mathrm{d}T + k\,\frac{\partial w}{\partial k}\,\mathrm{d}k\,. \tag{40}$$

Quest'equazione costituisce il I° principio della termodinamica e, essendosi tenuto conto attraverso (13) e $(38)_1$ dell'ipotesi di Fourier (12), generalizzata e relativizzata, la (40) sostituisce, stanti $(7)_2$ e (12) anche l'equazione fondamentale della conduzione del calore.

6. - Quadro delle equazioni della termo-magneto-fluido-dinamica in relatività generale. Posizione del problema di Cauchy. Caso di eliminabilità della temperatura.

Considero i dati, le equazioni fondamentali e un opportuno sistema di incognite per cui sia da ritenersi solubile il generico problema di Cauchy relativo ad un fluido eventualmente viscoso, sede di fenomeni elettromagnetici [22] e termici con conduzione di calore.

---

(22) Al pari di quanto si fa in [7], [8], [9] e [12] considero come l'unica cessione di energia elettromagnetica alla materia, quella dovuta alla conduzione elettrica (calore Joule).

Dapprima suppongo il fluido omogeneo come si fa ad es. in [**7**], [**8**], [**9**], [**11**], [**12**] e [**13**]. Allora i dati costituitivi (indipendenti dalle contingenze dei fatti) sono:

a) *le espressioni* $\varkappa = \varkappa(k, T)$ *e* $\sigma = \sigma(k, T)$ *dei coefficienti termici* [cfr. (12)];

b) *le espressioni* $\zeta = \zeta(k, T)$, $\varepsilon = \varepsilon(k, T)$ *e* $\mu = \mu(k, T)$ *della conducibilità elettrica, del coefficiente dielettrico e della permeabilità magnetica*;

c) *l'espressione* $w = \tilde{w}(k, T)$ *dell'energia interna specifica di massa e quella* $X_{LM} = \tilde{X}_{LM}(k, T, \Delta_{AB}, u^A, g_{AB})$ *degli sforzi del fluido* [cfr. (8)] *magari tramite le funzioni* $p = \tilde{p}(k, T)$ e $\lambda = \lambda(k, T)$ [(10)].

Come incognite possono assumersi le seguenti venti funzioni delle x^L: le dieci g_{LM}, le quattro $u^L = dx^L/ds$, la densità propria j di carica elettrica, il quadripotenziale φ_L con $\varphi_0 \equiv 0$, la temperatura T e la densità convenzionale propria k [cfr. n. **2**].

Mediante i dati e le funzioni incognite si possono costruire le X^{LM} [(8)], q_L e Q_{LM} [cfr. (12), (13)] inoltre F_{LM} [cfr. (27)], f_{LM} [cfr. (21)], j_L [cfr. (22)], E_{LM} e $\overline{E}_{LM}$ [cfr. $(24)_{2,3}$] e infine ϱ [cfr. $(6)_2$] e U_{LM} [cfr. $(30)_2$].

Le equazioni da soddisfare sono sedici: le dieci $(30)_1$, gravitazionali, le quattro (28), elettromagnetiche, l'equazione di continuità $(6)_1$ e la nota relazione $u_L u^L = 1$. Dunque alle $(6)_1$, (28) e (30) si possono aggiungere le relazioni:

$$g_{00} = 1\,, \qquad g_{0i} = 0\,, \qquad u^0 = \sqrt{-g_{lm}u^l u^m}\,. \tag{41}$$

Le $(41)_{1,2}$ caratterizzano la forma geodetica dell'elemento lineare ds^2 e $(41)_3$ equivale, stanti $(41)_{1,2}$, alla relazione $u_L u^L = 1$ già considerata.

In altre parole, stante (41), le incognite sono ridotte a quindici : T, k, j, le sei g_{lm}, le tre φ_l e le tre u^l; inoltre anche le equazioni sono ridotte a quindici ([23]): le $(6)_1$, (28) e (30). Ciò induce a ritenere determinato il generico problema

([23]) Sebbene i fluidi siano casi particolari dei materiali (eventualmente solidi) considerati in [**2**], tuttavia dal punto di vista (lagrangiano) ivi considerato, il loro studio non è affatto conveniente [cfr. annotazione ([8])]. Mettendosi dal punto di vista euleriano, com'è naturale, si sono introdotte le quattro funzioni k e u^l non figuranti nell'altro caso e d'altro canto non si usano le tre funzioni $x^l = x^l(t, y^1, y^2, y^3)$ rappresentanti il moto individuando il generico elemento materiale mediante i parametri lagrangiani y^ϱ. Di conseguenza il problema di CAUCHY per fluidi ha sensibili differenze rispetto a quello (lagrangiano) per solidi. Fra l'altro, ora abbiamo quindici equazioni (anche quella di continuità) anzichè quattordici, e la stessa cosa può dirsi per le incognite.

di CAUCHY inerente alla termo-magneto-visco-elasticità nel caso omogeneo [24].

