Riv. Mat. Univ. Parma (2) **3** (1962), 393-440

ENRICO BOMBIERI (*)

Sulle formule di A. Selberg generalizzate per classi di funzioni aritmetiche e le applicazioni al problema del resto nel «Primzahlsatz». (**)

§ I. - Cenni storici.

Sia $\{p\}$ la successione dei numeri primi. Il teorema fondamentale sulla distribuzione dei numeri primi ci dice che la funzione enumeratrice $\pi(x)$, cioè $\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1$, è asintotica a $x/\log x$:

$$\pi(x) \sim x/\log x\,. \tag{1.1}$$

È noto anzi di più:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\, x + O(x/\log^N x)\,, \tag{1.2}$$

per ogni N arbitrario fissato, e dove $\mathrm{Li}\, x$ indica il logaritmo integrale di x. Questo risultato, ottenuto da HADAMARD e da DE LA VALLÉE-POUSSIN con i metodi della teoria delle funzioni analitiche, ha avuto ulteriori miglioramenti con i recenti risultati di I. M. VINOGRADOV [**29**]:

$$\pi(x) = \mathrm{Li}\, x + O(x \exp(-c\,(\log x)^{3/5})) \tag{1.3}$$

per una opportuna costante $c > 0$.

Dopo una lunga serie di ricerche risalenti allo studio del «crivello di ERATOSTENE» e al metodo elementare di VIGGO BRUN, finalmente nel 1949 P.

(*) Indirizzo: Istituto Matematico «F. Enriques», Università (via C. Saldini 50), Milano, Italia.

(**) Lavoro eseguito nell'ambito dell'attività del Gruppo di Ricerca n. 40 del Comitato per la Matematica del C.N.R. per l'anno 1961-62. - Ricevuto il 14-V-1962.

ERDÖS [3] e A. SELBERG [6] ottenevano la prima dimostrazione elementare del « Primzahlsatz » nella sua forma asintotica più semplice (1.1). Questa dimostrazione è stata in seguito estesa a casi più generali, tra cui citeremo:

il « Primzahlsatz » per le progressioni aritmetiche (A. SELBERG [**12**], H. N. SHAPIRO [**15**]);

il teorema sul numero di elementi primi di un gruppo abeliano W, appartenenti ai laterali di un sottogruppo W' tale che il gruppo quoziente W/W' sia un gruppo abeliano finito (K. YAMAMOTO [**21**], S. A. AMITSUR [**18**], W. FORMAN e H. N. SHAPIRO [**19**]).

Senza insistere su queste importanti generalizzazioni prenderemo in esame soltanto il problema di precisare, usando questi metodi, la relazione asintotica (1.1).

Se poniamo
$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p\,,$$
il problema ora proposto equivale a dare una maggiorazione elementare del resto $R(x) = \psi(x) - x$.

A questo proposito è noto:

$\psi(x) = x + O(x/(\log\log x)^{1/2})$ (E. M. WRIGHT [**26**]),

$\psi(x) = x + O(x/(\log x)^c)$ per un $c > 0$ (P. ERDÖS; cfr. A. SELBERG [**12**]),

$c > 1/200$ (J. G. VAN DER CORPUT [**7**]),

$c > 1/10$ (P. KUHN [**5**]),

e il recente risultato (del 1960):

$c > 1/6 - \varepsilon$ per ogni $\varepsilon > 0$ (R. BREUSCH [**2**]).

Vogliamo dimostrare qui, con un procedimento « elementare », che vale la maggiorazione:

Teorema A (°).

$\psi(x) = x + O(x/\log^m x)$ *per ogni* $m > 0$ *arbitrario fissato. Questo risultato è equivalente alla relazione* (1.2).

Precisiamo qui il significato di « elementare »: infatti nella dimostrazione faremo un uso esteso del calcolo integrale (solo per integrali relativi a intervalli

(°) Nota durante la correzione delle bozze:
P. ERDÖS mi ha cortesemente informato che il Teorema A, ancora ottenuto partendo dalla « formula di SELBERG », è stato raggiunto da E. WIRSING in un lavoro in corso di pubblicazione.

finiti) al fine di introdurre alcune semplificazioni, secondo il procedimento di E. M. WRIGHT [8]. Infine faremo uso del teorema della convoluzione per la trasformata di LAPLACE per stabilire una importante identità generale. Tuttavia è sempre possibile, aumentando le complicazioni formali, sostituire agli integrali somme finite di funzioni aritmetiche. Abbiamo preferito seguire quindi una via non completamente elementare (ma certamente elementarizzabile) per due motivi principali: il primo è che l'interesse della dimostrazione sta sopratutto negli strumenti aritmetici usati (e anzi, una gran parte del lavoro è dedicata allo studio di questi strumenti); il secondo motivo sta nella simmetria e semplicità di certe formule (cfr. § **V**) dopo il passaggio all'integrale.

§ II. - Schema del piano generale del lavoro e del procedimento seguito.

Sia $\Lambda(n)$ la classica funzione aritmetica di MANGOLDT:

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p & \text{se } n = p^m \\ 0 & \text{se } n \neq p^m . \end{cases} \tag{2.1}$$

L'ormai classico lemma di SELBERG, base di tutte le dimostrazioni elementari note del « Primzahlsatz », afferma:

$$\sum_{n\leq x} \Lambda(n) \log n + \sum_{mn\leq x} \Lambda(m)\Lambda(n) = 2x \log x + O(x) . \tag{2.2}$$

Per ricavare di qui la relazione asintotica fondamentale

$$\psi(x) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n) \sim x , \tag{2.3}$$

si possono seguire due vie principali.

Nella prima (P. ERDÖS [3]) si considera direttamente la somma

$$\sum_{mn\leq x} \Lambda(m)\Lambda(n) = \sum_{n\leq x} \Lambda(n)\psi(x/n) ,$$

e, usando la formula elementare

$$\sum_{n\leq x} \psi(x/n) = x \log x - x + O(\log x) \tag{2.4}$$

e una proprietà di « lenta oscillazione » della funzione $\psi(x)$ che si ricava dalla (2.2), si giunge alla (2.3) mediante un interessante confronto dei punti di « oscillazione massima » di $\psi(x)$.

Il secondo procedimento, dovuto ad A. SELBERG [**6**], usa invece una maggiorazione del resto $R(x) = \psi(x) - x$, ottenuta in modo sorprendente dalla (2.2):

$$|R(x)| \log^2 x \leqslant 2 \sum_{n \leq x} \log n \, |R(x/n)| + O(x \log x) . \tag{2.5}$$

Usando ancora la (2.4) e la proprietà di « lenta oscillazione » di $\psi(x)$, si arriva alla formula asintotica (2.3).

Nel procedimento che seguiremo, la dimostrazione usa questo secondo metodo; tuttavia occorre preparare in precedenza gli strumenti aritmetici necessari.

Nel § **III** si studiano le proprietà delle somme

$$\sum_{n \leq x} f(n) \Phi(x/n) = S_f \Phi ,$$

con $f = f(n)$ una funzione aritmetica, a partire dalle analoghe somme

$$\sum_{n \leq x} f(n)/n \Phi(x/n) = I_f \Phi .$$

Per queste somme I_f vale un notevole calcolo simbolico dovuto a S. A. AMITSUR e a K. YAMOMOTO alla cui esposizione è dedicata questa prima parte del lavoro.

Nel successivo paragrafo si studiano alcune notevoli classi di somme S_f, classi che chiameremo $\mathfrak{G}_{h,n}$ L'intero h viene chiamato ordine della classe, l'intero n è il peso della classe.

Dai risultati ottenuti nel § **III** si trova che, per $\Phi =$ (polinomio in $\log x$), vale sempre una formula asintotica del tipo seguente:

$$\text{se } S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}, \quad \text{allora } S_f \Phi = x \cdot (\text{polinomio in } \log x) + O(x \log^{h-1} x) , \tag{2.6}$$

dove il grado del polinomio in $\log x$ è $\leqslant n - 1$.

Si dimostra allora che nella classe $\mathfrak{G}_{h,n}$ vale sempre una « formula di SELBERG generalizzata ».

Ad esempio, possiamo interpretare la formula (2.2) nel seguente modo:

$$S_{\Lambda L} + S^2_{\Lambda} \in \mathfrak{G}_{1,2} . \tag{2.7}$$

Se applichiamo la formula di SELBERG generalizzata alla somma $S_{\Lambda L} + S^2_{\Lambda}$ otteniamo ancora, ad esempio,

$$S_{\Lambda L^2} + 3 S_{\Lambda} S_{\Lambda L} + S^3_{\Lambda} \in \mathfrak{G}_{1,3} . \tag{2.8}$$

La proprietà di « lenta oscillazione » della funzione $\psi(x)$ viene estesa alle somme S_f nella sezione **IV.3** del lavoro; infine si generalizza la (2.5) al caso di somme S_f per mezzo della « disuguaglianza fondamentale », dimostrata nella sezione **IV.5** del lavoro.

Nel § **V** si effettua il passaggio dalle somme agli integrali, e si trasportano i risultati ottenuti in precedenza in questa nuova notazione. Le formule acquistano così una maggiore semplicità e simmetria.

Infine, nei § **VI** e § **VII** si dimostra il Teorema A; precisamente, nel § **VI** si dànno alcuni teoremi preparatori, mentre la dimostrazione vera e propria segue le linee fondamentali della dimostrazione (seguendo A. SELBERG) del « Primzahlsatz » data nel libro di G. H. HARDY e E. M. WRIGHT [4].

Nello svolgimento delle varie parti, abbiamo cercato di attenerci a notazioni che permettessero di seguire con chiarezza le relazioni tra funzioni aritmetiche e le loro serie generatrici di DIRICHLET; ci sembra che il calcolo simbolico di S. A. AMITSUR e la trasformazione integrale di E. M. WRIGHT siano i mezzi più idonei per raggiungere questo scopo. Crediamo, a questo riguardo, che la sezione **V.2** del lavoro mostri chiaramente questo aspetto del problema.

