Riv. Mat. Univ. Parma (2) 4 (1963), 23-40

ALDO BRESSAN (*)

Onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici con deformazioni finite in relatività generale. (**)

1. - Introduzione.

Nel mio lavoro [2] si costruisce tra l'altro, una teoria dell'elasticità a base termodinamica in relatività generale (¹). A quanto mi consta, per ora, quel lavoro è l'unico in cui, tra l'altro, si tratti l'elasticità in relatività generale considerando deformazioni finite (²). In [1] e [2] si usa largamente il punto di vista lagrangiano e le formule a cui si arriva hanno un aspetto del tutto simile a quello delle analoghe classiche e, spesso, usando coordinate localmente proprie e geodetiche (³) esse sono poste in una forma per cui appaiono chiaramente le dif-

---

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Padova, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 7 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno accademico 1961-62.

Ricevuto il 6-V-1963.

(¹) Tale lavoro si basa sulla Memoria [1]. Talvolta denoterò, ad esempio, la annotazione (⁵) di [1], la formula (7) di [2] e il n. 4 di [3] ordinatamente con [1, annotazione (⁵)], [2, (7)] e [3, n. 4].

(²) A quanto mi consta, le altre teorie di elasticità in relatività generale — costruite nei lavori [10] e [8], di cui il secondo è in corso di stampa [1, annotazione (¹)] — appartengono al caso puramente meccanico e lineare (legge di HOOKE). In essi, tra l'altro, si calcolano le velocità di propagazione $V_{(l)}$. Nel caso di mezzi isotropi si trovano per $V_{(l)}$ valori (relativistici) che coincidono con quelli classici esattamente, in [10], o approssimativamente, in [8]. In [8, n. 4] si scrivono anche le equazioni delle ipersuperfici di discontinuità nel caso anisotropo. Vedi pure le annotazioni (⁷) e (⁸) in [1] e le annotazioni (⁴) e (⁵) in [2].

(³) Un riferimento (x) nel cronotopo $\mathfrak{A}$ sarà detto *localmente proprio* e *geodetico* nel punto evento E se ivi la metrica cronotopica assume la forma pseudopitagorica, i simboli di CHRISTOFFEL si annullano e inoltre si ha $u^L = \delta^L_0$, ove u^L è la 4-velocità dx^L/ds della materia e δ^L_M è il simbolo di KRONECKER.

ferenze che tali formule presentano rispetto alle analoghe classiche in coordinate cartesiane.

Giovandomi essenzialmente dei lavori [1] e [2] studio, in relatività generale, le onde ordinarie di discontinuità nei mezzi elastici anche anisotropi (ed inomogenei) con deformazioni finite e in processi adiabatici (ed isoentropici) in assenza di campo elettromagnetico. Ciò mi sembra interessante, tra l'altro, in quanto vengono messi in luce aspetti qualitativamente nuovi delle onde elastiche relativistiche, aspetti che nelle altre teorie relativistiche dell'elasticità (per deformazioni infinitesime) o non sussistono (v. [10]) o non sono mai state considerate (v. [8] e cfr. annotazioni (²) e (⁶)).

Dapprima considero la rappresentazione lagrangiana di un'onda nel cronotopo $\mathfrak{A}$, usando un certo spazio astratto S_3^* introdotto in [1], e stabilisco la relazione tra la velocità lagrangiana V^* di propagazione (o di avanzamento) e la corrispondente velocità euleriana di propagazione V. Indi riprendo da [2] una certa forma lagrangiana delle equazioni dinamiche dei sistemi continui nella quale, tra l'altro, è messo in evidenza come la massa inerziale a riposo in generale vada rappresentata da un tensore q_{ih} il quale nel caso di pura pressione p ($p \geqslant 0$ ed anche < 0) è isotropo, ossia rappresentabile con uno scalare come in Fisica classica (solo in assenza di sforzi la detta massa coincide con quella gravitazionale). A tale tensore si può (e conviene) associare un ellissoide che dirò *ellissoide relativistico d'inerzia.*

In connessione con quanto sopra risulta che, in generale, in corrispondenza alla generica direzione N_ϱ^* di propagazione (in S_3^*) le eventuali discontinuità non sono dirette secondo gli assi principali della quadrica di polarizzazione (della teoria classica) ma secondo i raggi intersecanti questa e l'ellissoide relativistico d'inerzia in punti a piani tangenti paralleli.

Riguardo a questioni di realtà della velocità V^* risulta che nella presente teoria relativistica valgono teoremi analoghi a teoremi di Fisica classica (⁴), purchè le tensioni non siano estremamente grandi se hanno carattere di trazione. Dette $V^{*(c)}$ e $V^{(c)}$ le velocità classiche corrispondenti a V^* e V rispettivamente, nel caso di uno stato tensionale di pura pressione p ($p \gtrless 0$) si trova, anche riferendosi a solidi anisotropi (cfr. annotazione (¹⁷) al n. 6):

$$V^{*(c)}/V^* = V^{(c)}/V = \sqrt{1 + (p/c^2\mu)} = \sqrt{(\mu + c^{-2}p)/\mu}\,,$$

(⁴) Al n. 6 risulta chiaro come trasportare le considerazioni svolte nel presente lavoro ai corpi elastici — eventualmente privi di energia di deformazione — cui si riferisce la teoria non relativistica della propagazione ondosa svolta in [13]. Precisamente, nella annotazione (¹⁶) si dicono brevemente ma, mi sembra, concretamente, alcuni risultati a cui si arriva mediante il detto trasporto.

ove c è la velocità della luce nel vuoto e μ la densità ([5]). È interessante notare che il caso relativistico differisce da quello classico per la sostituzione della massa inerziale classica $\mu\, \mathrm{d}C$, eguale a quella gravitazionale, con la massa inerziale relativistica $(\mu + c^{-2}p)\, \mathrm{d}C$. Dunque usare V^* in luogo di $V^{*(c)}$ è esattamente l'analogo per la propagazione ondosa di quanto si fa riguardo alle equazioni dinamiche dei sistemi continui passando dal caso classico a quello relativistico (v. [**6**, pag. 475]).

Mi è sembrato interessante considerare anche le onde principali attraverso il generico materiale isotropo comunque deformato, in quanto anche in tal caso, pur essendo in generale non sferico l'ellissoide relativistico d'inerzia, tuttavia le discontinuità hanno le stesse direzioni che nel caso classico e per i vari possibili valori del rapporto $V^{*(c)}/V^* = V^{(c)}/V$ sussistono formule del tipo di quelle sopra considerate nel caso di pura pressione.

Infine pongo in forma completamente lagrangiana le equazioni che danno V^* e le discontinuità in modo che, oltre a V^*, anche le direzioni (lagrangiane) delle dette discontinuità vengano determinate mediante la deformazione locale (indipendentemente dalla rotazione). Inoltre la suddetta forma ha il vantaggio di avere carattere tensoriale.

Uso in generale espressioni degli sforzi e di altre grandezze in forma mista (di KIRCHHOFF-PIOLA) riferite allo spazio tangente ad $\mathfrak{U}$ e normale alla 4-velocità $u^L = \mathrm{d}x^L/\mathrm{d}s$. Ciò è utile, tra l'altro, per vedere, direi passo passo, le piccole differenze rispetto all'analogo classico.

Infine mostro come porre le suddette espressioni miste in forma invariante e osservo che, però, ciò può dar luogo a qualche appesantimento della trattazione.

I procedimenti usati in questo lavoro per studiare le onde di discontinuità sono permessi dalla teoria svolta in [**1**] e [**2**] e, a differenza di quelli usati negli

---

([5]) Al centro del sole si ritiene $p = 1{,}2.10^{17}$ dine cm^{-2} e $\mu = 76$ gr cm^{-3} onde $p\varrho^{-1} = pc^{-2}\mu^{-1} = 1{,}2.10^{17}(76.9.10^{20})^{-1} \cong 0{,}2.10^{-5}$.

Non è escluso che per qualche stella $pc^{-2}\mu^{-1}$ assuma valori maggiori.