Nel caso inomogeneo conviene riferirsi a coordinate solidali e i considerati dati a), b), c) vanno pensati come funzioni degli argomenti precedenti e anche delle tre coordinate x^l. Inoltre occorre ritenere le g_{0i} come incognite in quanto le $(41)_2$ in generale non valgono; invece è $u^L = \delta^L_0$, ossia alle $(41)_{1,2}$ si possono sostituire le:

$$u^L = \delta^L_0 \,, \qquad g_{00} = 1 \,. \tag{42}$$

---

[24] Generalmente si pensano le funzioni $(7)_{1,2}$ come indipendenti dalle I_r, ossia della forma $k = \tilde{k}(p, T)$ e $w = \tilde{w}(p, T)$.

Supponiamo il fluido non viscoso, ossia che valga (10) con $\lambda = 0$ cosicchè (10) equivale a $(7)_1$. Come si è già detto in Fisica classica le precedenti due relazioni si considerano come indipendenti onde, stante $(6)_2$, si ritengono indipendenti le relazioni $k = \tilde{k}(p, T)$ e $\varrho = k(c^2 + w) = \varphi(p, T)$.

In [11, p. 167] si considera il quadro delle equazioni inerenti al problema di CAUCHY per il fluido perfetto in assenza di azioni elettromagnetiche.

In questo quadro si include la relazione $\varrho = \varphi(p, T)$, però non vi è alcuna relazione corrispondente alla $k = \tilde{k}(p, T)$. Nel detto quadro considerato in [11] non si usa k. A questo riguardo rispetto al quadro del presente lavoro ivi si ha una funzione incognita in meno, la $k = \tilde{k}(x)$, e due equazioni in meno, la $k = \tilde{k}(p, T)$ e l'equazione di continuità $(6)_1$.

In armonia col fatto che in entrambi i casi il numero delle equazioni eguaglia quello delle incognite, in [11] si include « l'equazione della continuità del calore (27.2) » che non ha analogo nè in questo lavoro nè in lavori di termo-fluido-dinamica precedenti [11], [12], [13] [cfr. [11] p. 122 riga 6 e p. 138 righe 4 d.b.].

Considero l'equazione del calore come una conseguenza delle equazioni gravitazionali e precisamente come fornita dalla (40) e dalla [11 (27.6)] nel caso di assenza di azioni elettromagnetiche.

PHAM MAU QUAN evidentemente non riconosce tale significato alla [11 (27,6)] nemmeno nel caso dei fluidi perfetti pur riconoscendole (almeno parzialmente) quello di 1° principio della termodinamica.

Le equazioni [11 (27.2)] e [11 (27.6)] che Egli così include nel suo detto quadro, costituiscono in effetti due relativizzazioni differenti del 1° principio della termodinamica per fluidi perfetti [cfr. 2, n. 1, sezione IV]. Ciò, oltre ad essere privo di giustificazioni fisiche soddisfacenti, conduce ad affermazioni evidentemente contrarie a comuni esperienze [cfr. 2, annotazione (22)].

In [12] si usa ancora la stessa equazione di continuità del calore [11 (27.2)] [cfr. [12] p. 506]. Si aggiunge lo svantaggio che in tale teoria, ove si considerano anche correnti elettriche di conduzione, tale equazione non è approssimata nemmeno, in campi ben controllabili sperimentalmente, da alcuna legge classica comunemente accettata, in quanto in [11 (27.2)] non si tiene conto del calore JOULE.

Per maggiori dettagli vedi l'ultima parte del n. 1 in [2].

Dunque le incognite sono quindici, cioè le sei T, k, j, φ_p e le nove g_{lm} e g_{l0}. Altrettante sono le equazioni, cioè la $(6)_1$ di continuità, le quattro (28), elettromagnetiche, e le dieci $(30)_1$ gravitazionali.

Suppongo i processi adiabatici, ossia $\varkappa \equiv \sigma \equiv 0$ onde $q^L \equiv 0$ e $Q_{LM} \equiv 0$.

Inoltre suppongo che dei precedenti dati *b*) e *c*), i quali nel caso inomogeneo dipendono anche dalle x^l, solo l'energia interna $\tilde{w}(k, T)$ dipenda (esplicitamente) da T. Si può allora sostituire $\varrho = \varrho(x^L)$ alla funzione incognita $T = T(x^L)$ in entrambi i precedenti problemi, l'omogeneo e l'inomogeneo.

Una volta integrate le equazioni — per il che la funzione costitutiva $\tilde{w}(k, T)$ o $\tilde{w}(k, T, x^l)$ non serve — si può ricavare la $T = T(x^L)$ dall'equazione $(6)_2$.

Si considerino ancora i processi adiabatici ($\varkappa \equiv \sigma \equiv Q_{LM} \equiv 0$), ma si ammetta che i dati b) e c) siano funzioni (regolari) generiche di k e T — e anche delle x^l nel caso inomogeneo —. Allora da $(6)_2$ si può ricavare T in funzione di k e ϱ e magari delle x^l e trasformare gli altri dati in funzione appunto di k, ϱ (e delle x^l). Allora nel caso omogeneo, stante (41), si hanno le quindici equazioni $(6)_1$, (28) e $(30)_1$ nelle seguenti quindici funzioni incognite delle x^L: k, ϱ, j, φ_p, g_{lm} e u^l. Nel caso omogeneo, stanti (42), si hanno le stesse equazioni e le incognite k, ϱ, j, φ_p, g_{lm} e g_{0l}.