§ III. - Studio di classi di funzioni aritmetiche secondo S. A. Amitsur.

III. 1. - Le trasformazioni S_f e I_f.

Sia $C(R)$ l'insieme di tutte le funzioni aritmetiche, a valori anche complessi, definite sul semigruppo R dei numeri interi 1, 2, 3, ... In $C(R)$ potremo istituire due operazioni:

somma $f+g$;

prodotto $f*g$ (convoluzione di f e g, prodotto di DIRICHLET);

dove il prodotto è definito da

$$f*g = \sum_{hk=n} f(h)g(k) .$$

$C(R)$ forma così un anello rispetto alle operazioni ora indicate. Se $e = e(n)$ è la funzione identica, cioè

$$e(n) = \begin{cases} 1 & n=1 \\ 0 & n>1 , \end{cases} \tag{3.1}$$

diremo che g è la funzione inversa di f, se $f*g = e$. È facile vedere che le funzioni invertibili sono quelle, e soltanto quelle, per cui $f(1) \neq 0$.

Alle due operazioni sopra indicate, possiamo aggiungerne una terza, quella di prodotto in senso ordinario.

Sia ora $f \in C(R)$. Allora la funzione f si dice completamente moltiplicativa, se $f(mn) = f(m)f(n)$, completamente additiva, se $f(mn) = f(m) + f(n)$.

Consideriamo ora in $C(R)$ la trasformazione $g \to gf$, con $f \in C(R)$ fissato. (Qui la moltiplicazione è in senso ordinario.) Avremo allora il

Teorema 3.1 (S. A. AMITSUR [16]).

Se f è completamente moltiplicativa, la trasformazione $g \to gf$ è un isomorfismo di $C(R)$ in sè. In particolare $(g*h)f = (gf)*(hf)$.

Se f è completamente additiva, la trasformazione $g \to gf$ possiede le proprietà formali di una derivazione in $C(R)$. In particolare

$$(g*h)f = (gf)*h + g*(hf) .$$

Questa ultima eguaglianza equivale formalmente alla regola di derivazione del prodotto; in questo senso potremo così parlare di « derivazione ».

Nei casi che a noi interessano, la funzione additiva f è il logaritmo, cioè $f(n) = \log n$, e la indicheremo brevemente con L. Con L^m indicheremo la potenza m-esima del logaritmo: $L^m = (\log n)^m$.

Sia ora $\Phi = \Phi(x)$ una funzione arbitraria definita per $x \geqslant 1$, e ad ogni $f \in C(R)$ facciamo corrispondere le trasformazioni lineari:

$$S_f = S_f\Phi = \sum_{n\leq x} f(n)\Phi(x/n) , \tag{3.2}$$

$$I_f = I_f\Phi = \sum_{n\leq x} f(n)/n\Phi(x/n) . \tag{3.3}$$

Avremo allora senza difficoltà le formule

$$S_{f+g} = S_f + S_g, \qquad cS_f = S_{cf}, \qquad S_{f*g} = S_fS_g \qquad (c \text{ costante}) . \tag{3.4}$$

Ricordando che la trasformazione $f \to f/n$ è un isomorfismo di $C(R)$ in sè (infatti la funzione $1/x$ è completamente moltiplicativa), le proprietà formali ora stabilite per S_f varranno anche per le somme I_f.

III. 2. - La derivazione $f \to fL$.

È evidente la seguente uguaglianza

$$\sum_{n\leq x} f(n)\Phi(x/n) \log (x/n) = (\log x) \sum_{n\leq x} f(n)\Phi(x/n) - \sum_{n\leq x} f(n) \log n\Phi(x/n)$$

che, secondo le notazioni introdotte, si può scrivere:

$$S_f(\Phi\cdot\log x) = (\log x)S_f\Phi - S_{fL}\Phi .$$

Più concisamente possiamo scriverla anche nel modo seguente (S. A. AMITSUR [16]):

$$S_{f_L} = LS_f - S_f L \,. \tag{3.5}$$

Si vede che in questa relazione il simbolo L ha tre diversi significati: nella S_{f_L} come funzione aritmetica $\log n$; nella LS_f come funzione $\log x$, legata alla S_f; nella $S_f L$ come funzione $\log x$, fattore moltiplicante la Φ.

Poichè non vi è possibilità di confusione nel calcolo formale che ora esporremo, useremo lo stesso simbolo L in tutti e tre i casi.

Usando la regola di LEIBNIZ per le derivate successive, avremo il seguente

Teorema 3.2 (S. A. AMITSUR [16]).

$$L^n S_f = \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} S_{f_{L^m}} L^{n-m} \,,$$

$$S_f L^n = \sum_{m=0}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} L^{n-m} S_{f_{L^m}} \,,$$

$$S_{f_{L^n}} = \sum_{m=1}^{n} (-1)^m \binom{n}{m} L^{n-m} S_f L^m \,.$$

Le funzioni aritmetiche che ci saranno utili sono: la funzione identica e già introdotta; la funzione unitaria 1 e in generale le funzioni L^k; la funzione μ di MÖBIUS, inversa della funzione unitaria 1; le funzioni $\Lambda_k = \mu * L^k$. Per semplicità scriveremo Λ al posto di Λ_1 (1).

Ricordando ora la (3.4) e il Teorema 3.1, la corrispondenza $S_f \to S_{f_L}$ risulta una derivazione; indicandola con $(S_f)_L$, avremo ad esempio $(S_f S_g)_L = S_{f_L} S_g + S_f S_{g_L}$.

Possiamo ora dimostrare il

Teorema 3.3. *Sia f una funzione invertibile, g la sua funzione inversa, e sia $(fL)*g = h$. Allora esiste un polinomio in n variabili $P_n(x_1, \ldots, x_n)$ tale che sia:*

i) $S_{(f_{L^n})*g} = P_n(S_h, S_{h_L}, \ldots, S_{h_{L^{n-1}}})$,

ii) $S_{f*(g_{L^n})} = P_n(-S_h, -S_{h_L}, \ldots, -S_{h_{L^{n-1}}})$,

iii) *i coefficienti di P_n sono tutti positivi.*

(1) $\Lambda_1(n)$ è infatti la funzione di MANGOLDT (2.1).

Dimostrazione.

Dalla relazione $S_f S_g = S_e$, avremo $(S_f S_g)_L = S_{eL} = 0$, da cui $S_{fL} S_g + S_f S_{gL} = 0$; e dunque

$$S_{gL}\, S_f = -\, S_h\,, \tag{3.6}$$

e inoltre

$$S_{gL} = -\, S_h\, S_g\,. \tag{3.7}$$

Dalla formula (3.6) si vede così che il polinomio P_n esiste per $n = 1$, e che $P_1(x_1) = x_1$.

Dimostriamo ora la parte (i) del teorema per induzione. Dalla (3.7) si ricava:

$$(S_g S_{fL^n})_L = S_{g*(fL^{n+1})} + S_{gL} S_{fL^n} = S_{g*(fL^{n+1})} - S_h S_{g*(fL^n)}$$

e dunque si ha la formula

$$S_{g*(fL^{n+1})} = (S_{g*(fL^n)})_L + S_h S_{g*(fL^n)}$$

e da questa per induzione si costruisce il polinomio P_n.

È pure immediata la verifica della (iii); per dimostrare infine che vale la formula (ii) basta scambiare f con g. Allora al posto di S_h dovremo mettere $S_{gL} S_f = -\, S_h$ a causa della (3.6), e il teorema è dimostrato.

È facile vedere che il polinomio P_n è definito induttivamente dalla formula

$$P_{n+1} = x_1 P_n + D P_n\,, \tag{3.8}$$

indicando con D un operatore di derivata tale che $D x_m = x_{m+1}$. In particolare avremo

$$P_1 = x_1, \qquad P_2 = x_1^2 + x_2, \qquad P_3 = x_1^3 + 3x_1 x_2 + x_3\,,$$

e così via.

III. 3. - Approssimazione mediante operatori.

Le trasformazioni S_f possono essere considerate, con K. YAMAMOTO [20], come operatori sulle funzioni Φ. È stato osservato da S. A. AMITSUR [16] che è possibile approssimare gli operatori S_f con operatori di tipo più semplice quando $\Phi = \Phi(x)$ è un polinomio della funzione $L = \log x$.

A questo scopo introduciamo, seguendo S. A. AMITSUR [16], l'insieme $\mathfrak{L}$ di tutti i polinomi $P(L)$ della funzione L, vale a dire $P(L) = \sum_{m=0}^{n} a_m L^m$.

Sia ora D l'operatore di derivata $D = \mathrm{d}/\mathrm{d}L$ (²). Sia poi D^{-1} l'operatore tale che $D^{-1}L^m = L^{m+1}/(m+1)$. Sia infine $H(D)$ un operatore rappresentabile con una serie di LAURENT in D, avente un numero finito di termini a esponente negativo:

$$H(D) = \sum_{m=-k}^{\infty} a_m D^m \quad (^3)\,. \tag{3.9}$$

Si verifica allora la relazione (S. A. AMITSUR [16])

$$L\ H(D) - H(D)\ L = -H'(D) \tag{3.10}$$

(i membri della (3.10) si intendono applicati a un generico elemento dell'insieme $\mathfrak{L}$) e confrontando con la formula (3.5) e ricordando che in $C(R)$ la corrispondenza $f \to fL$ è una derivazione, si presenta evidente l'analogia delle trasformazioni S_f con gli operatori $H(D)$.

Osserviamo inoltre che il prodotto di operatori non coincide sempre col prodotto formale delle serie che rappresentano gli operatori; ad esempio $DD^{-1} = D^0$, ma in generale $D^{-1}D \neq D^0$. Tuttavia, come ha mostrato S. A. AMITSUR [17], questo fatto non ha importanza per le applicazioni che a noi occorrono. Sia allora $f \in C(R)$.