Al centro del sole si ritiene applicabile l'equazione dei gas perfetti in processi adiabatici $p\mu^{-\gamma} = p_0\mu_0{}^{-\gamma}$ con $\gamma \cong 1{,}4$. Nel caso considerato, al fine di fare una qualche valutazione dell'ordine di grandezza della correzione relativistica apportata usando la formula

$$V = V^{(c)}\left(1 + \frac{p}{c^2\mu}\right)^{-\frac{1}{2}} \simeq V^{(c)} - \frac{p}{2c^2\mu}\, V^{(c)}\,,$$

possiamo ritenere valida la classica formula di LAPLACE $V^{(c)} = \sqrt{\gamma p/\mu}$. Ne risulta $V_{(c)} \simeq (1,\ 4 \cdot 1{,}2 \cdot 10^{17}/76)^{\frac{1}{2}} \simeq (0{,}02 \cdot 10^{17})^{\frac{1}{2}} \simeq 4 \cdot 10^7$ (cm sec^{-1}) onde $V^{(c)}p(2c^2\mu)^{-1} \simeq 0{,}4 \cdot 10^2 \simeq 40$ (cm sec^{-1}). Dunque la considerata correzione risulta di circa 0,4 m/sec $\simeq$ 1,5km/h.

altri lavori di relatività concernenti il problema delle onde nei solidi e dei quali sono a conoscenza, sono molto simili a procedimenti comuni in Fisica classica. Ciò agevola i confronti tra i risultati classici e i relativistici e anche permette una certa economia di pensiero. Per esempio tale metodo suggerisce, direi, i corrispondenti relativistici di vari teoremi classici concernenti la quadrica di polarizzazione (6) e ciò, tra l'altro, contribuisce a mostrare la duttilità e l'utilità della teoria di cinematica relativistica dei sistemi continui svolta in [**1**].

2. - Preliminari. Sulla rappresentazione lagrangiana di onde nel cronotopo. Velocità lagrangiana di propagazione.

Sia φ^* una configurazione (di riferimento) di un corpo continuo K in uno spazio astratto S_3^*, reale tridimensionale ed euclideo, e C^* la regione occupata in questo (7).

Convengo che gli indici maiuscoli varino da 0 a 3 e quelli minuscoli da 1 a 3. Inoltre, di massima, gli indici greci si riferiscano ad S_3^* e quelli latini al cronotopo $\mathcal{U}$ (insieme di punti eventi).

Sia $ds^{*2} = a^*_{\varrho\sigma}\, dy^\varrho\, dy^\sigma$ la metrica in S_3^* e y^ϱ il punto corrispondente in φ^* al generico elemento materiale ε del corpo K. Sia $ds^2 = g_{LM}\, dx^L\, dx^M$ la metrica cronometrica di $\mathcal{U}$, di segnatura -2 [**1** n. 2] cosicchè, detto δ_{LM} il simbolo di Kronecker e posto $\delta'_{lm} = -\delta_{lm}$ e $\delta'_{L0} = \delta'_{0L} = \delta_{0L}$, il ds^2 è localmente riducibile alla forma $\delta'_{LM}\, dx^L\, dx^M$.

Indicando con c la velocità della luce nel vuoto (8) e con s il tempo proprio

---

(6) Ad esempio in [8], le funzioni incognite di cui si studiano le discontinuità sono i coefficienti g_{LM} della metrica, sia in connessione con le onde elastiche che con quelle gravitazionali.

In [1] si è introdotta una rappresentazione $x^L = x^L(t, y^1, y^2, y^3) (L = 0, \dots, 3)$ del moto, analoga a quella usuale in Fisica classica, cosicchè in questo lavoro ho potuto riferirmi alle discontinuità delle derivate di tali funzioni, discontinuità che caratterizzano solo onde elastiche. Basandosi sulle g_{LM} mi sembra più difficile arrivare ai corrispondenti relativistici dei teoremi classici connessi con la quadrica di polarizzazione e in particolare con gli assi acustici. Ad ogni modo, a quanto mi consta, tali corrispondenti non erano stati mai considerati, prima del presente lavoro, nemmeno nel caso particolare di deformazioni infinitesime (legge di Hooke).

(7) Trattasi in effetti di una rappresentazione del corpo K in S_3^*, v. [**1**, n. 3].

(8) Mi riferisco ad una misura locale in centimetri e secondi, fatta ad esempio col metodo di Fizeau in un laboratorio inerziale. Tale misura è da ritenersi indipendente dal campo gravitazionale, per esempio, in base ad un principio di indistinguibilità fisica locale di due arbitrari riferimenti, localmente inerziali (geodetici) in due punti eventi E ed E' eventualmente distinti (si tratta di riferimenti *liberamente cadenti* in E o E').

römeriano, il moto $\mathfrak{M}$ del considerato corpo continuo sia rappresentato dalle funzioni:

$$\text{(1)} \qquad x^L = x^L(t,\ y^1,\ y^2,\ y^3) \quad \text{con} \quad x^0 = s = ct,$$

continue ovunque con le derivate prime e a tratti con le derivate seconde.

Evidentemente ([1, n. 4]) le equazioni (1) rappresentanti il moto $\mathfrak{M}$ sono indeterminate per una sostituzione $t = \bar{t} + \bar{\varphi}(y^1, y^2, y^3)$ del parametro temporale t. Allora, fissato il punto evento E, si può scegliere il riferimento (x) in $\mathfrak{V}$ e il considerato parametro temporale in modo che, detta u^L la 4-velocità dx^L/ds di ε, in E sia [9]

$$\text{(2)} \qquad g_{LM} = \delta'_{LM}, \qquad u^L = \delta^L_0, \qquad \left\{ {L \atop AB} \right\} = 0\,, \qquad u^L \frac{\partial x^L}{\partial y^\varrho} = 0 \ (\text{in } E)\,.$$

Consideriamo in $\mathfrak{V}$ un'ipersuperficie $\sum$ (onda). In $\mathfrak{V}$ e, stante $(1)_1$, in S_3^* essa può rappresentarsi rispettivamente mediante le equazioni

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} f(x^0, \ldots, x^3) \equiv \bar{f}(t,\ x^1,\ x^2,\ x^3) = 0 \\[2ex] f^*(t,\ y^1,\ y^2,\ y^3) \equiv f[x^L(t,\ y)] = 0\,. \end{cases}$$

Poichè in E il riferimento (x) è *localmente proprio* $[(2)_2]$ *e geodetico* $[(2)_{1,3}]$, in E la velocità $V(V \geqslant 0)$ di propagazione — ossia quella di avanzamento rispetto ad un osservatore solidale al riferimento (x) — è espressa, com'è noto, da:

$$\text{(4)} \qquad V^2 = \frac{(\bar{f}_t)^2}{\sum_i (\bar{f}x_i)^2} = \frac{c^2(u^L f_{/L})^2}{-\tilde{g}^{LM} f_{/L} f_{/M}}\,, \qquad \text{ove} \quad \tilde{g}^{LM} = g^{LM} - u^L u^M\,.$$

---

(9) Ammettendo $s = ct$, ma prescindendo dalla condizione $x^0 = s$ $[(1)_2]$, si può ovviamente fare in modo che in E valgano $(2)_{1,2,3}$. Inoltre si ammetta, come è lecito, $s = 0$ per $x^0 = \psi^0(E)$ ove la funzione ψ^L associa ad ogni punto evento l'L- ma sua coordinata nel sistema (x); inoltre si pensi x^0 come una funzione $x^0(s, x^1, x^2, x^3)$ di s, x^1, x^2, x^3. Da $u^L u_L = 1$ segue $u^L_{/M} u_L = 0$, onde per $(2)_{1,2,3}$ in E è $u^0_{/M} = 0$, onde $0 = u^0/_m = \partial u^0/\partial x^m = \partial^2 x^0/\partial s \partial x^m$ e $0 = u^0_{/0} = (\partial u^0/\partial s)\partial s/\partial x^0 = \partial^2 s/\partial x^0 \partial x^0$. Dunque in E sono nulle tutte le derivate prime e seconde della funzione $x^0 = x^0(s, x^1, x^2, x^3)$, eccetto $\partial x^0/\partial s = 1$. Ne segue che, posto $\bar{x}^0 = s$ e $\bar{x}^l \equiv x^l$, per il sistema $(\bar{x})$ in E valgono $(2)_{1,2,3}$. Dunque le $(2)_{1,2,3}$ sono compatibili con $(1)_2$. Si può poi certo scegliere il parametro t in modo che, oltre a $(1)_1$, valga $(2)_4$ in E, v. [1, (12)].