7. - Secondo principio della termodinamica. Fluidi perfetti.

Basandomi sulla definizione (38) di calore assorbito e sullo stato di riferimento (T^*, p^*) [n. 2] enuncio [cfr. **2**, n. **19**] il:

2° Principio della Termodinamica. *In corrispondenza alla generica porzione elementare* dp *di materia esiste una funzione (entropia specifica di massa)* $\eta = \eta\,(k, T, r_i)$ *di* k, T *e dei parametri fisici* $r_1, r_2, \dots$, *per cui in ogni processo (fisicamente possibile) si ha:*

$$(43) \qquad (k\eta u^L)_{/L} T \equiv Tk\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}s} \geqslant k\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}s}\,,$$

ove, esplicitata la eventuale dipendenza di η *dall'elemento* dp *che si considera, si pensi* η *come una funzione delle sole* x^L.

Introdotta l'energia libera $F = w - T\eta$ specifica di massa, con ben noti ragionamenti [cfr. [**15**] o **2** (19)] si riconosce che (43) equivale a:

$$(44) \qquad -Tk\,\mathrm{d}F \geqslant k\eta\,\mathrm{d}T + \mathrm{d}l^{(i)} \qquad \text{con } F = w - T\eta\,.$$

La porzione dp sarà detta *a trasformazioni reversibili* se per essa (44) vale sempre come eguaglianza.

Definizione. 7.1. – *Dirò che la porzione* dp *è un fluido perfetto se essa è esente da vincoli interni* ([25]), *gli sforzi tangenziali sono nulli e inoltre l'energia libera è una pura funzione $F = F(k, T)$ di k e T e valgono le relazioni* [cfr. [**15**], p. 118]:

$$p = k^2 \frac{\partial F(k,\ T)}{\partial k}, \qquad \eta = -\ k\,\frac{\partial F(k,\ T)}{\partial T}. \tag{45}$$

Teorema 7.1. – *La porzione elementare* dp *di materia è un fluido perfetto se e solo se per essa è $X^{LM} = -\,p\tilde{g}^{LM}$ e inoltre p, η e w sono funzioni di k, T e di alcuni parametri fisici p_1, p_2, ..., valendo le seguenti condizioni:*

a) *p, η, F, $\partial F/\partial T$, $\partial F/\partial k$ e $\partial F/\partial p_i$ sono funzioni continue.*

b) *le variabili k, T e p_i non sono legate da alcun vincolo olonomo o anolonomo, oppure esse sono legate da vincoli effettivamente anolonomi che lasciano $\mathrm{d}k$ e $\mathrm{d}T$ arbitrari per $p_i =$ cost., precisamente vincoli del tipo:*

$$\sum_i a_{ri}(k,\ T,\ p_h)\,\mathrm{d}p_i = 0\,, \tag{46}$$

e tali che, fissati ad arbitrio due stati del tipo $(\bar{k}, \overline{T}, p_i^0)$ e $(\bar{k}, \overline{T}, p_i^1)$, questi siano congiunti da un processo $\bar{\sigma} = \langle \bar{k}, \overline{T}, p_i(s) \rangle$ verificante (46) *e in cui k e T non variano* ([26]).

Si riprendano gli stati $(\bar{k}, \overline{T}, p_i^0)$ e $(\bar{k}, \overline{T}, p_i^1)$ e il processo $\bar{\sigma}$ considerato nella condizione *b*). Fissato s $(0 \leqslant s \leqslant s_1)$, a partire dallo stato $(\bar{k}, \overline{T}, p_i(s))$ l'incremento $(\mathrm{d}k, \mathrm{d}T, \mathrm{d}p_i)$ è possibile [(46)] se, e solo se, tale è l'incremento opposto $(-\,\mathrm{d}k, -\,\mathrm{d}T, -\,\mathrm{d}p_i)$. Dunque (44) vale come eguaglianza, ossia la porzione dp è a trasformazioni reversibili.

Poichè lungo il processo $\bar{\sigma}$ è $\mathrm{d}k = \mathrm{d}T = 0$, per (44) segue che è pure $\mathrm{d}F = 0$ onde $F(\bar{k}, \overline{T}, p_i^0) = F(\bar{k}, \overline{T}, p_i^1)$. Dunque $F(k, T, p_i)$ non dipende dai parametri p_i.

Per (3) e (39) in base all'annullarsi degli sforzi tangenziali e per l'equazione $(6)_1$ di continuità si ha:

$$\mathrm{d}l^{(i)} = p u^L_{/L}\,\mathrm{d}s = -\,\frac{p}{k}\,\mathrm{d}k\,.$$

([25]) Ossia a partire da un qualsiasi stato (T, p) è fisicamente possibile un qualsiasi processo elementare $(\mathrm{d}T, \mathrm{d}p)$ [cfr. **2**, Ded. 20.1].

([26]) Questo teorema è analogo al Teor. 21.1 di [**2**] e la prima parte della dimostrazione del Teor. 7.1 è analoga a quella del detto Teor. 21.1.

Allora dalla validità di (44) come eguaglianza per dk e dT arbitrari, segue (45).