Diremo che l'operatore $F(D)$ rappresentabile con la (3.9), ove al posto di $H(D)$ scriviamo $F(D)$, approssima I_f secondo la funzione $\lambda_n = \lambda_n(x)$ se, per $\Phi \in \mathfrak{L}$ e di grado n si ha:

$$I_f\ \Phi = F(D)\Phi + O(\lambda_n)\,. \tag{3.11}$$

È chiaro che la costante in $O(...)$ deve dipendere anche dal polinomio Φ.

(²) Questo operatore D non dipende in alcun modo dall'operatore D introdotto nella (3.8), del quale non verrà fatto uso nel seguito.

(³) Sebbene $H(D)$ sia dato da una serie infinita, applicando l'operatore a un elemento di $\mathfrak{L}$, otteniamo ancora un elemento di $\mathfrak{L}$.

III. 4. - Il teorema fondamentale di approssimazione per le somme I_f.

Sia

$$I_f\ L^n = F(D)\ L^n + R_n(x;\ f,\ F)\ , \qquad I_g\ L^n = G(D)\ L^n + R_n(x;\ g,\ G)\ ,$$

e sia inoltre

$$F(D) = \sum_{n=-p}^{\infty} a_n\ D^n, \qquad G(D) = \sum_{n=-q}^{\infty} b_n\ D^n.$$

Supporremo sempre in questa sezione che $\Phi \in \mathfrak{L}$.

Allora avremo il seguente

Teorema fondamentale di approssimazione (S. A. AMITSUR [**18**]). *Sia*

$$I_f\ \Phi = F(D)\Phi + O(\lambda_n)\ , \qquad I_g\ \Phi = G(D)\Phi + O(\mu_n)\ .$$

Allora avremo:

$$I_{cf}\ \Phi = cF(D)\Phi + O(\lambda_n) \quad \textit{se } c \textit{ è costante}; \tag{3.12}$$

$$I_{g+f}\ \Phi = (G(D) + F(D))\Phi + O(\lambda_n + \mu_n); \tag{3.13}$$

$$I_{fL}\ \Phi = - F'(D)\Phi + O(\lambda_n\ L + \lambda_{n+1}); \tag{3.14}$$

se $yz = x$, *e* $1 \leqslant y \leqslant x$, *allora*

$$R_n(x;\ g*f,\ GF) = \tag{3.15}$$

$$= \sum_{m \leq y} g(m)/m \cdot R_n(x/m;\ f,\ F) + \sum_{m \leq z} f(m)/m \cdot R_n(x/m;\ g,\ G) -$$

$$- \sum_{h=0}^{n} \binom{n}{h} R_h(y;\ g,\ G) R_{n-h}(z;\ f,\ F) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{i} n!/((i-j)!\,(n+j)!)\ a_{-i}\, R_{n+j}(y;\ g,\ G) \log^{i-j} z +$$

$$+ \sum_{i=1}^{q} \sum_{j=1}^{i} n!/((i-j)!\,(n+j)!)\ b_{-i}\, R_{n+j}(z;\ f,\ F) \log^{i-j} y\ .$$

Dalla simmetria di questa espressione avremo in particolare

$$R_n(x;\ g{*}f,\ GF) = R_n(x;\ g{*}f,\ FG)\ , \tag{3.16}$$

e quindi nel caso che a noi interessa questi operatori sono commutativi; infine, se f è una funzione invertibile, g è la sua funzione inversa, avremo

$$I_g\ \Phi = F^{-1}(D)\Phi + O(I_{|g|}\ \lambda_{n+p}) + O\left(|\,I_g\ P(L)\,|\right)\ , \tag{3.17}$$

con $P(L)$ un opportuno polinomio in L di grado $\leqslant p-1$.

Con l'aiuto di questo Teorema, poichè μ è la funzione inversa della funzione unitaria $f(n)=1$, si può approssimare la somma

$$I_\mu^h \prod_{j=1}^{k} I_{L^j}^{h_j}\ , \tag{3.18}$$

a partire dall'approssimazione della somma I_1.

Alla (3.18) possiamo dare un significato anche per h intero negativo, se poniamo

$$I_\mu^{-1} = I_1\ . \tag{3.19}$$

Ciò è possibile restando valido il calcolo simbolico, a causa della relazione $I_\mu I_1 = I$.

Possiamo infine osservare che la formula (3.15) è una generalizzazione del procedimento di «sommazione dell'iperbola» di DIRICHLET, procedimento ben noto nello studio dei problemi sui divisori di un numero.

Approssimiamo ora la somma I_1 con questi operatori. Definiamo le costanti c_k al seguente modo:

$$(-1)^k\ c_k = \sum_{n\leq x} (\log n)^k/n - 1/(k+1)\log^{k+1} x + O(x^{-1+\varepsilon}) \tag{3.20}$$

e sia $\zeta(D)$ l'operatore

$$\zeta(D) = D^{-1} + \sum_{m=0}^{\infty} c_m\ D^m/m!\ . \tag{3.21}$$

Avremo allora il seguente

Teorema 3.4 (S. A. AMITSUR [**17**]).

$$I_1\ \Phi = \zeta(D)\Phi + O(x^{-1+\varepsilon}) \quad per\ ogni\ \varepsilon > 0 \quad (\Phi\in\mathfrak{L})\ .$$

Osservazione. È possibile verificare che, se $F(s) = \sum f(n)n^{-s}$ è la funzione generatrice della funzione aritmetica f, ed ha al più poli per $s = 1$ ed è convergente quando $\sigma = \mathrm{Re}(s) > 1$, allora I_f è approssimabile mediante un opportuno operatore $F(D)$, che è dato proprio dallo sviluppo in serie di LAURENT della funzione $F(s)$ nell'intorno del punto $s = 1$. Ciò giustifica ampiamente la notazione $\zeta(D)$ per l'operatore dato dalla (3.21).

Teorema 3.5 (S. A. AMITSUR [17]).

Siano f e g due funzioni aritmetiche, $f \geqslant 0$, $g \geqslant 0$ e tali che per ogni $\varepsilon > 0$ fissato si abbia, per ogni $\Phi \in \mathfrak{L}$,

$$I_f\ \Phi = F(D)\Phi + O(x^{-1/A+\varepsilon}), \quad I_g\ \Phi = G(D)\Phi + O(x^{-1/B+\varepsilon})$$

per due opportune costanti positive A e B, con $A \geqslant 1$ e $B \geqslant 1$.
Allora avremo, per ogni $\varepsilon > 0$ fissato,

$$I_f\ I_g\ \Phi = F(D)\ G(D)\ \Phi + O(x^{-1/(A+B)+\varepsilon}) .$$

Dimostrazione.

È facile verificare che $\sum_{m \leq x} f(m)/m^a = O(x^{1-a+\varepsilon})$ se $a \leqslant 1$; un identico risultato vale per la funzione g.

Dall'ipotesi del Teorema avremo evidentemente

$$R_n(x;\ f,\ F) = O(x^{-1/A+\varepsilon}) \text{ per ogni } \varepsilon > 0, \text{ con } A \geqslant 1 ,$$

$$R_n(x;\ g,\ G) = O(x^{-1/B+\varepsilon}) \text{ per ogni } \varepsilon > 0, \text{ con } B \geqslant 1 .$$

Allora dalla formula (3.15) del Teorema fondamentale di approssimazione si ricava immediatamente, per $yz = x$, y, $z \geqslant 1$,

$$R_n(x;\ f*g,\ FG) = O(x^{-1/A+\varepsilon}\ y^{1/A+\varepsilon}) + O(x^{-1/B+\varepsilon}\ z^{1/B+\varepsilon}) +$$

$$+ O(y^{-1/B+\varepsilon}\ z^{-1/A+\varepsilon}) + O(y^{-1/B+\varepsilon}) + O(z^{-1/A+\varepsilon})$$

per ogni $\varepsilon > 0$ fissato.

Posto allora $y = x^{B/(A+B)}$, $z = x^{A/(A+B)}$ avremo immediatamente il Teorema richiesto.

Dal Teorema fondamentale di approssimazione avremo infine il seguente

Teorema 3.6 (S. A. Amitsur [17]).

$I_{L^k}\,\Phi = (-1)^k\,\zeta^{(k)}(D)\Phi + O(x^{-1+\varepsilon})$, *per ogni* $\varepsilon > 0$ *fissato* $(\Phi \in \mathfrak{L})$.

Dai Teoremi 3.5 e 3.6 avremo così l'importante

Teorema 3.7.

$$\prod_{j=0}^{k} I_{L^j}^{h_j}\,\Phi = (-1)^{n_2}\prod_{j=0}^{k}\{\,\zeta^{(j)}(D)\,\}^{h_j}\,\Phi + O(x^{-1/n_1+\varepsilon})$$

per ogni $\varepsilon > 0$ *e* $\Phi \in \mathfrak{L}$, *se* $h_0 \geqslant 0$, *e inoltre* $n_1 = \sum h_j$, $n_2 = \sum jh_j$.

Dalla (3.17) del Teorema fondamentale di approssimazione, ricordando che

$$|\,I_\mu\ 1\,| = O(1) \tag{3.22}$$

e che $|\,\mu\,| \leqslant 1$, e quindi $I_{|\mu|} \leqslant I_1$, avremo, usando il Teorema 3.4, che

$$I_\mu\ \Phi = \zeta^{-1}(D)\Phi + O(1)\,. \tag{3.23}$$

Di qui per induzione si ha facilmente che

$$I_\mu^h\ \Phi = \zeta^{-h}(D)\Phi + O(L^{h-1})\,. \tag{3.24}$$

Combinando infine questo risultato col Teorema 3.7 con $h_0 = 0$, avremo il seguente

Teorema 3.8.

$$I_\mu^h\ \prod_{j=1}^{k} I_{L^j}^{h_j}\,\Phi = (-1)^{n_2}\,\zeta^{-h}(D)\prod_{j=1}^{k}\{\,\zeta^{(j)}(D)\,\}^{h_j}\,\Phi + O(L^{h-1})\,,$$

dove $n_2 = \sum_{j=1}^{k} jh_j$, *per ogni intero* h *positivo o negativo, e* $\Phi \in \mathfrak{L}$.