Si noti che la continuità delle $\partial g_{LM}/\partial x^A$ e $\partial^2 g_{LM}/\partial x^A \partial x^B$, implicita nei precedenti ragionamenti, sussiste anche ove le derivate seconde delle funzioni $(1)_1$ sono discontinue in quanto in [2, (90)] e [2, (91)] figurano solo le derivate prime delle $(1)_1$, supposte continue.

Si riprenda il gradiente di deformazione $\alpha^L_{\ \varrho} = \tilde{g}^L_{\ A}\, \partial x^A/\partial y$ inerente al moto $(1)_1$ e il tensore complementare di deformazione $\gamma_L^{\ \varrho}$ ([**1**, (55); **1**, (63)]) che non dipende dalla scelta del parametro temporale t, al pari di $\alpha^L_{\ \varrho}$ e del rapporto $\mathfrak{D} = \mathrm{d}C/\mathrm{d}C^*$ ([**1**, (49); **1**, (50)]) fra gli elementi di volume corrispondenti ([**1**, n. 9]) $\mathrm{d}C^*$ e $\mathrm{d}C$ situati in S_3^* e rispettivamente in $\mathfrak{A}$. Stante (2), per [**1**, (64)] e [**1**, (61)] con $-g = a^* = 1$, in E è:

$$(5) \qquad \gamma_i^{\ \sigma} = \mathfrak{D}\, \frac{\partial y^\sigma}{\partial x^i}\,, \quad \gamma_0^{\ \sigma} = 0\,; \qquad \mathfrak{D} = \frac{\partial(x^1,\, x^2,\, x^3)}{\partial(y^1,\, y^2,\, y^3)} \ (\text{in } E)\,.$$

Allora supposto, com'è lecito, $a^*_{\varrho\sigma} \equiv \delta_{\varrho\sigma}$ e introdotta la velocità lagrangiana di avanzamento V^* relativa alla configurazione φ^*, per (3) si ha:

$$(6) \qquad \bar{f}_{x^i} = \mathfrak{D}^{-1} f^*_{y\sigma}\, \gamma_i^{\ \sigma} = \frac{|\, f_t^* \,|\, \gamma_i^{\ \sigma} N_\sigma^*}{\mathfrak{D} V^*}\,, \qquad f_t^* = \bar{f}_t$$

ove:

$$(7) \qquad V^{*2} = \frac{f_t^{*2}}{\sum\limits_\sigma (f^*_{y\sigma})^2}\,, \qquad N_\sigma^* = f^*_{y\sigma} \Big/ \sqrt{\sum_\sigma (f^*_{y\sigma})^2}\,.$$

Per $(6)_{1,2}$ la normale in E ad u^L e alla superficie:

$$f(x^0,\, \ldots,\, x^3) = 0\,, \qquad x^0 = \psi^0(E) = \text{cost}$$

[cfr. annotazione (9)] ha coseni direttori N_L proporzionali a $\gamma_l^{\ \sigma} N_\sigma^*$. Dunque si può dire che *un'onda propagantesi in S_3^* secondo la direzione N_σ^* con velocità V^* rappresenta, in connessione col moto* (1), *un'onda propagantesi in $\mathfrak{A}$ nella direzione N_L con la velocità* [(4), (6)]:

$$(8) \qquad V = V^* \mathfrak{D} (-\gamma_L^{\ \varrho} \gamma^{L\sigma} N_\varrho^* N_\sigma^*)^{-\frac{1}{2}}\,.$$

Introdotti il tensore di deformazione $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, quello di CAUCHY-GREEN $C_{\varrho\sigma}$ e il suo inverso $\overset{-1}{C}{}^{\varrho\sigma}$ mediante le eguaglianze ([**1**, (20)]):

$$(9) \qquad C_{\varrho\sigma} = a^*_{\varrho\sigma} + 2\varepsilon_{\varrho\sigma} = -g_{LM}\, \alpha^L_{\ \varrho} \alpha^M_{\ \sigma}\,, \qquad \overset{-1}{C}{}^{\varrho\tau} C_{\sigma\tau} = \delta^\varrho_{\ \sigma}\,,$$

per [**1**, (72)] la (8) diviene la formula:

$$(10) \qquad V = V^* \Big/ \sqrt{\overset{-1}{C}{}^{\varrho\sigma} N_\varrho^* N_\sigma^*}\,,$$

ove figurano solo indici greci, ossia lagrangiani. Essa vale inalterata nel caso classico e ha rispetto ad (8) il vantaggio di fare intervenire solo il tensore di deformazione $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ con $\delta_{\cdot\sigma} + 2\varepsilon_{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}_{\varrho}{}^{\tau}\mathfrak{D}_{\tau\sigma}$ ([**1**, (25)]) — ove $\mathfrak{D}_{\varrho\sigma}$ è la deformazione pura figurante nella decomposizione $\alpha^L{}_\varrho = R^L{}_\varrho \mathfrak{D}^\varrho{}_\sigma$ [**1**, $(26)_1$] del tensore $\alpha^L{}_\varrho$ — e non la rotazione locale $R^L{}_\varrho$, mentre invece si ha $\gamma_L{}^\varrho = -\mathfrak{D}\overset{-1}{R}_{L\sigma}\mathfrak{D}^{\varrho\sigma}$ [**1**, (65)] ove $\overset{-1}{\mathfrak{D}^{\varrho\sigma}}\mathfrak{D}_{\varrho\tau} = \delta^\sigma_\tau$ e $\mathfrak{D}$ può esprimersi mediante $\mathfrak{D}_{\varrho\sigma}$ ([**1** $(70)_2$]).

3. - Forma invariante delle precedenti relazioni rispetto a cambiamenti dei riferimenti in $\mathfrak{A}$ e in S_3^* e del parametro temporale.

Se i riferimenti in $\mathfrak{A}$ e in S_3^* e il parametro temporale sono generici, $\mathfrak{D}$ ha ([**1**, (49)]) l'espressione:

$$\mathfrak{D} = \sqrt{\frac{-g}{a^*}}\, \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(t, y^1, y^2, y^3)}\, \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}y}, \quad \text{ove } a^* = \det\|a_{\varrho\sigma}\|, \; g = \det\|g_{LM}\|. \tag{11}$$

Per la definizione [**1**, (11)] di derivata assoluta rispetto all'arco cronotopico e per [**1**, (111'))], stante la seconda delle identità (3) si ha:

$$u^L f_{/L} = \frac{\mathrm{D}f}{\mathrm{D}s} = \frac{\partial f^*}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} \qquad \left[\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s} = c^{-1} \text{ per } s \equiv ct\right]. \tag{12}$$

Per la definizione [**1**, (98)] di derivata lagrangiana trasversa [10], per [**1**, (99)] e per la suddetta identità, comunque si sia scelto il parametro temporale si ha:

$$f_{|\varrho} = f^*_{|\varrho} = f^*_{/\varrho} - \frac{\partial f^*}{\partial t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\, u_H \frac{\partial x^H}{\partial y^\varrho} \qquad (f_{|\varrho} = f_{/R}\,\alpha^R{}_\varrho). \tag{13}$$

Allora, in base a $(7)_1$ e (12), per $a^*_{\varrho\sigma} \equiv \delta_{\varrho\sigma}$, stante (2), è:

$$V^* = (\overset{-1}{C^{\varrho\sigma}} f^*_{|\varrho} f^*_{|\sigma})^{-1/2}\, c \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}s}\frac{\partial f^*}{\partial t}\right|, \qquad N^*_\varrho = (a^{*\sigma\tau} f^*_{|\sigma} f^*_{|\tau})^{-1/2} f^*_{|\varrho}. \tag{14}$$

---

[10] Denoto con $T^{\cdots}_{\cdots/R}$ la derivata tensoriale in $\mathfrak{A}$ e con $T^{\cdots}_{\cdots/\varrho}$ quella in S_3^*. Nel semplice caso di una funzione scalare $F(x, y, t)$ il valore in E della derivata lagrangiana trasversa $F_{|\varrho}$ si ottiene, per definizione, passando alla funzione $F^*(t, y)$ mediante $(1)_1$, facendo sul parametro t una sostituzione $t = \bar{t} + \bar{\varphi}(y^1, y^2, y^3)$ in modo che in E valga $(2)_4$, e calcolando il derivato tensoriale $\bar{F}^*_{/\varrho}$ di $\bar{F}^*(\bar{t}, y) \equiv F^*(t, y)$.