Se dp è un fluido perfetto, allora [cfr. Def. 7.1] esso è a trasformazioni reversibili onde [cfr. (43)] $T\,\mathrm{d}\eta = \mathrm{d}Q$ cosicchè [cfr. (45)] $-T\partial^2 F/\partial T^2$ è il calore specifico a volume (e anche a configurazione) costante. Questo è > 0 per il postulato di HELMOTZ. Allora da $(45)_2$ si può ricavare $T = T^{(\eta)}(k, \eta)$ onde si può esprimere $w = w^{(\eta)}(k, \eta)$ in funzione di k ed η. Per (40) e (43) si riconosce allora che, com'è ben noto in Fisica classica, dp *è un fluido perfetto* [cfr. Def. 7.1] *se, e solo se, esso è esente da vincoli (interni) e inoltre*

$$(47) \qquad p = k^2 \frac{\partial w^{(\eta)}(k, \eta)}{\partial k}, \qquad T = k \frac{\partial w^{(\eta)}(k, \eta)}{\partial \eta}.$$

8. - Sui gas perfetti.

In Fisica classica spesso si definisce il gas perfetto mediante l'equazione di stato:

$$(48) \qquad p = rTk \qquad (r = R/M),$$

ove R è la costante universale dei gas e M è il peso molecolare del gas in questione. Si usa pure caratterizzare il gas perfetto *fra i fluidi perfetti*, mediante le due seguenti condizioni [cfr. **15**, p. 119].

a) $p = kg_1(T)$, *ossia* p/k *dipende dalla sola temperatura.*

b) *L'energia interna della porzione elementare* dp *dipende solo dalla temperatura.*

Si presentano spontaneamente due modi di relativizzare sia $(48)_1$ che le condizioni a) e b). In primo luogo in $(48)_1$, intesa come equazione classica, si può considerare k come densità convenzionale [$k = k^*\,\mathrm{d}C^*/\mathrm{d}C$], col che $(48)_1$ ha senso anche in relatività e in secondo luogo si può intendere k come densità di massa inerziale, o meglio gravitazionale, e sostituirla, nella relativizzazione in discorso, con la densità relativistica propria (vera) $c^{-2}\varrho$.

Si può osservare che, mentre *applicando i suddetti procedimenti di relativizzazione alla formula* $(48)_1$ *si ottengono risultati differenti, applicandoli alle condizioni* a) *e* b) *si ottengono invece risultati equivalenti.*

Infatti l'energia interna della porzione dp è $kw\,\mathrm{d}C = k^*w\,\mathrm{d}C^*$ cosicchè b) equivale all'essere w una funzione $w = w(T)$ della sola T. Inoltre per $(6)_2$ è

$c^2 p \varrho^{-1} = pk^{-1}[1 + c^{-2}w]^{-1}$. Allora, stante la condizione b), pk^{-1} è una funzione $g_1(T)$ della sola T se, e solo se, tale è $c^2 p \varrho^{-1} = g_1(T)[1 + c^{-2}w(T)]^{-1}$.

Mediante ragionamenti ben noti in Fisica classica [cfr. [**15**], p. 120] dimostro brevemente ora che nella presente teoria relativistica *le condizioni* a) *e* b) *— o quelle da essa ottenute sostituendovi* k *con* $c^{-2}\varrho$ *— implicano la relazione* $(48)_1$ *e non la* $p = RT\varrho \equiv R[1 + c^{-2}w(T)]^{-1}Tk$.

Dalla b) segue, come si è detto, $w = w(T)$ inoltre da (45) e dalla a) segue $\partial F/\partial k = g_1(T)k^{-1}$, onde $F = g_1(T) \log k + g_2(T)$.

D'altro canto per la definizione di F è, com'è ben noto:

$$w = w(T) = F - T\frac{\partial F}{\partial T} = \left(g_1 - T\frac{\mathrm{d}g_1}{\mathrm{d}T}\right)\log k + g_2(T) - T\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}T},$$

onde $g_1 - T\,\mathrm{d}g_1/\mathrm{d}T = 0$ cosicchè $g_1(T) = RT$ con $R = \text{cost}$. La (48) vale dunque anche nella presente teoria relativistica per ogni fluido perfetto soddisfacente le condizioni a) e b).

Si osservi ora che, stante la b), la relazione $p = c^{-2}RT\varrho$ implica la a).

Ma allora in base al precedente ragionamento segue $(48)_1$ il che è assurdo. Dunque *la detta relazione* $p = c^{-2}RT\varrho$ *è incompatibile con la condizione* b).

Questa condizione rispecchia proprietà interne dei gas perfetti, proprietà su cui si basa, tra l'altro, la loro trattazione statistica. Concludo che $(48)_1$ è l'unica accettabile delle due relativizzazioni dell'equazione dei gas perfetti, sopra considerate.

È pure spontaneo assumere per equazione relativistica dei gas perfetti la $pV = RT$, ove R è la costante universale dei gas e V il volume molecolare. Ciò è in accordo con quanto sopra.