Osservazione. La maggiorazione del resto $O(L^{h-1})$ data dal Teorema 3.8, è ottenuta appoggiandosi sul fatto che nel Teorema 3.7 il resto è $O(x^{-a})$ per un opportuno $a > 0$; è interessante il fatto che il resto ottenuto nel Teorema 3.7 sia, nel caso più semplice $k = 0$, $h_0 = h$, il resto che si ottiene nel problema dei divisori usando solamente mezzi elementari. Inoltre è evidente che il Teorema 3.8 per h negativo è contenuto nel Teorema 3.7, che anzi dà una maggiorazione molto più precisa del resto.

III. 5. - Approssimazione delle somme S_f mediante le somme I_f.

Ottenuta l'approssimazione per le somme I_f date dalla (3.18) occorre ora passare all'approssimazione delle trasformazioni S_f. A questo provvede il seguente

Teorema 3.9.

Sia $I_f\,1 = F(D)\,1 + O(\lambda_0)$, *e sia* $\int_1^x \lambda_0\,dt = O(x\lambda_0)$.

Allora avremo per $\Phi \in \mathfrak{L}$:

$$S_f\,\Phi = \int_1^x \{DF(D)1\}(t)\Phi(x/t)\,dt + O(x\lambda_0) + O(x^\varepsilon) \tag{3.25}$$

per ogni $\varepsilon > 0$ *fissato.*

Dimostrazione.

Sia $I_f\,1 = I_f\,1(x) = P(L) + O(\lambda_0(x))$, dove $P(L) = F(D)1$ è un opportuno polinomio in L.

Allora

$$S_f\,1 = x\,I_f1 - \sum_{m \le x} I_f1(m) =$$

$$= xP(L) - \int_1^x P(L)\,dt + O(x^\varepsilon) + O\,(x\lambda_0(x)) + O(\int_1^x \lambda_0(t)\,dt) =$$

$$= \int_1^x \{DF(D)1\}(t)\,dt + O(x\lambda_0) + O(x^\varepsilon).$$

Infine, usando la formula

$$S_f\,L^k = k\int_1^x S_fL^{k-1}(t)\,dt/t\,, \tag{3.26}$$

si dimostra facilmente per induzione il teorema quando $\Phi = L^k$. Il passaggio al generico $\Phi \in \mathfrak{L}$ è immediato.

Combinando tra loro i Teoremi 3.8 e 3.9 avremo l'importante

Teorema 3.10.

Sia S_f *data dall'espressione*

$$S_f = S_\mu^h \prod_{j=0}^k S_{L^j}^{h_j},$$

e poniamo $n = \sum_{j=1}^k (j+1)h_j - h$.

Allora avremo, per $\Phi \in \mathfrak{L}$,

$$S_f\ \Phi = xP(L) + O(xL^{h-1}) ,$$

dove $P(L)$ è un opportuno polinomio in L di grado $n-1$.

È di fondamentale importanza che il resto in questo teorema dipenda solamente da h, ma non da n.

L'espressione esplicita del polinomio $P(L)$ ci servirà soltanto nel caso in cui $S_f = S_\mu S_{L^k} = S_{\wedge_k}$.

Avremo allora il

Teorema 3.11.

$$S_{\wedge_k} 1 = \int_1^x (k \log^{k-1} t - b_k \log^{k-2} t + \ldots)\, dt + O(x) ,$$

dove $b_k > 0$ per $k \geqslant 2$.

La dimostrazione è immediata dai Teoremi 3.8 e 3.9.

§ IV. - La classe $\mathfrak{G}^*_{h,n}$ e le formule di A. Selberg generalizzate.

IV. 1. - La classe $\mathfrak{G}_{h,n}$.

Sia S_f una trasformazione data da

$$S_f = S_\mu^h \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j} , \tag{4.1}$$

e sia

$$\sum_{j=1}^{k} h_j \geqslant h . \tag{4.2}$$

Qui vale naturalmente l'osservazione già fatta a proposito della (3.18): l'espressione (4.1) ha significato anche per $h < 0$, se poniamo $S_\mu^{-1} = S_1$, e questo è possibile restando ancora valido il calcolo simbolico.

Poniamo allora

$$n = \sum_{j=1}^{k} (j+1)h_j - h . \tag{4.3}$$

secondo quanto è stato fatto nel Teorema 3.10.

Chiameremo n il *peso* della trasformazione S_f, mentre h sarà il suo *ordine*. Quindi: una trasformazione S_f data dalla (4.1), soddisfacente alla (4.2), ha ordine h e peso n dato dalla (4.3).

Definizione 4.1. *La trasformazione S_g appartiene alla classe $\mathfrak{G}_{h,n}$ $(h \geqslant 1,\ n \geqslant h)$ se S_g è una combinazione lineare di un numero finito di trasformazioni S_f di peso $\leqslant n$ e di ordine $\leqslant h$.*

È chiaro che

$$\mathfrak{G}_{h-1,n} \subseteq \mathfrak{G}_{h,n}. \tag{4.4}$$

Teorema 4.1. *Se $S_g \in \mathfrak{G}_{h,n}$, allora $S_{gL} \in \mathfrak{G}_{h+1,n+1}$.*

Dimostrazione.

È evidente che per la dimostrazione possiamo supporre che S_g sia una trasformazione (4.1) di ordine $= h \geqslant 1$ e di peso n. Dalla formula (3.7) della sezione **III.2** avremo, posto $f = 1$, $g = \mu$,

$$S_{\mu L} = - S_\mu \ S_{L * \mu} = - S_\mu^2 \ S_L. \tag{4.5}$$

Sia S_f data dalla (4.1). Avremo

$$S_{fL} = (S_\mu^h \prod S_{L^j}^{h_j})_L = h\, S_\mu^{h-1} S_{\mu L} \prod S_{L^j}^{h_j} + S_\mu^h (\prod S_{L^j}^{h_j})_L.$$

Una facile verifica mostra che

$$S_\mu^h (\prod S_{L^j}^{h_j})_L \in \mathfrak{G}_{h,n+1}\ ; \tag{4.6}$$

d'altra parte per la (4.5) si conclude che

$$S_{fL} = - h S_\mu^{h+1} S_L \prod S_{L^j}^{h_j} + (\text{termine} \in \mathfrak{G}_{h,n+1}). \tag{4.7}$$

Poichè $1 + \sum_{j=1}^{k} h_j \geqslant h + 1$ a causa della (4.2), l'analoga della (4.2) è verificata per la trasformazione $S_\mu^{h+1} S_L \prod S_{L^j}^{h_j}$, e il peso di questa è infine

$$2(h_1 + 1) + \sum_{j=2}^{k} (j+1) h_j - (h+1) = n + 1,$$

e il teorema è dimostrato.

Il seguente teorema è evidente:

Teorema 4.2. *Se $S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}$ e $S_g \in \mathfrak{G}_{k,m}$, allora $S_f\ S_g \in \mathfrak{G}_{h+k,n+m}$.*

IV. 2. - Le formule di Selberg nella classe $\mathfrak{G}_{h,n}$.

Teorema 4.3. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}$. Allora si ha*

$$S_{fL^{m+1}} + h \binom{h+m}{h} S_{\Lambda L^m} S_f \in \mathfrak{G}_{h+m,n+m+1}.$$

Dimostrazione.

A causa del Teorema 4.1, possiamo supporre senza mancare di generalità che S_f sia data dalla (4.1), e sia di ordine h e peso n.

Ricordando la (4.7) e la formula $S_\mu S_L = S_\Lambda$, avremo intanto

$$S_{fL} = - hS_\Lambda S_f + (\text{termine} \in \mathfrak{G}_{h,n+1}). \tag{4.8}$$

Applicando la (4.8) alla somma $S_{fL} \in \mathfrak{G}_{h+1,n+1}$ a causa del Teorema 4.1 avremo

$$S_{fL^2} = -(h+1) S_\Lambda S_{fL} + (\text{termine} \in \mathfrak{G}_{h+1,n+2}),$$

e così via. Tenendo presente il Teorema 4.2 avremo per induzione la formula

$$S_{fL^{m+1}} + (-1)^m (h+m)!/(h-1)! S_\Lambda^{m+1} S_f \in \mathfrak{G}_{h+m,n+m+1} \tag{4.9}$$

quando $S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}$. Applichiamo ora la fo.mula (4.9) alla funzione aritmetica $f = \Lambda$, e $m-1$ al posto di m. Poichè $S_\Lambda \in \mathfrak{G}_{1,1}$, avremo

$$S_{\Lambda L^m} + (-1)^{m-1} m! \, S_\Lambda^{m+1} \in \mathfrak{G}_{m,m+1}. \tag{4.10}$$

Combinando tra loro le formule (4.10) e (4.9) con l'aiuto del Teorema 4.2, si ha il teorema cercato.

Questo teorema ci dà la formula di Selberg nella classe $\mathfrak{G}_{h,n}$. Ad esempio, se $m = 0$, $h = n = 1$, $f = \Lambda$, si ha il classico lemma di Selberg, che nella nostra notazione diventa:

$$S_{\Lambda L} + S_\Lambda^2 \in \mathfrak{G}_{1,2}. \tag{2.7}$$

Vedremo meglio nel seguito l'utilità del parametro m; per il momento è interessante osservare che la formula (4.9), sebbene sia sostanzialmente equivalente al Teorema 4.3, non si presta alle applicazioni come il Teorema 4.3.

Sia ora $P_n(x_1, \ldots, x_n)$ il polinomio introdotto nel Teorema 3.3. Indichiamo con $S_{P_{n+1}}$ la trasformazione $P_{n+1}(-S_\Lambda, \ldots, -S_{\Lambda L^n})$.

Avremo allora il

Teorema 4.4. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}$. Allora*

$$\binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} S_f - S_{fL^{m+1}} \in \mathfrak{G}_{h+m,n+m+1} .$$

Dimostrazione.