Inoltre il terzo membro di (4) è invariante per cambiamenti dei riferimenti in $\mathfrak{A}$ e in S_3^* e del parametro temporale [anzi in $f(x)$ questo non figura]. La stessa invarianza (di cui nel titolo) vale per i membri di (12), (13) e $(14)_2$ e per lo scalare secondo membro di $(14)_1$, in base a cose dette in [**1**]. Dunque stanti (11) e (13) *l'espressione* $(14)_1$ *della velocità lagrangiana di avanzamento e la relazione* (8) *valgono*, al pari della relazione (10), *per ogni rappresentazione* $(1)_1$ *del moto* $\mathfrak{M}$ *anche prescindendo da* $(1)_{2,3}$.

Si noti che per (12), stante $(14)_2$, la direzione di S_3^* individuata da N_ϱ^* coincide con quella del gradiente di $f^*(t, y^1, y^2, y^3)$ rispetto a y^ϱ se vale $(2)_4$, mentre *tale coincidenza non sussiste, in generale, se* $(2)_4$ *non vale.*

Quanto precede ha, mi sembra, un certo interesse anche perchè, diversamente da quanto accade nel caso classico, in generale non si può scegliere il parametro temporale in modo che $(2)_4$ valga ovunque. Analogamente $V^*[(14)_1]$ è, in generale, la velocità d'avanzamento dell'onda $f^*(t, y^1, y^2, y^3) = 0$ se e solo se vale $(2)_4$.

4. - Preliminari dinamici.

Suppongo ora che il considerato corpo K sia elastico in senso lato ([11]) ([**2**, def. 20.1]).

Sia $\varrho = \varrho(\varepsilon_{\varrho\sigma}, T, y^\sigma)$ la densità propria attuale della massa gravitazionale a riposo dell'elemento ε, moltiplicata per c^2. Sia $\varrho^* = \mathfrak{D}\varrho$ la corrispondente densità lagrangiana ($\varrho^*\, \mathrm{d}C^* = \varrho\, \mathrm{d}C$) anch'essa funzione delle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, T e y^ϱ, v. [**1**, (70)]. Siano k e k^* ciò che divengono ϱ e ϱ^* rispettivamente per $\varepsilon_{\varrho\sigma} = 0$ e $T = T^*$, ove T^* è una temperatura di riferimento, per fissare le idee quella di zero gradi centigradi ([**1**, n. 19]). Dico che k e k^* sono *la densità propria e rispettivamente lagrangiana della massa convenzionale a riposo.* Detta inoltre w l'energia interna specifica di massa, si ha [**2**, (101)]:

$$\varrho^* = k^*(c^2 + w), \quad \varrho^* = \mathfrak{D}\varrho, \quad k^* = \mathfrak{D}k\,. \tag{15}$$

Mi limito a considerare processi adiabatici, ossia suppongo identicamente nullo il tensore termodinamico ($Q_{LM} \equiv 0$ in K), v. [**2**, (12); **2**, (13); **2**, (16)]. Inoltre escludo la presenza del campo elettromagnetico all'interno del corpo K. Di conseguenza ivi risultano nulli i tensori di MINKOWSKI e di ABRAHAM ($E_{LM} = \overline{E}_{LM} = 0$).

([11]) Sostanzialmente si ammette che gli sforzi lagrangiani dipendano dalle deformazioni $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ e dalla temperatura T nel modo ben noto ed esprimibile mediante l'energia libera.

Allora, tra l'altro, l'entropia η del generico elemento ε — occupante il punto y^ϱ in φ^* — è invariabile, ossia η dipende al più da y^ϱ cosicchè è lecito ritenerla addirittura costante rispetto a t e y^ϱ.

Detta $w(\varepsilon_{\varrho\sigma}, y^\varrho) = w^{(\eta)}(\varepsilon_{\varrho\sigma}, \eta, y^\varrho)$ l'energia interna specifica di massa (nulla per $\varepsilon_{\varrho\sigma} = 0$ e $T = T^*$), per [2, $(157)_1$] è [12]:

$$Y^{\varrho\sigma} = -k^* \frac{\partial w(\varepsilon_{\alpha\beta}, y^\beta)}{\partial \varepsilon_{\varrho\sigma}} . \tag{16}$$

Si considerino il tensore misto (di KIRCHHOFF-PIOLA) $K^{L\sigma}$ degli sforzi e quello euleriano X^{LM}, ossia (v. [1, $(78)_{2,1}$]):

$$K^{L\sigma} = \alpha^L_{\ \varrho}\, Y^{\varrho\sigma} , \qquad X^{LM} = \mathfrak{D}^{-1}\, \alpha^L_{\ \varrho}\, \alpha^M_{\ \sigma}\, Y^{\varrho\sigma} . \tag{17}$$

Stante (2), in E è [$(15)_3$, $(17)_2$]:

$$\alpha^l_{\ \varrho} = \frac{\partial x^l}{\partial y^\varrho} , \ \alpha^0_{\ \varrho} = 0 ; \qquad \frac{1}{k} X^{LM} = \frac{1}{k^*} \frac{\partial y^L}{\partial x^\varrho} \frac{\partial x^M}{\partial y^\sigma} Y^{\varrho\sigma} \qquad (\text{in } E) . \tag{18}$$

Si aggiunga che nel caso in considerazione è:

$$P^{*L} = -\mathfrak{D}\tilde{g}^L_{\ A}\, \overline{E}^{AM}_{\ \ /M} = 0 , \qquad Q^{*L} = -\mathfrak{D}\tilde{g}^L_{\ A}\, Q^{AM}_{\ \ /M} = 0 . \tag{19}$$

Allora, stanti (2), (16) e $(18)_3$ [onde in E è $g_{lm} = \delta'_{lm} = -\delta_{lm}$], in base alla conseguenza [2, (103')] delle equazioni gravitazionali, in E si ha:

$$k^* \left[\left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \delta^l_m - \frac{1}{c^2 k} X^l_{\ m} \right] \frac{\partial^2 x^m}{\partial t^2} = -\sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial}{\partial y^\varrho} \left(\frac{\partial x^l}{\partial y^\varrho}\, Y^{\varrho\sigma} \right) . \tag{20}$$

Introduco ora il gradiente ordinario (classico) x^l_ϱ di deformazione e la formazione ordinaria (classica) $\varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma}$ di deformazione, ossia:

$$x^l_\varrho = \frac{\partial x^l}{\partial y^\varrho} , \qquad \delta_{\varrho\sigma} + 2\varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma} = \sum_l x^l_\varrho\, x^l_\sigma , \tag{21}$$

---

[12] Per (9) è $\varepsilon_{\varrho\sigma} = \varepsilon_{\sigma\varrho}$, perciò intenderò $\partial f(\varepsilon_{\alpha\beta})/\partial\varepsilon_{\sigma\varrho} = [\partial \bar{f}(T_{\alpha\beta})/\partial T_{\varrho\sigma}]_{T_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}}$ ove $\bar{f}(2T_{\alpha\beta}) \equiv f(T_{\alpha\beta} + T_{\alpha\beta})$.

ela formazione ordinaria (classica) di KIRCHHOFF-PIOLA, v. [**2**, (52); **2**, (57), (16)]:

$$(22)\quad \overset{c}{K}_l{}^\sigma = \overset{c}{K}_l{}^\sigma(\varepsilon^{(c)}_{\alpha\beta}, y^\sigma) = -k^* \sum_\varrho x^l_\varrho \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma}} \quad \text{con} \quad \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma}} = \left[\frac{\partial w(\varepsilon_{\alpha\beta}, y^\alpha)}{\partial \varepsilon_{\varrho\sigma}}\right]_{\varepsilon_{\alpha\beta} = \varepsilon^{(c)}_{\alpha\beta}}.$$