Va pure osservato che, però, in casi in cui non si può portare alle condizioni standard (T^*, p^*) il corpo in esame, la determinazione sperimentale del volume molecolare V, secondo la presente teoria relativistica, presenta qualche difficoltà, ossia in genere essa richiede una misura di volume e una di massa (massa gravitazionale nel caso di corpi celesti). Ai risultati di tali misure si applicherà una legge del tipo $(6)_2$.

Talvolta, stanti $(6)_2$ e (48), conviene dunque usare un'equazione dei gas perfetti del tipo:

$$(49) \qquad p(1 + c^{-2}w) = rT\varrho \ \text{ con } \ w = g_2(T) - T\frac{\mathrm{d}g_2}{\mathrm{d}T}, \ \frac{\mathrm{d}^2 g_2}{\mathrm{d}T^2} = -\frac{1}{T}c_v(T), \ w(T^*) = 0,$$

ove la $(49)_2$ è sostanzialmente contenuta in precedenti ragionamenti e $(49)_3$ segue con ragionamenti praticamente esprimibili con le stesse parole di certe considerazioni svolte, in Fisica classica, in [**15**], p. 121 .

Con ragionamenti del detto tipo [cfr. **15**, p. 120, 123] si riconosce che nella presente teoria relativistica si ha $c_p = R + c_v > c_p$ (c_p = calore specifico a pressione costante), $F = T\{R \log k - c_v \log T\} + c_1 T + c_2$ e inoltre nei processi adiabatici è:

$$\frac{p}{k^\gamma} = \frac{p^*}{k^\gamma}, \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v} = 1 + \frac{R}{c_v}. \tag{50}$$

Per $(48)_2$ sono equivalenti le tre condizioni che γ, c_p e c_v siano costanti. Allora, ammesso, ad esempio, $\gamma = \text{cost}$, da $(49)_{3,2}$ segue

$$g_2(T) = c_0 + c_1 T - c_v T\,[\log (T/T^*) - 1], \; w = c_0 + c_v T,$$

onde:

$$p\varrho^{-1} = \frac{c^2 RT}{M[c^2 + c_v(T - T^*)]}, \qquad w = c_v(T - T^*) \text{ con } c_v = \text{cost}. \tag{51}$$

È naturale che in (51) figuri la temperatura particolare T^*. Infatti in relatività è da ritenersi valida la legge di Avogadro asserente che eguali volumi di gas diversi nelle stesse condizioni di temperatura e pressione contengono lo stesso numero di molecole, onde ha un senso preciso il concetto di peso molecolare M di un gas (perfetto).

Inoltre in relatività si può definire il grammo come la massa (gravitazionale) di un cm³ d'acqua nelle condizioni (T^*, p^*) e la mole di un dato gas come la porzione di esso che nelle condizioni (T^*, p^*) ha una massa pari a M grammi. Dunque la temperatura T^* è privilegiata in base alla definizione di mole e, analogamente, anche R dipende da T^*. Precisamente, secondo (51), sostituendo T a T^*, R diviene $R_T = R[1 + c^{-2}c_v(T - T^*)]^{-1}$. In (48) a tale dipendenza di R fa riscontro che k è la densità convenzionale appunto relativa allo stato di riferimento (T^*, p^*).

9. - Onde ordinarie di discontinuità. Caso dei gas perfetti.

Considero brevemente ciò di cui nel titolo usando un procedimento molto simile al corrispondente procedimento classico. Supponiamo che le $u^L_{/M}$ ammettano delle discontinuità $\Delta u^L_{/M}$ di prima specie sulla ipersuperficie spaziale $\sum$ di equazione $f(x^L) = 0$, mentre le g_{LM}, $\partial g_{LM}/\partial x^P$ e $\partial^2 g_{LM}/\partial x^P \partial x^Q$ siano ovunque continue. Fissato il punto evento E, ivi valgano le (11). Allora, com'è noto [cfr. ad es., **3**, (4)], la velocità V di propagazione è determinata da

$$V^2 = \frac{|f_{/L}u^L|}{-\tilde{g}^{LM}f_{/L}f_{/M}} = \frac{|f_{x^0}|}{c\sum_l (f_{x^L})^2}\,. \tag{52}$$

Inoltre essendo $u_L u^L_{/M} = 0$, si ha pure $u_L \Delta u^L_{/M} = 0$ onde per (11) è $0 = \Delta u^0_{/M} = \Delta\, \partial x^0/\partial x^M$, ossia le $u^0_{/M}$ e le $\partial u^0/\partial x^M$ sono continue in E. Allora in base al teorema di Hugoniot-Hadamard esiste un vettore λ^L ($\lambda^0 = 0$) per cui, in E,

$$\Delta u^l_{/m} = \lambda^l N_m,\quad \Delta u^l_{/0} = -\lambda^l V \quad \text{con } N_m = \frac{f_{x^l}}{\sum_l (l_{x^l})^2}\,. \tag{53}$$

Suppongo ora il fluido omogeneo, in assenza di fenomeni elettromagnetici e mi limito a processi adiabatici ($\varkappa \equiv \sigma \equiv 0$, $Q_{LM} \equiv 0$) quindi isoentropici cosicchè per $(47)_1$ *la pressione è una funzione*:

$$p = \omega(k)\,, \tag{54}$$

della sola densità propria convenzionale k. Fra l'altro, allora è $k = \omega^{-1}(p)$ onde da $(6)_2$ [$w = w^{(\eta)}(k, \eta)$, $\eta = \text{cost}$] segue $\varrho = \varphi(p)$, come si assume in [**9**] (cfr. p. 40).