È chiaro che basta dimostrare

$$S_{P_{m+1}} + (m+1) S_{\Lambda L^m} \in \mathfrak{G}_{m,m+1} \tag{4.11}$$

a causa dei Teoremi 4.3 e 4.2. Dalla formula (3.8) avremo

$$S_{P_m} = - S_\Lambda S_{P_{m-1}} + S_{P_{m-1}L} , \tag{4.12}$$

e supponendo vera la (4.11) per il valore $m-1$ ricaviamo dalla (4.12):

$$S_{P_{m+1}} = m S_\Lambda S_{\Lambda L^{m-1}} - m S_{\Lambda L^m} + (\text{termine} \in \mathfrak{G}_{m,m+1}) .$$

D'altra parte dal Teorema 4.3 si ha

$$S_{\Lambda L^m} + m S_\Lambda S_{\Lambda L^{m-1}} \in \mathfrak{G}_{m,m+1}$$

e ricordando la formula precedente si ha per induzione la (4.11), che è evidentemente vera per $m = 0$. Il teorema è così dimostrato.

Il Teorema 4.4 è la formula di partenza per dimostrare la « disuguaglianza fondamentale ».

IV. 3. - L'incremento ΔS_f delle somme S_f.

In questa sezione si dimostra una proprietà di « lenta oscillazione », alla quale si era accennato nel § **II**, per le funzioni della classe $\mathfrak{G}_{h,n}$. Nelle dimostrazioni aritmetiche finora note del « Primzahlsatz » si fa sempre uso di una proprietà di questo tipo.

Lemma 4.1. *Sia $S_f = S_\mu^h \prod_{j=1}^{k} S_{L^j}^{h_j} \in \mathfrak{G}_{h,n}$. Allora si ha $f(n) \geqslant 0$.*

Dimostrazione.

Dimostriamo intanto che $\Lambda_k \geqslant 0$. Dalla formula di Mangoldt (2.1) si ha evidentemente $\Lambda = \Lambda_1 \geqslant 0$; il risultato dunque è vero per $k = 1$. Si ha ora:

$$\Lambda_k L = (\mu * L^k)L = (\mu L) * L^k + \mu * L^{k+1} =$$

$$= (\mu L) * L^k + \Lambda_{k+1} = -(\Lambda * \mu) * L^k + \Lambda_{k+1} = -\Lambda * \Lambda_k + \Lambda_{k+1}$$

a causa della formula (3.7) applicata al caso $f = 1$, e a causa delle (3.4). Dunque

$$\Lambda_{k+1} = \Lambda_k L + \Lambda * \Lambda_k ,$$

e di qui per induzione si ha $\Lambda_k \geqslant 0$. Avremo ora

$$f = (\underbrace{\mu * \mu * \ldots * \mu}_{h \text{ volte}}) * (\underbrace{L * L \ldots * L}_{h_1 \text{ volte}}) * \ldots * (\underbrace{L^k * L^k * \ldots * L^k}_{h_k \text{ volte}})$$

e d'altra parte $h_1 + \ldots + h_k \geqslant h$ per la (4.2). Poichè il prodotto di convoluzione è commutativo, e poichè $\mu * L^m = \Lambda_m$, avremo che f è un prodotto di convoluzione di funzioni numeriche Λ_r e L^s. Poichè $\Lambda_r \geqslant 0$ e $L^s \geqslant 0$, avremo così $f \geqslant 0$, cioè il lemma.

Osservazione. È evidente che il lemma resta valido anche nel caso $h \leqslant 0$.

Siamo ora in grado di dimostrare l'importante

Teorema 4.5 (*proprietà di «lenta oscillazione»*). *Sia $S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}$, e sia N una costante positiva arbitraria fissata. Allora per $x/2 < y < x$ avremo*

$$\Big| \sum_{y<n\leqq x} f(n) \Big| \leqslant O((x-y) \log^{n-1} x) + O(x \log^{-N} x)$$

uniformemente rispetto a y, e dove le costanti implicate in $O(\ldots)$ dipendono unicamente da f e da N.

Dimostrazione.

Evidentemente, per definizione di classe $\mathfrak{G}_{h,n}$, possiamo supporre senza mancare di generalità che S_f sia assegnata dall'espressione (4.1). Possiamo inoltre supporre che $h \geqslant 1$; infatti, per $h \leqslant 0$, dai Teoremi 3.7 e 3.9 si ha il risultato che anzi si ottiene in una forma molto più precisa.

Applichiamo il Teorema 4.3 alla trasformazione S_f ponendo $m = 0$. Otterremo successivamente:

$$S_{fL} + hS_\Lambda S_f = S_{f_1} \in \mathfrak{G}_{h,n+1}, \qquad S_{f_1 L} + hS_\Lambda S_{f_1} = S_{f_2} \in \mathfrak{G}_{h,n+2},$$

e così via.

Dalle prime due formule ora ottenute si ricava

$$S_{fL^2} + hS_{\Lambda L}S_f + 2hS_{\Lambda}S_{fL} + h^2S_{\Lambda}^2S_f = S_{f_2} \in \mathfrak{G}_{h,n+2}$$

e proseguendo in questo modo si ottiene una formula del tipo:

$$S_{fL^m} + \sum_{(j)}{}' c_{(j)} S_{\Lambda}^{j_1} \dots S_{\Lambda L^{m-1}}^{j_m} S_{fL}^{j_{m+1}} = S_{f_m} \in \mathfrak{G}_{h,n+m}\,, \tag{4.13}$$

dove la $\sum'_{(j)}$ indica una somma estesa ad opportune $(m+1)$-uple $(j) = (j_1, \dots, j_{m+1})$, e dove i coefficienti $c_{(j)}$ sono tutti $\geqslant 0$.

D'altra parte, tenendo presente il Teorema 3.10, e la definizione di classe $\mathfrak{G}_{h,n}$, avremo che $S_{f_m}1 = xP(\log x) + O(x \log^{h-1} x)$, dove $P(\log x)$ è un opportuno polinomio di grado $\leqslant n + m - 1$.

Ricordando infine che $f \geqslant 0$ a causa del Lemma 4.1, e la (4.13), ricaviamo:

$$0 \leqslant \sum_{y<n\leq x} f(n) \log^m n \leqslant \sum_{y<n\leq x} f_m(n) = xP(\log x) - yP(\log y) + O(x \log^{h-1} x)\,. \tag{4.14}$$

Infine avremo per un punto ξ compreso tra y e x:

$$xP(\log x) - yP(\log y) = (x-y)(P(\log \xi) + P'(\log \xi)) =$$

$$= (x-y)\cdot O(\log^{n+m-1} x)\,.$$

Dunque avremo

$$0 \leqslant \log^m y \sum_{y<n\leq x} f(n) \leqslant \sum_{y<n\leq x} f(n) \log^m n = \tag{4.15}$$

$$= O((x-y)\log^{n+m-1} x) + O(x \log^{h-1} x)\,.$$

Poichè nell'intervallo $x/2 < y \leqslant x$ che si considera si ha $\log y > (\log x)/2$, dividendo la (4.15) per $\log^m x$ si ha il teorema con $N = m - (h-1)$. Poichè m è arbitrario, il teorema è dimostrato.

Possiamo esprimere il Teorema 4.5 nella seguente forma più concisa e più espressiva:

Teorema 4.5 A. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}$. Allora per ogni $N > 0$ arbitrario fissato esiste una costante $K = K(f, N)$ dipendente soltanto da f e da N tale che*

$$|\Delta S_f 1| \leqslant K(f, N)\,|\Delta x|\, L^{n-1} + O(xL^{-N})\,,$$

uniformemente rispetto a $|\Delta x|$, *per* $0 \leqslant |\Delta x| \leqslant x/2$.

IV. 4. - La classe $\mathfrak{G}^*_{h,n}$ e le formule di Selberg in questa classe.

Introduciamo ora il concetto di « polinomio residuo » di una funzione aritmetica.

Sia g una funzione aritmetica, e sia S_g appartenente a una classe $\mathfrak{G}_{h,n}$ e $I_g\Phi = G(D)\Phi + O(\lambda_n)$ per $\Phi \in \mathfrak{L}$; sia inoltre [4]

$$(4.16) \qquad G(D) = \sum_{m=-n}^{\infty} a_m \, D^m .$$

Poniamo

$$(4.17) \qquad P(L;\, g) = DG(D)1 = \sum_{m=0}^{n-1} a_{-m-1} L^m / m! \, .$$

Diremo allora che $P(L;\, g)$ è il polinomio residuo della funzione numerica g.

Ricordando allora il Teorema 3.9, avremo, per $\Phi \in \mathfrak{L}$,

$$(4.18) \qquad S_{I(L;g)}\Phi = \int_1^x \{ DG(D)1 \}(t)\Phi(x/t) \, dt + O(x^\varepsilon)$$

per ogni $\varepsilon > 0$; ne segue che il polinomio residuo di una funzione aritmetica f serve a definire la parte « asintotica » di S_f.

Definizione 4.2. *La trasformazione S_g appartiene alla classe $\mathfrak{G}^*_{h,n}$ se $S_g \in \mathfrak{G}_{h,n}$ e se inoltre il polinomio residuo della funzione aritmetica g è identicamente nullo.*

Dunque la classe $\mathfrak{G}^*_{h,n}$ è formata dalle trasformazioni $S_g \in \mathfrak{G}_{h,n}$ per le quali l'operatore $G(D)$ è una serie di potenze in D. In particolare avremo $S_{\Lambda-1} \in \mathfrak{G}^*_{1,1}$.

Di qui seguono immediatamente i seguenti teoremi, analoghi ai Teoremi 4.1, 4.2 e 4.3.

Teorema 4.6. *Se $S_g \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$, allora $S_{gL} \in \mathfrak{G}^*_{h+1,n+1}$.*

Teorema 4.7. *Se $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$ e $S_g \in \mathfrak{G}^*_{k,m}$, allora $S_f \, S_g \in \mathfrak{G}^*_{h+k,n+m}$.*

---

(4) Se $G(D)$ è definito mediante l'osservazione al Teorema 3.4, allora $G(D)$ è definito in modo unico. L'operatore $G(D)$ si intende perciò definito a partire dalla (3.21) e dal Teorema fondamentale di approssimazione.