Parlo di formazioni in quanto x^l_ϱ, $\varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma}$ e $\overset{c}{K}_l{}^\sigma$ non hanno carattere tensoriale. In base a $(18)_{1,2}$ e (21) e poi a [**2**, (53)], stante (2) e pensando $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e $\varepsilon^{(c)}_{\alpha\beta}$ come funzioni di y^ϱ [(9), (21)], in E si ha:

$$(23)\qquad x^l{}_\sigma = \alpha^l{}_\sigma\,, \qquad \varepsilon^{(c)}_{\alpha\beta} = \varepsilon_{\alpha\beta}\,, \qquad \frac{\partial \varepsilon^{(c)}_{\alpha\beta}}{\partial y^\varrho} = \frac{\partial \varepsilon_{\alpha\beta}}{\partial y^\varrho}\,.$$

Procedendo esattamente come nel caso classico [**3**, (17), pag. 9], stante (21) pongo $\widehat{W}(x^l_\varrho, y^\sigma) = w(\varepsilon_{\varrho\sigma}, y^\sigma)$, onde per (22) è:

$$(24)\qquad \overset{c}{K}_l{}^\sigma = -k^* \frac{\partial \widehat{W}}{\partial x^l_\sigma} \quad \text{con } \widehat{W}(x^l_\varrho, y^\sigma) = w\,(\varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma}, y^\sigma)\,.$$

Per (16), (21), (22) e (23) (cfr. [**2**, n. **7**; **2**, (103″)] e successivamente [**3**, (18), pag. 9]) in E si ha:

$$(25)\qquad \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial}{\partial y^\sigma}\left(\frac{\partial x^l}{\partial y^\varrho}\, Y_{\varrho\sigma}\right) = \sum_\sigma \frac{\partial \overset{c}{K}_l{}^\sigma}{\partial y^\sigma} = -k^* \sum_{h\varrho\sigma} \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial x^l_\varrho \partial x^h_\sigma} \frac{\partial^2 x^h}{\partial y^\varrho \partial y^\sigma} - \sum_\sigma \frac{\partial(k^* \widehat{W})}{\partial y^\sigma \partial x^l_\sigma}\,,$$

ove, eseguendo le derivazioni indicate nell'ultimo termine, nel prodotto $k^*(y^\varrho)\widehat{W}(x^l_\varrho, y^\sigma)$ *le* x^l_σ *e* y^σ *vanno considerate come dodici variabili indipendenti.*

Come nel caso classico ([**3**, (17′)]) conviene porre [(21), $(24)_2$]:

$$(26)\qquad p_{lh}^{\varrho\sigma} = \frac{\partial^2 \widehat{W}}{\partial x^l_\varrho \partial x^h_\sigma} = \sum_{\alpha\beta} x^l_\alpha\, x^h_\beta \frac{\partial^2 w(\varepsilon^{(c)}_{\alpha\beta}, y^\alpha)}{\partial \varepsilon^{(c)}_{\alpha\varrho} \partial \varepsilon^{(c)}_{\beta\sigma}} + \delta_{lh} \frac{\partial w}{\partial \varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma}}\,.$$

5. - Condizioni cinematiche e dinamiche per le onde ordinarie di discontinuità.

Riprendiamo l'ipersuperficie $\sum$ in $\mathfrak{U}$ rappresentata in $\mathfrak{U}$ dall'equazione $(3)_1$ e in S_3^* dall'equazione $(3)_2$. Supponiamo che, stante il moto (1), le funzioni $x^l = x^l(t, y^1, y^2, y^3)$ e le loro derivate prime siano ovunque continue mentre le loro derivate seconde subiscano una discontinuità di prima specie in corrispondenza a $\sum$.

Stante (2), in corrispondenza al punto evento E si può ritenere valida (7). Allora, denotando discontinuità mediante il simbolo Δ, esiste un vettore non nullo λ^H $(\lambda^H u_H = 0)$ soddisfacente le condizioni di HUGONIOT-HADAMARD:

$$(27) \quad \Delta \frac{\partial^2 x^h}{\partial t^2} = \lambda^h V^{*2}, \quad \Delta \frac{\partial^2 x^h}{\partial y^\varrho \partial y^\sigma} = \lambda^h N^*_\varrho N^*_\sigma \quad (\lambda_h = -\lambda^h, \ \lambda_0 = \lambda^0 = 0 \text{ in } E).$$

Stante (26) e tenendo conto che in (20) $X^l{}_m = - X_{lm}$, pongo:

$$(28) \quad p_{lh} = \sum_{\varrho\sigma} p_{lh}^{\varrho\sigma} N^*_\varrho N^*_\sigma = p_{hl}, \qquad q_{lh} = \left(1 + \frac{w}{c^2}\right) \delta_{lh} + \frac{1}{c^2 k} X_{lh} = q_{hl}.$$

Inoltre suppongo la funzione $w(\varepsilon_{\alpha\beta}, y^\varrho)$ continua con le derivate prime e seconde, onde tale è la $\widehat{W}(x^l_\varrho, y^\alpha)$ $[(24)_2]$. Allora da (20) e (25), stanti $(26)_1$, (27) e (28), si deducono le condizioni dinamiche sulle discontinuità:

$$(29) \qquad \sum_h q_{lh} \lambda^h V^{*2} = \sum_h p_{lh} \lambda^h \qquad (l = 1, 2, 3).$$

Evidentemente, affinchè possa essere $\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2 > 0$ occorre, e basta, che ammetta una radice positiva o nulla — onde stazionarie — l'equazione in x

$$(30) \qquad D = D(x) = \det \| p_{lh} - x q_{lh} \| = 0 .$$

6. - Ellissoide di polarizzazione ed elissoide relativistico d'inerzia. Raffronto col caso classico.

Si osservi che in $(28)_2$ si può supporre $w = 0$; basta intendere la temperatura T^* di riferimento coincidente con quella attuale T, anzichè con zero centigradi. Intendendo T^* in tal modo, risulta più espressivo, mi sembra, il confronto dei presenti risultati relativistici con quelli classici [cfr. annotazione (17)].

Inoltre nei casi concreti il termine $c^{-2}k^{-2}X^{lh}$ è molto piccolo onde per $(28)_2$ la forma quadratica $q_{lh}\, \xi^l \xi^h$ è definita positiva. Ne segue che con una trasformazione ortogonale di coordinate si può rendere $p_{lh} = p_{(l)}\delta_{lh}$, $q_{lh} = q_{(l)}\delta_{lh}$, onde le radici di (30) sono:

$$(31) \qquad V^*_{(l)} = p_{(l)}/q_{(l)} \qquad \text{per} \quad p_{lh} = p_{(l)}\delta_{lh}, \ q_{lh} = q_{(l)}\delta_{lh}.$$

In armonia con proprietà di stabilità comunemente ammesse o attorno allo stato di equilibrio naturale ([**9**, pag. 216]) oppure ovunque ([**5**, (8.3), pag. 109]), stante (26) si ha:

$$0 < \sum_{lh\varrho\sigma} p_{lh}^{\varrho\sigma} \delta x_\varrho^l \, \delta x_\sigma^h = \sum_{lh\varrho\sigma pq} p_{lh}^{\varrho\sigma} x_\varrho^p \, x_\sigma^q \delta \bar{x}_p^l \delta \bar{x}_q^h \qquad (\delta x_\varrho^l = x_\varrho^p \, \delta \bar{x}_p^l) \,, \tag{32}$$

per ogni variazione $\delta x_\varrho^l = x_\varrho^p \delta \bar{x}_p^l = x_\varrho^p (\partial v^l / \partial x^p) \, dt$ che non corrisponda ad uno spostamento rigido infinitesimo. Quanto precede vale sia nel caso classico in coordinate cartesiane che in quello relativistico in coordinate localmente proprie e geodetiche [(2)].