Si deve tener conto dell'equazione $(6)_2$ di continuità, di (35′) con $\lambda \equiv P^L \equiv \equiv Q^L \equiv 0$ e di (54). Allora [cfr. [**15**], p. 143] è:

$$\lambda_{(5)}V = \omega'(k)\lambda_{(4)}V \quad \text{con } \lambda_{(4)}V = -\Delta\, \mathrm{d}k/\mathrm{d}s,\quad \lambda_{(5)}V = -\Delta\, \mathrm{d}p/\mathrm{d}s\,, \tag{55}$$

$$c^{-2}(\varrho + p)\lambda^l V = \lambda_{(5)}N^l,\quad \lambda_{(4)}V = k\lambda^l N_l\,. \tag{56}$$

Ragionando come nell'analogo caso classico [cfr. [**14**], p. 143], si arriva a scartare il caso $\lambda^l N_l = 0$ in cui $\sum$ è un'ipersuperficie materiale ($V = 0$); allora da $(56)_1$ segue $\lambda_{(5)} = (\varrho + p)V\lambda^l N_l$, onde per $(56)_2$ la $(55)_1$ implica $c^{-2}(\varrho + p)V^2 = \omega' k$, ossia:

$$V^2 = \omega'(k)\frac{c^2 k}{\varrho + p} = \frac{1}{1 + c^{-2}(w + p)}\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}k} = \frac{\overline{V}^2}{1 + c^{-2}(w + p)}\,, \tag{57}$$

ove $\overline{V} = \sqrt{\omega'(k)} = \sqrt{\mathrm{d}p/\mathrm{d}k}$ è, com'è noto, la velocità classica di propagazione del suono in un fluido, calcolata riferendosi a processi adiabatici per cui, intendendo k come densità, (54) sia l'equazione di stato ridotta. La formula (57) è in accordo con un risultato già ottenuto in [**3**].

Scegliendo l'arbitraria temperatura T^* di riferimento eguale a quella attuale, e posto in tal caso $V^{(c)} = \overline{V}$, (57) diviene $V = (1 + c^{-2}p)^{-1/2}V^{(c)}$ in esatto accordo ([27]) con un precedente risultato [cfr. **3**, (37), e **3**, annotazione ([17])].

Il precedente confronto col caso classico è stato possibile grazie all'uso dell'equazione di stato $(47)_1$, in cui interviene la densità convenzionale k. Tale intervento, a quanto mi consta, non era stato considerato precedentemente anche se relazioni quali le $(47)_1$ o le $(45)_1$, appunto contenenti anche k, sono, direi, necessarie in aggiunta ad una del tipo $\varrho = \varphi(p, T)$ per completare il quadro delle equazioni del fluido termodinamico relativistico [annotazione ([24])].

Nel caso dei gas perfetti per (50) è $\omega(k) = (k/k^*)^\gamma p^*$, onde per (50), $(6)_2$ e $(51)_2$ è $\omega'(k) = p/k = (c^2 + w)p\varrho^{-1} = [c^2 + c_v(T - T^*)]p\varrho^{-1}$.

Dunque per i gas perfetti (57) diviene:

$$V^2 = \frac{\gamma c^2(c^2 + w)pk}{\varrho(\varrho + p)} = \gamma\,\frac{p\varrho}{\varrho(\varrho + p)} = \gamma\,\frac{p}{\varrho(1 + p\varrho^{-1})} = \frac{\gamma}{1 + p\varrho^{-1}}\,V^{(c)2}, \tag{58}$$

ove $V^{(c)} = \sqrt{\gamma p\varrho^{-1}}$ è la velocità di propagazione del suono secondo una nota formula di Fisica classica.

Siano ad es. p_0 e T_0 la pressione e la temperatura nel centro del sole. Si noti che essendo $T_0 \neq T^*$, per (51) $p_0\varrho_0^{-1} \neq RT_0$ in accordo col fatto che R è calcolato in corrispondenza alla temperatura T^* $[R_0 = R\{1 + c^{-2}c_v(T_0 - T^*)\}^{-1}]$.

Mi sembra opportuno notare che (58) *vale per* $V^{(c)} = \sqrt{\gamma p\varrho^{-1}}$ *e non per* $V^{(c)} = \sqrt{\gamma RT}$, dato che questa eguaglianza, pur essendo equivalente alla precedente secondo la teoria classica, non lo è secondo la presente relativistica, almeno in generale, nè lo è, in particolare, per $p = p_0$ e $T = T_0$. Ciò è conforme con quanto si è detto riguardo alla (57); nel caso del sole bisogna calcolare $V^{(c)}$, basandosi sull'equazione di stato $p = M^{-1}R_0Tk$, anzichè sulla ([28]) (48).