Teorema 4.8. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora si ha*

$$S_{fL^{m+1}} + h\binom{h+m}{h} S_{(\Lambda-1)L^m} S_f \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}\,.$$

Il Teorema 4.4 invece vale per la classe $\mathfrak{G}^*_{h,n}$ in una forma un poco modificata.

Teorema 4.9. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora esiste una costante $a = a(f,\ m)$ tale che*

$$\binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} S_f - S_{fL^{m+1}} - aS_1 \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}\,.$$

Dimostrazione.

Dal Teorema 3.3 con $f = 1$, $g = \mu$, $h = \Lambda$ si ha, per la (ii), $S_{P_{m+1}} = S_1 S_{\mu L^{m+1}}$. Il polinomio residuo della funzione aritmetica P_{m+1}, poichè l'operatore corrispondente è

$$\zeta(D)(-1)^{m+1}(1/\zeta(D))^{(m+1)} = a_m D^{-1} + a_{m,1} + \ldots$$

è dunque una costante a_m. Ne segue che il polinomio residuo della funzione aritmetica f_1 definita da

$$S_{f_1} = \binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} S_f - S_{fL^{m+1}} \tag{4.19}$$

è una costante $a = a(f,\ m)$. Infine, $S_{f_1} \in \mathfrak{G}_{h+m,n+m+1}$ a causa del Teorema 4.4 e d'altra parte deve allora essere $S_{f_1} - aS_1 \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}$ e quindi si ha il teorema.

IV. 5. - La disuguaglianza fondamentale.

Teorema 4.10 (*disuguaglianza fondamentale*). *Sia $S_{f_1} \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora esiste una funzione aritmetica f_2 con $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}$ tale che*

$$|\, S_{f_1 L^{m+1}} 1 + S_{f_2} 1 \,| \leqslant \binom{h+m}{1+m}(m+1) S_{L^m} |\, S_{f_1} 1 \,| + O(x\, L^n)\,.$$

Osservazione. Questa disuguaglianza generalizza la disuguaglianza (2.5); ad esempio, ponendo $f_1 = \Lambda - 1$, $m = 1$, $h = 1$, $n = 1$ si ha la (2.5) osservando che in questo caso $S_{f_1} 1 = O(xL)$. È molto importante il fatto che in questa disuguaglianza il resto non dipenda dal numero intero m.

Dimostrazione.

A causa del Teorema 4.9 avremo intanto

$$(4.20) \qquad |\, S_{f_1 L^{m+1}} 1 + S_{f_2} 1 \,| \leqslant \binom{h+m}{1+m} |\, S_{P_{m+1}} S_{f_1} 1 \,| + O(x),$$

avendo posto

$$(4.21) \qquad S_{f_2} = \binom{h+m}{1+m} S_{P_{m+1}} S_{f_1} - S_{f_1 L^{m+1}} - a S_1 \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1} .$$

D'altra parte per la (i) e la (iii) del Teorema 3.3 avremo, qualunque sia Φ,

$$(4.22) \qquad |\, S_{P_{m+1}} \Phi \,| \leqslant S_{|P_{m+1}|} |\, \Phi \,| \leqslant S_{\Lambda_{m+1}} |\, \Phi \,| .$$

Consideriamo ora la somma $S_{\Lambda_{m+1}} |\, S_{f_1} 1 \,|$. Intanto, a causa del Teorema 3.11, si ha che il polinomio residuo della funzione numerica Λ_{m+1} è dato da $P(L; \Lambda_{m+1}) = (m+1)L^m - b_m L^{m-1} + \ldots$, con $b_m > 0$; ne segue che se $L > L_0(m)$ si ha

$$(4.23) \qquad P(L;\ \Lambda_{m+1}) \leqslant (m+1)L^m .$$

Avremo ora

$$S_{\Lambda_{m+1}} |\, S_{f_1} 1 \,| = \sum_{n \leq x} \Lambda_{m+1}(n) \,|\, \sum_{q \leq x/n} f_1(q) \,| .$$

Di qui, per sommazione parziale, posto per semplicità

$$(4.24) \qquad F(x) = |\, \sum_{q \leq x} f_1(q) \,| ,$$

avremo

$$S_{\Lambda_{m+1}} |S_{f_1} 1\,| = \sum_{n \leq x} \{ \sum_{r \leq n} \Lambda_{m+1}(r) \} \{ F(x/n) - F(x/(n+1)) \} = \sum_{n \leq x} \{ \sum_{r \leq n} P\,(\log r;\ \Lambda_{m+1}) \} \cdot$$

$$\cdot \{ F(x/n) - F(x/(n+1)) \} + \sum_{n \leq x} O(n) \,|\, F(x/n) - F(x/(n+1)) \,| ,$$

a causa del Teorema 3.11. Ne segue

$$(4.25) \qquad S_{\Lambda_{m+1}} |\, S_{f_1} 1 \,| = S_{P(L;\Lambda_{m+1})} |\, S_{f_1} 1 \,| + O(\sum_{n \leq x} n \,|\, F(x/n) - F(x/(n+1)) \,|)$$

e ricordando la (4.23) avremo dalla formula precedente

$$(4.26) \qquad S_{\Lambda_{m+1}} | S_{f_1} 1 | \leqslant (m+1) S_{L^m} | S_{f_1} 1 | + O(| S_{f_1} 1 |) + \\ + O(\sum_{n \leq x} n \,|\, F(x/n) - F(x/(n+1)) \,|) .$$

Ora si ha, quando $y < x$,

$$(4.27) \qquad | F(x) - F(y) | = | \,| \sum_{q \leq x} f_1(q) | - | \sum_{q \leq y} f_1(q) | \,| \leqslant | \sum_{y < q \leq x} f_1(q) | \leqslant \sum_{y < q \leq x} | f_1(q) | .$$

Poichè $S_{f_1} \in \mathfrak{G}_{h,n}$, f_1 è una combinazione lineare di un numero finito di funzioni aritmetiche del tipo di quelle definite dalla (4.1), e per le quali vale il Lemma 4.1. Ne segue che esiste una funzione aritmetica f tale che $| f_1 | \leqslant f$ e $S_f \in \mathfrak{G}_{h,n}$. Dalla (4.27) segue quindi

$$(4.28) \quad \sum_{n \leq x} n \,|\, F(x/n) - F(x/(n+1)) \,| \leqslant \sum_{n \leq x} n \{ S_f 1(x/n) - S_f 1(x/(n+1)) \} = S_1 S_f 1 .$$

Infine, per il Teorema 4.2, $S_1 S_f \in \mathfrak{G}_{h+1, n+1}$ da cui $S_1 S_f 1 = O(xL^n)$ a causa del Teorema 3.10; e il teorema si ha allora con facilità da quest'ultima maggiorazione, dalla (4.28), (4.26) e da $S_{f_1} 1 = O(xL^{n-1})$ (infatti deve essere $n \geqslant h$).

Con i Teoremi 3.8, 3.9, 3.10, 4.5, 4.8, 4.10 sono state ottenute le formule fondamentali per le funzioni aritmetiche che definiscono le classi $\mathfrak{G}_{h,n}$ e $\mathfrak{G}^*_{h,n}$; come conseguenza di quanto trovato, dimostreremo in particolare il seguente

Teorema B. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora per ogni N positivo arbitrario fissato e per ogni $\Phi \in \mathfrak{L}$ vale la maggiorazione*

$$(4.29) \qquad S_f \, \Phi = O(xL^{-N}) .$$

§ V. - Le funzioni $V_k(\eta; f)$ e convoluzioni per trasformate di Laplace.

V. 1. - Un cambiamento di variabili e prime proprietà delle funzioni V_k.

Data una funzione aritmetica f, consideriamo le seguenti funzioni, che chiameremo « associate di ordine k » con la funzione f,

$$(5.1) \qquad V_k(\eta;\, f) = (1/k!) e^{-\eta} S_f L^k(e^\eta) = (1/k!) e^{-\eta} \sum_{n \leq e^\eta} f(n)(\eta - \log n)^k .$$

Queste funzioni godono di notevoli proprietà.

Supporremo naturalmente che k sia sempre un intero non negativo.

Teorema 5.1. *Se $k \geqslant 1$, allora $V_k(\eta;\, f)$ è una funzione derivabile, e si ha $V_k'(\eta;\, f) = V_{k-1}(\eta;\, f) - V_k(\eta;\, f)$.*

Dimostrazione. Se $k \geqslant 1$, avremo

$$\mathrm{d}/\mathrm{d}x\,(\sum_{n\leq x} f(n)\log^k(x/n)) = (k/x)\sum_{n\leq x} f(n)\log^{k-1}(x/n)\,,$$

da cui si ricava

$$\int_0^\eta e^{-(\eta-t)}\,V_{k-1}(t;\, f)\,\mathrm{d}t = V_k(\eta;\, f) \qquad \text{se} \qquad k \geqslant 1\,. \tag{5.2}$$

Derivando la formula (5.2) rispetto a η avremo immediatamente il Teorema 5.1.

Il seguente corollario ci sarà molto utile nel seguito:

Corollario. *Per $k \geqslant 0$ si ha*

$$\int_0^\eta V_k(t;\, f)\,\mathrm{d}t = \sum_{j=1}^{m} V_{k+j}(\eta;\, f) + \int_0^\eta V_{k+m}(t;\, f)\,\mathrm{d}t\,. \tag{5.3}$$

Teorema 5.2. *Se $V_k(\eta;\, f) = V_k$ è la funzione di ordine k associata con la funzione numerica f, allora*

$$V_k(\eta;\, fL^h) = \sum_{m=0}^{h}(-1)^m\binom{h}{m}\{(k+m)!/k!\}\,\eta^{h-m}V_{k+m}$$

è la funzione di ordine k associata con fL^h.

Dimostrazione. È una conseguenza immediata dell'ultima formula del Teorema 3.2.