Fissato ad arbitrio il versore N_σ^* e detto N_L il versore del vettore $N_\varrho^* \partial y^\varrho / \partial x^L$, si può scegliere $\delta \bar{x}_p^l = (\partial v^l / \partial x^p) \, dt = c^2 u_{/p}^l \, ds$ in modo che risulti $\delta \bar{x}_p^l = \bar{\varepsilon} N_l N_p = \delta \bar{x}_l^p$ $(\bar{\varepsilon} \neq 0)$. Ne segue $\partial v^l / \partial x^p = \partial v^p / \partial x^l$ onde $[\varepsilon \neq 0]$ le $\delta \bar{x}_p^l$ non corrispondono ad uno spostamento rigido infinitesimo. Dunque per (26), (28) e (32) si ha, com' è noto, v. [**13**, (10.5)],

$$\sum_{lh} p_{lh} N_l N_h > 0 \qquad \left(N_l \, d\sigma = \mathfrak{D} \, \frac{\partial y^\varrho}{\partial x^l} \, N_\varrho^* \, d\sigma^* \right) . \tag{33}$$

Dunque, stante $(31)_2$, almeno una delle $p_{(l)}$ deve essere positiva o nulla; sia $p_{(1)} \geqslant 0$. Siccome per (28) tutte le q_{lh} differiscono di poco dall'unità, le $q_{(l)}$ sono tutte positive. Ne segue che *a meno che gli sforzi abbiano carattere di trazione e siano grandissimi* (13), *l'equazione* (30) *ha almeno una radice* $V_1^{*2} > 0$, *cosicchè* V_1^* *è reale*. In corrispondenza le equazioni (29) nelle λ^h ammettono almeno una soluzione $\lambda_{(1)}^h$ non nulla.

Nel caso classico è usato il criterio di stabilità dell'HADAMARD che implica, stante $(26)_1$, la seguente condizione di forte ellitticità (14) [**13**, (10.2), pag. 280]:

$$\sum_{lh} p_{lh} \xi^l \xi^h = \sum_{lh\varrho\sigma} p_{lh}^{\varrho\sigma} \xi^l \xi^h N_\varrho^* N_\sigma^* > 0 \qquad \text{per versori } \xi^l \text{ e } N_\varrho^* \text{ qualsiasi.} \tag{34}$$

---

(13) Precisamente basta supporre che, riferendosi alla terna principale di tensione, sia $X_{rr} > - c^2 - w$. Infatti allora per (28) la quadrica $(35)_2$ è un ellissoide.

(14) È ben noto un teorema di HADAMARD riferentesi ai corpi elastici e ripreso dal DUHEM, nel quale si afferma « Une même direction d'onde est susceptible de propager trois direction de discontinuité differentes, lesquelles sont rectangulaires entre elles dans le milieu déformé ».

Riprendendo il lavoro di HADAMARD e tenendo presente una critica del DUHEM sul procedimento dimostrativo, C. CATTANEO ha definitivamente dimostrato in [4] che se uno stato di equilibrio elastico (con defoimazioni finite) sod lisfa la condizione di stabilità globale dell'HADAMARD, allora la quadrica di polarizzazione è ovunque ellissoidica. Precedentemente, ponendosi nell'ambito dell'elasticità di 2° grado di SIGNORINI, C. TOLOTTI aveva mostrato con un esempio l'esistenza di relazioni sforzi-deformazione che danno luogo ad una quadica di polarizzazione non ellissoidica. Si tratta di casi corrispondenti a stati di equilibrio forzato, certamente non stabili secondo l'HADAMARD.

Stante $(31)_2$ ne segue $p_{(l)} > 0$ $(l = 1, 2, 3)$ onde, per quanto si è detto su $q_{(l)}$ e per (31), *nel caso* (34) *vi sono tre velocità di propagazione* $V^*_{(l)}$ *reali* (*eventualmente coincidenti*). Ciò è analogo ad un noto risultato della teoria classica valido nel caso qui considerato, in cui cioè esiste un potenziale elastico, cosicchè il tensore acustico p_{lh} è simmetrico (come risulta per esempio da [**13**, pag. 180].

Anche prescindendo da (34), se $V^*_{(l)} > 0$, *ogni soluzione non nulla* $\lambda^h_{(l)}$ *delle equazioni* (29) *con* $V^* = V^*_{(l)}$ *rappresenta* (*l'ampiezza di*) *una possibile discontinuità ordinaria propagantesi nella direzione* N^*_l *con velocità* $V^*_{(l)}$. Stanti (26) e (28) *gli assi acustici* (*euleriani*) *ossia quelli paralleli alle soluzioni* $\lambda^h_{(l)}$ *di* (29) *e passanti per il centro comune O degli ellissoidi*

$$(35) \qquad p_{lh}\xi^l\xi^h = 1 \,, \qquad q_{lh}\xi^l\xi^h = 1 \,,$$

sono gli assi per O intersecanti i due detti ellissoidi in punti a piani tangenti paralleli.

Come nella corrispondente teoria classica, dirò la quadrica $(35)_1$ *quadrica di polarizzazione.*

Da (20) risulta ([**2**, n. 12]), che kq_{lm} ha il significato di *tensore d'inerzia* (per unità di configurazione attuale). Solo nel caso di pura pressione ($X^{LM} = -p\tilde{g}^{LM}$, [**2**, n. 11]) esso *si riduce alla propria parte isotropa*:

$$(36) \qquad q_{lh} = \frac{1}{c^2k}(\varrho + p)\delta_{lh} \qquad \text{con } \varrho = k(c^2 + w) \qquad (X^{LM} = -p\tilde{g}^{LM}) \,,$$

ove ϱ è la densità propria di massa gravitazionale (vera a riposo); dunque nel detto caso la densità di massa inerziale relativistica è rappresentata da uno scalare come in Fisica classica. Per quanto precede mi sembra opportuno chiamare l'ellissoide $(35)_2$ *ellissoide relativistico d'inerzia* ([15]).

Per il considerato elemento materiale ε — a potenziale elastico e quindi a tensore acustico p_{lh} simmetrico — in corrispondenza ad ogni direzione N^*_ϱ di propagazione esistono almeno tre assi acustici mutuamente ortogonali. Di questi,

---

([15]) Tale ellissoide non ha nulla a che fare con relativizzazioni dell'ellissoide d'inerzia usato, per esempio, nella teoria classica del corpo rigido. L'ellissoide relativistico d'inerzia si riferisce al generico elemento materiale ε e ne caratterizza, assieme a k^*, le proprietà inerziali. Precisamente, ε oppone una certa resistenza nel prendere un'accelerazione propria $a^L = u_{L/M}u^{-L} = \mathrm{D}u^M/\mathrm{D}s$ e il suddetto ellissoide descrive, prescindendo da k^*, come tale resistenza dipenda dalla direzione di a^L.

sotto la considerata condizione di stabilità involgente (32) almeno uno è *effettivo* — cioè ad esso corrisponde una velocità di propagazione reale. Sotto la condizione (34) di forte ellitt cità ogni asse acustico è effettivo [16].

7. - Stati di pura pressione. Materiali isotropi. Raffronto col caso classico.

Considero uno stato di pura pressione $[X^{LM} = -p\tilde{g}^{LM}$ con $p \gtreqless 0]$. Da cose già dette, in particolare riguardo a (36), risulta che essendo in tal caso l'ellissoide relativistico d'inerzia sferico, *gli assi acustici (euleriani) sono quelli principali dell'ellissoide di polarizzazione* $(35)_1$ (tale fatto, mentre accade di regola in Fisica classica, ha luogo solo in casi particolari nella presente teoria relativistica).

Tenendo conto di (26), (28), (31) e (36) e facendo $w = 0$, si trova che in uno stato di pura pressione la velocità relativistica $V^*_{(l)}$ di propagazione è legata alla corrispondente velocità classica $V^{*(c)}_{(l)}$ dalla relazione $V^{*'}_{(l)} = V^{*(c)}_{(l)}(1 + p\varrho^{-1})^{-\frac{1}{2}}$. Allora, in base all'eguaglianza (10) — avente senso e validità anche nel caso classico — detto $V^{(c)}$ l'analogo classico della velocità di propagazione (euleriana) V, possiamo concludere [17]:

$$(37) \qquad V^{*2}_{(l)} = V^{*(c)}_{(l)}/\sqrt{1 + p\varrho^{-1}}, \qquad V_{(l)} = V^{(c)}_{(l)}/\sqrt{1 + p\varrho^{-1}}.$$

Ne risulta che p può essere comunque grande ma *deve essere* $> -c^2\varrho = -c^2k - w$ (per $V^{(c)}_{(l)} \neq 0$).