([27]) Si osservi che in [9, p. 43] — ove si usa ϱ nel senso qui dato a $c^{-2}\varrho$ — si trova, con metodi differenti dal precedente, che con le nostre notazioni, nel caso $\varrho = \varphi(p)$ si ha $V^{-2} = c^{-2}\varphi'(p)$. Per $(6)_2$ e $(47)_2$ ne segue:

$$c^2V^{-2} = \varphi'(p) = \frac{d\varrho}{dp} = \frac{dk}{dp}\frac{d\varrho}{dk} = \frac{dk}{dp}\left(c^2 + w + k\,\frac{\partial\omega}{\partial k}\right) = \frac{\varrho + p}{k\omega'},$$

appunto in accordo con (57).

([28]) Quanto precede — e in particolare (57) — va a favore della fondatezza dell'apprezzamento dell'ordine di grandezza della correzione relativistica della velocità classica delle onde sonore al centro del sole fatta in [3] [cfr. **3**, annotazione ([5])].

10. - I fluidi viscosi come particolari materiali visco-elastici e i fluidi perfetti come particolari materiali elastici in senso lato.

In questo numero presuppongo buona parte della teoria svolta in [1] e [2]. Considero per il generico fluido eventualmente viscoso una configurazione φ^* di riferimento in uno spazio astratto S_3^* tridimensionale ed euclideo [cfr. **1** n. **13**] in cui il detto fluido abbia la densità k^* [cfr. **1**, (19)].

Considero in S_3^* un sistema (y) di coordinate, per semplicità cartesiano. Inoltre siano $x^L = x^L(t, y^1, y^2, y^3)$ le equazioni [cfr. **1**, (1)] del moto del fluido ove t è un parametro temporale.

Ripreso il gradiente di deformazione (29) $\alpha^L{}_\varrho = \tilde{g}^L{}_A \partial x^A / \partial y^\varrho$ [cfr. **1**, (13')] e il tensore $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ di deformazione [cfr. **1**, (20) oppure **3**, (9)] ricordo il legame:

$$(59) \qquad X^{LM} = \mathfrak{D}^{-1} \alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma Y^{\varrho\sigma}\,, \qquad \mathfrak{D} = \sqrt{\frac{-g}{a^*}}\,\frac{\partial(x^0, \ldots, x^3)}{\partial(t, y^1, y^2, y^3)}\,\frac{dt}{ds}\,,$$

fra gli sforzi euleriani X^{LM} e i corrispondenti lagrangiani $Y^{\varrho\sigma}$ e la decomposizione [**1** (26)] del tensore $\alpha^L{}_\varrho$ nel rotore $R^L{}_\varrho$ e nella deformazione pura $\mathfrak{D}_{\varrho\sigma}$, ossia:

$$(60) \qquad \alpha^L{}_\varrho = R^L{}_\sigma \mathfrak{D}^\sigma{}_\varrho \quad \text{con} \quad \mathfrak{D}_{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}_{\sigma\varrho} \quad \text{e} \quad \mathfrak{D}_{\varrho\sigma}\xi^\varrho\xi^\sigma \ \text{definita} > 0\,.$$

Sappiamo che $\mathfrak{D}$ e le $\mathfrak{D}^\sigma{}_\varrho$ possono pensarsi come funzioni delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [cfr.: $(60)_3$; **1** (20); **1**, (25); **1**, (70)]. Allora, ripresa la velocità lagrangiana di deformazione $\Delta^*_{\varrho\sigma} = \alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma \Delta_{LM}$, facendo nelle equazioni (8): $u^L = \delta^L_0$, $g_{LM} = \delta'_{LM}$, $\alpha^l{}_\varrho = \mathfrak{D}^l{}_\varrho$ e $\alpha^0{}_\varrho = 0$, si può porre:

$$(61) \quad Y^{\varrho\sigma}(T, \varepsilon_{\varrho\sigma}, \Delta^*_{\varrho\sigma}) = \mathfrak{D}\overset{-1}{\mathfrak{D}}{}^\varrho{}_l \overset{-1}{\mathfrak{D}}{}^\sigma{}_m X^{lm}(\mathfrak{D}^{-1}k^*, \mathfrak{D}^{-1}\mathfrak{D}^l_\varrho \mathfrak{D}^m_\sigma \Delta_{lm}, \delta^L_0, \delta'_{LM}) \quad (\overset{-1}{\mathfrak{D}}{}^{\varrho\tau}\mathfrak{D}_{\varrho\tau} = \delta^\varrho_\sigma)$$

Stante (11) — onde $\tilde{g}^{lm} = \delta^{lm}$ e $\tilde{g}^{L0} = \tilde{g}^{0L} = 0$ — per [**1** $(29)_{2,3}$] è $R^0{}_\varrho = 0$, e la matrice $\|R^l{}_\varrho\|$ è ortogonale. Inoltre, detto $\gamma_L{}^\varrho = \mathfrak{D}\tilde{g}_L{}^A \partial y^\varrho / \partial x^A$ il tensore complementare di deformazione [cfr. **1** (64)] è $\Delta_{LM} = \mathfrak{D}^2 \gamma_L{}^\varrho \gamma_M{}^\sigma \Delta^*_{\varrho\sigma}$ [cfr. **1** $(109)_1$]. Allora, stante (11), in base a $(7)_{2,3}$, alla proprietà d'isotropia (9) e a $(61)_2$, da $(61)_1$ segue

$$(62) \quad \tilde{X}^{LM}(\mathfrak{D}^{-1}k^*, T, \Delta_{LM}, u^L, g_{LM}) = \mathfrak{D}^{-1}\alpha^L{}_\varrho \alpha^M{}_\sigma Y^{\varrho\sigma}(T, \varepsilon_{\varrho\sigma}, \mathfrak{D}^2\gamma_L{}^\varrho\gamma_M{}^\sigma \Delta^*_{\varrho\sigma})\,.$$

---

(29) Di massima gli indici latini si riferiscono al cronotopo U e quelli greci allo spazio S_3^*. Vedi pure la annotazione (11).