Le formule $V_k(\eta;\, f+g) = V_k(\eta;\, f) + V_k(\eta;\, g)$ e $V_k(\eta;\, cf) = cV_k(\eta;\, f)$ per c costante sono immediate; ci occorre, oltre a queste formule, una espressione di $V_k(\eta;\, f*g)$ per mezzo delle funzioni $V_m(\eta;\, f)$ e $V_n(\eta;\, g)$. Questo viene fatto nella sezione seguente.

V. 2. - Convoluzioni di funzioni V_k.

Teorema 5.3. *Quando $k \geqslant 1$ e $m + n = k - 1$ vale la formula*

$$V_k(\eta;\, f*g) = \int_0^\eta V_m(t;\, f)\,V_n(\eta - t;\, g)\,\mathrm{d}t\,.$$

Dimostrazione.

Sebbene si possa dare una dimostrazione di questo teorema facendo uso di metodi algebrici, la seguente dimostrazione analitica ci sembra interessante, poichè essa mostra i legami tra le funzioni V_k e le funzioni generatrici delle funzioni aritmetiche in esame.

Siano $F(s)$ e $G(s)$ le serie $\sum f(n)n^{-s}$ e $\sum g(n)n^{-s}$ generatrici delle due funzioni aritmetiche $f(n)$ e $g(n)$. Avremo allora, quando $k \geqslant 1$,

$$(s+1)^{-k}\, F(s+1) = \int_0^\infty e^{-st}\, V_{k-1}(t;\, f)\, dt \tag{5.4}$$

e analogamente per $G(s)$.

La funzione generatrice di $f*g$ è $F(s)G(s)$; ricordando allora:

i) il teorema della convoluzione per trasformate di LAPLACE,

ii) il teorema dell'unicità della trasformata di LAPLACE,

iii) il teorema dell'unicità della funzione di DIRICHLET generatrice di una data funzione aritmetica,

si ottiene il teorema senza difficoltà.

Occorre osservare a proposito di questa dimostrazione che, a causa di questioni di convergenza, la dimostrazione ora data è valida soltanto per funzioni aritmetiche di ordine finito (5); e questo è il caso delle funzioni da noi qui considerate. Con l'aiuto di questo teorema possiamo dimostrare il

Teorema 5.4. *Sia, per una opportuna costante σ finita,* $V_k(\eta;\, f) = O(\eta^\sigma)$. *Allora avremo*

$$\int_0^\eta V_0(t;\, f)\, dt = \sum_{j=1}^{k} V_j(\eta;\, f) + V_{k+1}(\eta;\, f*1) + O(\eta^\sigma)\,.$$

Dimostrazione.

Poichè $V_0(\eta;\, 1) = e^{-\eta}[e^\eta]$, dove qui $[x]$ indica la parte intera di x, avremo dal Teorema 5.3:

$$V_{k+1}(\eta;\, f*1) = \int_0^\eta e^{-(\eta-t)}[e^{\eta-t}]\, V_k(t;\, f)\, dt\,, \tag{5.5}$$

(5) Qui per *ordine* di una funzione aritmetica si intende l'ordine di grandezza, cioè $\overline{\lim_{n\to\infty}}\, (\log|f(n)|)/\log n$.

e osservando che $0 \leqslant 1 - x^{-1}[x] \leqslant x^{-1}$ otteniamo dalla formula (5.5):

$$V_{k+1}(\eta;\ f*1) = \int_0^\eta V_k(t;\ f)\,dt + O\Big(\int_0^\eta e^{-(\eta-t)}\,|\,V_k(t;\ f)\,|\,dt\Big) = \tag{5.6}$$

$$= \int_0^\eta V_k(t;\ f)\,dt + O\Big(\int_0^\eta e^{-(\eta-t)}t^\sigma\,dt\Big) = \int_0^\eta V_k(t;\ f)\,dt + O(\eta^\sigma)\,.$$

Ricordando allora il corollario al Teorema 5.1 si ha il teorema cercato senza difficoltà.

V. 3. - La classe di maggioranti $\overline{V}_k$.

Sia per definizione

$$\alpha = \alpha_k(f) = -\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\,(\log\,|\,V_k(\eta;\ f)\,|)/\log\eta\,. \tag{5.7}$$

Per le funzioni aritmetiche che prenderemo in esame, la costante α è delimitata inferiormente da una quantità finita dipendente da k e dalla funzione f; se $\alpha = +\infty$, allora deve essere, per ogni $N > 0$ arbitrario fissato,

$$V_k(\eta;\ f) = O(\eta^{-N})\,. \tag{5.8}$$

Supporremo in questa sezione che α sia una quantità finita.

Introduciamo allora una classe di funzioni maggioranti della funzione $V_k(\eta;\ f)$; queste maggioranti verranno indicate con la notazione $\overline{V}_k(\eta;\ f)$.

D e f i n i z i o n e 5.1. *Con* $\overline{V}_k(\eta;\ f)$ *si intende una qualsiasi funzione*

$$\overline{V}_k(\eta;\ f) = \eta^{-\alpha}c(\eta)\,, \tag{5.9}$$

con:

i) α *finito dato dalla* (5.7);

ii) $c(\eta)$ *una funzione lentamente oscillante*;

iii) $c(\eta)$ *tale che sia*

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\,\{\eta^\alpha\,|\,V_k(\eta;\ f)\,|/c(\eta)\} = 1\,. \tag{5.10}$$

Osservazioni.

Ricordiamo qui che la funzione $c(\eta) \geqslant 0$ si dice lentamente oscillante se

$$\lim_{\eta\to\infty} c(K\eta)/c(\eta) = 1 \quad \text{per ogni } K > 0 \text{ arbitrario fissato}. \tag{5.11}$$

È ben noto che la relazione (5.11) vale uniformemente per K in un intervallo (a, b) arbitrario fissato di ampiezza finita; inoltre, queste funzioni sono caratterizzate dalla rappresentazione integrale di KARAMATA:

$$c(\eta) = (1 + o(1)) \exp \left(\int_0^\eta h(t)\, dt/(t+1)\right), \tag{5.12}$$

dove $h(\eta)$ è una funzione limitata tale che $h(\eta) = o(1)$.

Per queste funzioni si dimostrano senza difficoltà le seguenti relazioni asintotiche:

$$\int_0^\eta t^{a-1} c(t)\, dt \sim c(\eta) \int_0^\eta t^{a-1}\, dt \quad \text{quando} \quad a > 0, \tag{5.13}$$

$$\int_0^\eta t^{a-1} c_1(t)(\eta - t)^{b-1} c_2(\eta - t)\, dt \sim c_1(\eta) c_2(\eta) \int_0^\eta t^{a-1}(\eta - t)^{b-1}\, dt \tag{5.14}$$

quando sia $a > 0$, $b > 0$.

È possibile dimostrare che, se la costante α data dalla (5.7) è una quantità finita, allora qualunque sia la funzione $V_k(\eta; f)$ esiste sempre almeno una funzione $c(\eta)$ soddisfacente alle condizioni (i), (ii), (iii) della definizione 5.1. Ne segue che, per le funzioni che qui considereremo, la classe delle funzioni maggioranti $\overline{V}_k$ non è vuota.

Teorema 5.5. *Se $\alpha_m = \alpha_m(f) < 1$ e $\alpha_n = \alpha_n(g) < 1$, allora per ogni $\overline{V}_m(\eta; f)$ e ogni $\overline{V}_n(\eta; g)$ vale la disuguaglianza*

$$|V_{m+n+1}(\eta; f*g)| \leqslant B(1-\alpha_m, 1-\alpha_n)(1 + o(1))\eta \overline{V}_m(\eta; f) \overline{V}_n(\eta; g),$$

dove $B(x, y)$ è la funzione Beta di EULERO.

Dimostrazione. Sia $\overline{V}_m(\eta;\ f) = \eta^{-\alpha_m}\ c_1(\eta)$, e $\overline{V}_n(\eta;\ g) = \eta^{-\alpha_n}\ c_2(\eta)$. Allora dal Teorema 5.3 avremo

$$
\begin{aligned}
|\, V_{m+n+1}(\eta;\ f*g) \,| &= \Big|\int_0^\eta V_m(t;\ f) V_n(\eta - t;\ g)\,\mathrm{d}t\,\Big| \leqslant \\
&\leqslant (1 + o(1)) \int_0^\eta \overline{V}_m(t;\ f)\overline{V}_n(\eta - t;\ g)\,\mathrm{d}t \sim c_1(\eta)c_2(\eta)\cdot \\
&\quad\cdot \int_0^\eta t^{-\alpha_m}(\eta - t)^{-\alpha_n}\,\mathrm{d}t \sim B(1-\alpha_m,\ 1-\alpha_n)\eta^{1-\alpha_m-\alpha_n}c_1(\eta)c_2(\eta)
\end{aligned}
$$

a causa della relazione asintotica (5.14), e il teorema è così dimostrato.

Teorema 5.6. *Per ogni $\overline{V}_k(\eta;\ f)$ vale la disuguaglianza*

$$|\, V_{k+1}(\eta;\ f) \,| \leqslant (1 + o(1))\overline{V}_k(\eta;\ f)\,.$$

Dimostrazione. Dalla formula (5.2) avremo

$$|\, V_{k+1}(\eta;\ f) \,| \leqslant (1 + o(1)) \int_0^\eta e^{-(\eta - t)}\,\overline{V}_k(t;\ f)\,\mathrm{d}t$$

e con una facile maggiorazione si ha il teorema.

Osservazione. Da questo teorema si deduce che il massimo ordine di grandezza della funzione $V_k(\eta;\ f)$ non aumenta al crescere di k; questo del resto è evidente se si osserva che le somme $(1/k!)\ \frac{1}{x}\ S_f L^k$ sono le medie integrali di Hölder della somma $\frac{1}{x}\ S_f 1$.

Infine, dal Teorema 5.2 si ricava il seguente

Teorema 5.7.