---

(16) In [13] si considerano materiali elastici, eventualmente privi di potenziale elastico e quindi a tensore acustico p^{lh} non necessariamente simmetrico ([13, (2.8), pag. 267]). La relativizzazione della trattazione classica di tali materiali può farsi in modo strettamente parallelo a quella connessa con i materiali elastici, sopra effettuata, cosicchè essa non offre alcuna difficoltà. In particolare si arriva sempre all'equazione (29) ove' però, p^{lh} ha l'espressione [13, (2.8)].

Potendo essere $p^{lh} \neq p^{hl}$, due assi acustici possono essere immaginari, però uno è certo reale (v. [13 pag. 280]), onde sotto la condizione (34) anche nel caso relativistico vi è un asse acustico effettivo.

(17) In corrispondenza a stati tensionali qualsiasi si può considerare come analogo classico della velocità relativistica lagrangiana V^* di propagazione nella direzione N^*_ϱ quella $V^{*(c)}$ relativa ad N^*_σ e ad un materiale avente $w(\varepsilon_{\varrho\sigma})$ per energia interna specifica di massa e per densità quella k^* posseduta da ε in φ^* alla temperatura T^*. Allora, nel caso di pura pressione [(36)], per (31) è

$$V^{*2}_{(l)} = p_{(l)}c^2k(\varrho + p)^{-1}, \quad V^{*(c)2}_{(l)} = p_{(l)} \text{ onde } V^*_{(l)} = V^{*(c)}_{(l)}(1 + c^{-2}w + pk)^{-\frac{1}{2}}.$$

Il suddetto analogo classico $V^{*(c)}_{(l)}$ dipende da T^*. Conviene scegliere $T^* = T$ onde $w = 0$ e $k = \varrho$.

Inoltre è $V_{(l)} \gtrless V_{(l)}^{(c)}$ a seconda che $p \lesseqgtr 0$ (anche il caso $p < 0$ ha interesse trattandosi di materiali eventualmente solidi).

Per $p = 0$ si ha $V_{(l)} = V_{(l)}^{(c)}$. A tal proposito conviene notare che il valore di $V_l^{(c)}$ per $X_{rs} = 0$, calcolato mediante la teoria per deformazioni finite, coincide col valore di $V_{(l)}^{(c)}$ calcolato (per il materiale in questione) mediante la legge lineare di HOOKE e per X_{rs} qualunque. Non si può affermare l'analogo per $V_{(l)}$ perchè, ammesso che secondo una opportuna legge lineare p_{lh} [(28)$_1$] non dipenda dalle $\varepsilon_{\varrho\sigma}$, tuttavia ne dipende sempre [18] q_{lh} [(28)$_2$].

Suppongo che l'elemento materiale ε sia isotropo nella configurazione φ^* di riferimento, onde l'energia elastica $w = w(\varepsilon_{\alpha\beta})$ dipende dalle $\varepsilon_{\alpha\beta}$ tramite i tre invarianti principali di deformazione e può pensarsi anche come una funzione $w = w^{(E)}(E_1, E_2, E_3)$ delle deformazioni principali.

Consideriamo un'onda principale, ossia prendiamo N_ϱ^* parallelo ad uno ξ^r degli assi principali di deformazione. È noto che nel caso considerato è $p_{lh} = \delta_{lh} p_{ll}^{(r)}$ (vedi ad es. [3, pag. 20]) cosicchè gli assi principali di deformazione sono principali anche per l'ellissoide delle tensioni a causa dell'isotropia dell'elemento ε. Di conseguenza, come in Fisica classica, *nel caso isotropo, per onde principali, gli assi acustici sono quelli principali dell'ellissoide di polarizzazione.*

Introdotte (con riferimento alla terna principale di tensione) le tensioni principali $t_{(l)} = -X_{ll} = -X^{ll}$, da (28) si ottiene, in analogia con (36), $q_{lh} = \varrho\delta_{lh} - c^2 t_{(l)}\delta_{lh}$. Nel caso classico è invece $q_{lh} = \varrho\delta_{lh}$.

Sia $V_{(r,l)}^*$ la velocità di propagazione (lagrangiana) secondo l'asse ξ^r, di una discontinuità parallela a ξ^l, e sia $V_{(r,l)}$ la corrispondente velocità euleriana data da (8) o (10). Per quanto precede tali velocità sono legate ai rispettivi analoghi classici $V_{(r,l)}^{*(c)}$ e $V_{(r,l)}^{(c)}$ dalle relazioni:

$$V_{(r,l)}^* = V_{(r,l)}^{*(c)}/\sqrt{1 - t_{(l)}\varrho^{-1}}, \qquad V_{(r,l)} = V_{(r,l)}^{(c)}/\sqrt{1 - t_{(l)}\varrho^{-1}}, \tag{38}$$

---

[18] Ciò va considerato come sostanzialmente in accordo con i risultati (appartenenti al caso isotropo) trovati in [10] e [8]; l'accordo è perfetto per [10] [annotazioni (2), (6)].

Noto che i materiali elastici sostanzialmente considerati in [8] sono tali solo approssimativamente ([2, n. 22]) in conformità dell'uso, ivi fatto, di una legge del tipo di quella di HOOKE. Precisamente, essi non possiedono un potenziale elastico $w = w(\varepsilon_{\alpha\beta}, \eta)$ funzione delle $\varepsilon_{\alpha\beta}$ e dell'entropia η in armonia con la termo-elasticità cosicchè, in generale, $\varrho = k(1 + c^{-2}w)$ e $\varrho^* = \mathfrak{D}\varrho$ non saranno funzioni delle $\varepsilon_{\alpha\beta}$, come invece accade per i materiali elastici in processi adiabatici, e a tali processi ci si attiene in [8] in quanto ivi si considera il caso puramente meccanico. Però i materiali considerati in [8] sono elastici secondo [13] e ad essi possono applicarsi i risultati di cui in annotazione (16). In particolare si può studiare la propagazione ondosa mediante gli ellissoidi (35) ove il tensore acustico p_{lh} può non essere simmetrico [annotazione ([16])].

che nel caso di pura pressione $[t_{(1)} = t_{(2)} = t_{(3)} = -p]$ si riducono a (37). Da (38) risulta che *per almeno una delle* $t_{(l)}$ *deve essere* $t_{(l)} = -X_{ll} > \varrho = c^2\mu$.

Facendo tendere c all'infinito, per (38) $V^*_{(r,l)}$ e $V_{(r,l)}$ tendono ai corrispondenti valori classici. Inoltre, più in generale, per $c \to \infty$ q_{lh} tende a δ_{lh} onde l'ellissoide $(35)_2$ tende ad una sfera, cosicchè gli assi acustici tendono a quelli principali dell'ellissoide di polarizzazione $(35)_1$, ossia ai valori che essi hanno nel caso classico, e inoltre pure i valori di V^{*2} dati da (31) tendono ai corrispondenti classici. Dunque la teoria qui svolta è fisicamente accettabile ([2, annotazione (3)]).

8. - Forma lagrangiana delle equazioni dinamiche delle discontinuità. Espressione invariante di precedenti quantità mediante l'energia interna w **pensata come funzione delle** $\alpha^L{}_\varrho$.