Per il carattere tensoriale della precedente relazione essa vale in sistemi di coordinate nel cronotopo U e in S_3^* qualsiasi.

È facile convincersi che la proprietà d'isotropia (9) è essenziale per la rappresentabilità di $\tilde{X}^{LM}(k, T, \Delta_{LM}, u^L, g_{LM})$ nella forma (62) in quanto questa implica (9).

Si consideri ora un fluido perfetto [Def. 7.1] cosicchè si ha $X^{LM} = -p\tilde{g}^{LM}$ onde per $(74)_1$, (64), $(15)_3$, (72) e (71) di [**1**], segue:

$$(63)\qquad Y^{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_L{}^\varrho\gamma_M{}^\sigma X^{LM} = -\mathfrak{D}^{-1}\gamma_L{}^\varrho\gamma^{L\sigma}p = \mathfrak{D}^{-1}C^{\varrho\sigma} = p\,\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}}\,.$$

Per [**1** (50)] e [**1** (141)] è $\mathfrak{D} = \mathrm{d}C/\mathrm{d}C^* = k^*/k$ onde $\partial\mathfrak{D}/\partial k = -k^*k^{-2}$ cosicchè pensando $k = k^*\mathfrak{D}^{-1}$ e $\mathfrak{D}$ come funzioni delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ [cfr. **1** (20), **1** (70)], da (63) e $(45)_1$ segue:

$$(64)\quad Y^{\varrho\sigma} = \left[k^2\,\frac{\partial F(k^*\mathfrak{D}^{-1},\,T)}{\partial\mathfrak{D}}\,\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial k}\right]\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}} = -k^*\,\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{D}}\,\frac{\partial\mathfrak{D}}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}} = -k^*\,\frac{\partial F(\varepsilon_{\alpha\beta}\,T)}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}}\,.$$

In base a (64) e $(45)_2$, in armonia con cose note nel caso classico, si riconosce facilmente che in relatività un fluido perfetto [Def. 7.1] è un particolare materiale elastico in senso lato (in ogni intervallo termico) secondo [**1**, Def. 20.1]. Dunque si possono applicare ai fluidi perfetti vari risultati ottenuti in [**3**], in particolare la formula [**3** (37)] qui ottenuta per via diretta.

Bibliografia.

[1] A. Bressan, *Una teoria di cinematica dei sistemi continui in relatività generale.* Annali di matematica pura ed applicata (in corso di stampa).

[2] A. Bressan, *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale.* Rend. Sem. Mat. Univ. Padova (in corso di stampa).

[3] A. Bressan, *Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in relatività generale.* Riv. Mat. Univ. Parma (in corso di stampa).

[4] C. Cattaneo, *Sulla conduzione del calore.* Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, **3**, (1948-49), p. 83.

[5] C. Cattaneo, *Introduzione alla teoria einsteiniana della gravitazione,* Veschi, Roma 1960-61.

[6] C. Eckart, *The thermodynamics of Irreversible Processes, III* (Relativistic theory of the Simple fluid), Physical Review **58** (1940), p. 919.

[7] B. FINZI e M. PASTORI, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, Zanichelli, Bologna 1961.

[8] V. FOCK, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, 1959.

[9] A. LICHNEROWICZ, *Theories relativistes de la gravitation et de l'électromagnetisme*, Masson et C.ii, Paris 1955.

[10] W. NOLL, *On the continuity of the solid and fluid states*, J. Math. Mech. **4** (1955).

[11] PHAM MAU QUAN, *Sur une theorie relativiste des fluides thermodynamiques*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **38** (1955).

[12] PHAM MAU QUAN, *Etude electromagnetique et thermodynamique d'un fluide relativiste chargé*, J. Rat. Mech. **5** (1956).

[13] PHAM MAU QUAN, *Thermodynamique d'un fluide relativiste*, Boll. Un. Math. Ital. (3) **15** (1960).

[14] A. SIGNORINI, *Lezioni di fisica matematica*, Veschi, Roma 1949-50 (parte II).

[15] A. SIGNORINI, *Lezioni di fisica matematica*, Veschi, Roma 1952-53.

[16] L. SYNGE, *Relativity: the general theory*, North Holland Publishing Co., Amsterdam 1960.

[17] D. VAN DANTZIG, *On the thermohydrodynamics of perfectly perfect fluid*, Proc. Kond. Ned. Akad. v. Wetensch., Amsterdam **43** (1940).

* * *