Stante (2), in base a (9), $(18)_2$, (21), (22), (23), (26) e (28) pongo $[\partial f(\varepsilon^{(c)}_{\alpha\beta})/\partial\varepsilon^{(c)}_{\varrho\sigma} = \partial f(\varepsilon_{\alpha\beta})/\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}]$:

$$(39) \qquad \lambda^{*\varrho} = \frac{\partial y^\varrho}{\partial x^l}\lambda^l = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_l{}^\varrho\lambda^l = \mathfrak{D}^{-1}\gamma_L{}^\varrho\lambda^L \qquad (\lambda^0 = 0)\,,$$

$$(40) \qquad p^{*}_{\lambda k}{}^{\varrho\sigma} = p_{lh}{}^{\varrho\sigma}\frac{\partial x^l}{\partial y^\lambda}\frac{\partial x^h}{\partial y^k} = C_{\beta\lambda}C_{\gamma k}\frac{\partial^2 w}{\partial\varepsilon_{\beta\varrho}\partial\varepsilon_{\gamma\sigma}} + \frac{\partial w}{\partial\varepsilon_{\varrho\sigma}}C_{\lambda k}\,,$$

$$(41) \qquad p^*_{\lambda k} = p^{*\varrho\sigma}_{\lambda k}N^*_\varrho N^*_\sigma = p_{lh}\alpha^l{}_\lambda\alpha^h{}_k\,,$$

$$(42) \qquad q^*_{\lambda k} = q_{lh}\alpha^l{}_\lambda\alpha^h{}_k = \left(1 + \frac{w}{c^2}\right)C_{\lambda k} + \frac{1}{k^*}Y_{\lambda k}\,.$$

Per (39), (41) e (42) le (29), (30) e (31) divengono:

$$(43) \qquad (p^*_{\lambda k} - \overset{*2}{V}q^*_{\lambda k})\lambda^{*k} = 0\,, \qquad D^*(x) \equiv \det\| p^*_{\lambda k} - xq^*_{\lambda k}\| = 0\,,$$

$$(44) \qquad V^{*2}_{(\lambda)} = p^*_{(\lambda)}/q^*_{(\lambda)} \qquad \text{per} \quad p^*_{\lambda k} = p^*_{(\lambda)}\,\delta_{\lambda k}\,, \qquad q^*_{\lambda k} = q^*_{(\lambda)}\,\delta_{\lambda k}\,.$$

L'equazione $(43)_2$, equivalente alla (30), ha il vantaggio che in essa figurano le $\varepsilon_{\varrho\sigma}$ invece delle $\alpha^L{}_\varrho$. Ripresa la decomposizione $\alpha^L{}_\varrho = R^L{}_\sigma\mathfrak{D}^\sigma{}_\varrho$ ([**1**,(26)]) di $\alpha^L{}_\varrho$ nel rotore $R^L{}_\sigma$ e nella dilatazione pura $\mathfrak{D}_\varrho{}^\sigma$, per [**1**, (25)] è $C_{\varrho\sigma} = \mathfrak{D}^\lambda_\varrho\mathfrak{D}_{\lambda\sigma}$, onde per (9) la equazione $(43)_2$ risulta indipendente dalla rotazione locale $R^L{}_\varrho$, la quale invece figura nella (30) tramite (28) e (26). Lo stesso vantaggio hanno le espressioni (44) dei possibili valori di V^{*2}, rispetto alle (31). Si aggiunga che poichè anche la relazione (10) fra V^* e la corrispondente velocità euleriana V di propagazione è indipendente da $R^L{}_\varrho$, (44) e (10) permettono di esprimere i possibili valori di V, nota la funzione $w(\varepsilon_{\alpha\beta}, y^\alpha)$ e la sola deformazione attuale $\varepsilon_{\varrho\sigma}$.

Si osservi che, determinato un asse acustico lagrangiano mediante la soluzione (propria) λ^{*k} di $(43)_1$, per (39) e [**1**,(63)], il 4-vettore $\alpha^L{}_k\lambda^{*k}$ determina il corrispondente asse acustico euleriano nel cronotopo $\mathcal{U}$, in qualunque sistema (x) di coordinate.

Per mettere alcune delle precedenti espressioni in forma invariante si osservi che per $(9)_2$ l'energia interna $w = w(\varepsilon_{\alpha\beta})$ $[(15)_1]$ può pensarsi come una funzione $w = \widehat{w}(g_{LM}, \alpha^L{}_\varrho, y^\varrho)$ delle g_{LM} e delle $\alpha^L{}_\varrho$.

È facile riconoscere che per (16) e (17) il tensore di KIRCHHOFF ha l'espressione:

$$K_L{}^\sigma = k^* \frac{\partial \widehat{w}}{\partial \alpha^L{}_\sigma}, \qquad \text{ove} \quad \widehat{w}(g_{LM}, \alpha^L{}_\sigma) \equiv w(\varepsilon_{\varrho\sigma}), \tag{45}$$

analoga a quella classica (19). Si potrebbe pure porre $p_{LH}^{\varrho\sigma} = \partial^2 \widehat{w}/\partial\alpha^L{}_\varrho \partial\alpha^H{}_\sigma$, e $p_{LH} = p_{LH}^{\varrho\sigma} N^*_\varrho N^*_\sigma = p_{HL}$ e $-q_{LM} = (1 + c^{-2}w)\widetilde{g}_{LM} - c^{-2}k^{-1}X_{LM}$ onde, stante (2), $p_{lh}^{\varrho\sigma}$, p_{lh} e q_{lh} avrebbero i significati (26) e (28).

Inoltre $p_{LH}u^H = q_{LH}u^H = 0$, onde è degenere l'equazione $\det \| p_{LH} - x q_{LH} \| = 0$, analoga all'equazione (30), e ciò è in connessione col fatto che l'analogo del sistema (29) è un sistema di 4 equazioni nelle 4 incognite λ^L, a cui va aggiunta l'equazione $\lambda_L u^L = 0$. Insomma tali considerazioni mostrano l'opportunità di una trattazione del tipo precedente [nn. **5**, **6**, **7**] anche a prescindere dal fatto che questa agevola il confronto con i corrispondenti risultati classici.

---

(19) Infatti per $(9)_2$, (16) e (17) da $(45)_2$ segue $k^* \dfrac{\partial w}{\partial \alpha^L_\sigma} = - k^* \dfrac{\partial \widehat{w}}{\partial \varepsilon_{\varrho\lambda}} \dfrac{\partial \varepsilon_{\varrho\lambda}}{\partial \alpha^L{}_\sigma} = Y^{\varrho\sigma} g_{LM} \alpha^M_\varrho = K_L{}^\sigma$. Si noti che nel secondo membro di (45) non c'è un segno meno come nell'analoga formula classica. Si riconosce facilmente che stante (2), in E è $- K_l{}^\sigma = K^{l\sigma} = \overset{c}{K}_l{}^\sigma$ [(21), (22), (23)].

Bibliografia.

[1] A. Bressan, *Cinematica dei sistemi continui in relatività generale*, Ann. Mat. Pura Appl. (in corso di stampa).

[2] A. Bressan, *Termodinamica e magneto-visco-elasticità con deformazioni finite in relatività generale*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **34** (1964).

[3] A. Bressan, *Sulla propagazione delle onde ordinarie di discontinuità dei sistemi a trasformationi reversibili*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova, **33** (1963).

[4] C. Cattaneo, *Su un teorema fondamentale nella teoria delle onde di discontinuità*, Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **1** (1946), 66-72 e 728-734.

[5] B. Coleman e W. Noll, *On the thermostatics of continuous Media*, Arch. Rational Mech. Anal. **4** (1959).

[6] B. Finzi e M. Pastori, *Calcolo tensoriale e applicazioni*, 2ª ed., Zanichelli, Bologna 1961.

[7] J. Hadamard, *Leçons sur la propagation des ondes*, Hermann, Paris 1903.

[8] C. B. Rayner, *Elasticity in general relativity*, Proc. Roy. Soc. (in corso di stampa).

[9] A. Signorini, *Lezioni di Fisica Matematica* Libreria Eredi Virgilio Veschi, Roma 1952-53.

[10] J. L. Synge, *A theory of elasticity in general relativity*, Math. Z. **82** (1959), 82-87.

[11] C. Tolotti, *Deformazioni elastiche finite: onde ordinarie di discontinuità e caso tipico di solidi elastici isotropi*, Univ. Roma e Ist. Naz. Alta Mat. Rend. Mat. e Appl. (5) **4** (1943).

[12] C. Truesdell and R. A. Toupin, *The classical field theories*, Handbuch der Physik, Vol. III/I, Springer-Verlag, 1960. Cfr. pag. 226.

[13] C. Truesdell, *General and exact theory of waves in finite elastic strain*, Arch. Rat. Mech. and Anal. **8** (1961).

* * *