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} |\, V_k(\eta;\ fL^m) \,|/(\eta^m \overline{V}_k(\eta;\ f)) = 1\,,$$

e inoltre

$$\varlimsup_{\eta\to\infty} |\, V_k(\eta;\ f) \,|/(\eta^{-m} \overline{V}_k(\eta;\ fL^m)) = 1\,.$$

Dimostrazione. Dal Teorema 5.2 avremo immediatamente

$$V_k(\eta;\ fL^m) = \eta^m V_k(\eta;\ f) + O\Big(\sum_{j=1}^m \eta^{m-j}\,|\, V_{k+j}(\eta;\ f) \,|\Big) \tag{5.15}$$

e quindi usando il Teorema 5.6 avremo:

$$(5.16)\qquad V_k(\eta;\ fL^m) = \eta^m V_k(\eta;\ f) + O(\eta^{m-1}\overline{V}_k(\eta;\ f))\,.$$

Da quest'ultima formula segue subito il Teorema 5.7.

§ VI. - Dimostrazione del teorema principale. Prime conseguenze dell'ipotesi $V_0(\eta; \Lambda - 1) \neq O(\eta^{-N})$ per qualche N finito.

VI. 1. - Conseguenze delle formule di Selberg generalizzate.

Supporremo costantemente in questo paragrafo **VI** che sia $V_0(\eta;\ \Lambda - 1) \neq \neq O(\eta^{-N})$ per qualche N finito; ricordando la (5.8) questo equivale a supporre che sia:

$$(6.1)\qquad \alpha_0(\Lambda - 1) \qquad \text{una quantità finita.}$$

Supporremo inoltre in questo paragrafo che, per le funzioni aritmetiche f in esame, la costante $\alpha_k(f)$ sia una quantità finita.

Teorema 6.1. *Se $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$ allora si ha*

$$|\ V_0(\eta;\ f)\ | = O(\eta^{h-1})\,.$$

Dimostrazione. È una facile conseguenza del Teorema 3.10 e della definizione di classe $\mathfrak{G}^*_{h,n}$.

Teorema 6.2. *Sia $S_{f_1} \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora per ogni $k \geqslant 1$ esiste un intero $m = m_k$ dipendente da k, e una funzione aritmetica f_2 dipendente da f_1 e da k, con $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}$ tale che, per ogni maggiorante $\overline{V}_{k-1}(\eta;\ f_1)$ e $\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda - 1)$ sia:*

$$|V_k(\eta;\ f_1)\ | \leqslant O(\overline{V}_{k-1}(\eta;\ f_1)\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda - 1)) + \eta^{-m-1}\ |\ V_k(\eta;\ f_2)\ |\,.$$

Dimostrazione.

Applichiamo il Teorema 4.8 alla trasformazione $S_{f_1L^{m'}}$ che appartiene alla classe $\mathfrak{G}^*_{h+m',n+m'}$ a causa del Teorema 4.6. Otteniamo così la formula del tipo di Selberg:

$$(6.2)\quad S_{f_1L^{m+m'+1}} + (h + m')\binom{h+m+m'}{h+m'} S_{(\Lambda-1)L^m}\, S_{f_1L^{m'}} = S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m+m',n+m+m'+1}\,.$$

Passiamo ora dalla notazione con le somme S alla notazione per le funzioni V, con l'aiuto del Teorema 5.3. Avremo immediatamente

$$(6.3)\quad V_k(\eta;\ f_1\ L^{m+m'+1}) + \\ + (h+m')\binom{h+m+m'}{h+m'}\int_0^\eta V_0\,(t;\ (\Lambda-1)L^m)V_{k-1}(\eta-t;\ f_1L^{m'})\,dt = \\ = V_k(\eta;\ f_2)\qquad \text{per ogni}\qquad k\geqslant 1\ \text{intero.}$$

Prendiamo ora m e m' così grandi che

$$(6.4)\qquad \alpha_{k-1}(f_1)-m'\leqslant 0\,,\qquad \alpha_0(\Lambda-1)-m\leqslant 0\,.$$

Questo è possibile per le ipotesi fatte su $\alpha_k(f)$ all'inizio di questo paragrafo. Dal Teorema 5.7 segue immediatamente

$$(6.5)\qquad \alpha_{k-1}(f_1L^{m'})=\alpha_{k-1}(f_1)-m'\leqslant 0\,,$$

$$(6.6)\qquad \alpha_0((\Lambda-1)L^m)=\alpha_0(\Lambda-1)-m\leqslant 0\,.$$

Siamo così in grado di applicare il Teorema 5.5 ottenendo:

$$(6.7)\qquad \left|\int_0^\eta V_{k-1}(t;\ f_1\ L^{m'})V_0(\eta-t;\ (\Lambda-1)L^m)\,dt\right|\leqslant \\ \leqslant O(\eta\overline{V}_{k-1}(\eta;\ f_1\ L^{m'})\overline{V}_0(\eta;\ (\Lambda-1)L^m))\,.$$

Combinando questa disuguaglianza con la formula (6.3) avremo

$$(6.8)\qquad |\,V_k(\eta;\ f_1\ L^{m+m'+1})\,|\leqslant O(\eta\overline{V}_{k-1}(\eta;\ f_1\ L^{m'})\overline{V}_0(\eta;\ (\Lambda-1)L^m))+ \\ +|\,V_k(\eta;\ f_2)\,|\,.$$

Infine dal Teorema 5.7 si può supporre senza mancare di generalità che sia

$$(6.9)\quad \overline{V}_{k-1}(\eta;\ f_1\ L^{m'})=\eta^{m'}\overline{V}_{k-1}(\eta;\ f_1)\,,\qquad \overline{V}_0(\eta;\ (\Lambda-1)L^m)=\eta^m\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda-1)\,.$$

Ricordando allora la formula (5.16), avremo dalle (6.8) e (6.9):

$$\eta^{m+m'+1}\,|\,V_k(\eta;\ f_1)\,|\leqslant O(\eta^{m+m'}\overline{V}_k(\eta;\ f_1))+ \\ +O(\eta^{m+m'+1}\overline{V}_{k-1}(\eta;\ f_1)\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda-1))+|\,V_k(\eta;\ f_2)\,|$$

e si ha immediatamente il Teorema 6.2, con $m+m'$ al posto di m.

Teorema 6.3. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora, per ogni $N > 0$ arbitrario fissato, esiste una costante $K = K(f, N)$ dipendente soltanto da f e da N tale che*

$$|\Delta V_0(\eta;\, f)| \leqslant K(f,\, N)\ \eta^{n-1}\,|\Delta\eta| + O(\eta^{-N}),$$

uniformemente rispetto a $|\Delta\eta|$, *per* $0 \leqslant |\Delta\eta| \leqslant 1$.

Dimostrazione. È immediata dal Teorema 4.5 A e dal Teorema 6.1.

VI. 2. - Maggiorazione di $\overline{V}_k$.

In questa sezione dimostriamo l'importante

Teorema 6.4 (6). *Sia $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora, per $k \geqslant 1$ e ogni maggiorante $\overline{V}_0(\eta;\, A-1)$ con $\alpha_0(A-1)$ finito, vale la disuguaglianza:*

$$(6.10)\qquad |V_{k-1}(\eta;\, f)| = O(\eta^{n-1}\overline{V}{}_0^k(\eta;\, A-1)).$$

Inoltre, se $\alpha_0(A-1) = +\infty$, *si ha*

$$(6.11)\qquad |V_{k-1}(\eta;\, f)| = O(\eta^{-N})$$

per ogni $N > 0$ arbitrario fissato.

La dimostrazione di questo Teorema 6.4 è ottenuta per mezzo dei teoremi dimostrati nella sezione **VI.1**; ci occorrono però alcuni lemmi preparatori.

Lemma 6.1. *Sia $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. Allora per $k \geqslant 1$ e ogni $\overline{V}_k(\eta;\, f)$ vale la maggiorazione*

$$|V_{k-1}(\eta;\, f)| \leqslant O((\eta^{n-1}\overline{V}{}_k^k(\eta;\, f))^{1/(k+1)}).$$

Dimostrazione.

Poniamo per semplicità $V_k = V_k(\eta;\, f)$, e $\overline{V}_k = \overline{V}_k(\eta;\, f)$. Dal Teorema 5.1 avremo allora $V'_k = V_{k-1} - V_k$. Per il teorema dell'incremento finito segue di qui: per ogni $\sigma > 0$ esiste un ξ, $\eta < \xi < \eta + \sigma$, tale che sia

$$(6.11)\qquad \sigma\,|V_{k-1}(\xi;\, f) - V_k(\xi;\, f)| = |\Delta V_k| = O(\overline{V}_k).$$

(6) Questo Teorema 6.4 è valido indipendentemente dalle ipotesi formulate all'inizio del § **VI**.

Dimostriamo ora il lemma nel caso $k = 1$. Avremo dal Lemma 6.3

$$| V_0(\xi;\, f) - V_0(\eta;\, f) | \leqslant O(\sigma\eta^{n-1}) + O(\eta^{-N}) \tag{6.12}$$

per ogni $N > 0$ arbitrario fissato. Dunque avremo di qui e dalla formula (6.11):

$$| V_0 | \leqslant O(\sigma\eta^{n-1}) + O(\overline{V}_1/\sigma) + O(\eta^{-N}) \tag{6.13}$$

per ogni N arbitrario fissato. Posto allora $\sigma = (\eta^{-n+1}\overline{V}_1)^{1/2}$ si ottiene il lemma quando $k = 1$, prendendo N abbastanza grande.

Dimostriamo ora il lemma per induzione. Dalla formula (6.11) ricaviamo, ponendo $k-1$ al posto di k,

$$| \Delta V_{k-1} | = O(\sigma\overline{V}_{k-2}) \quad \text{se} \quad k \geqslant 2\,, \tag{6.14}$$

e di qui si ottiene $| V_{k-1} | = O(\sigma\overline{V}_{k-2}) + O(\overline{V}_k/\sigma)$, e ponendo $\sigma = (\overline{V}_k/\overline{V}_{k-2})^{1/2}$ avremo la formula

$$| V_{k-1} | = O((\overline{V}_{k-2}\overline{V}_k)^{1/2})\,. \tag{6.15}$$

Supponiamo, per l'ipotesi di induzione, che sia

$$| V_{k-2} | \leqslant O((\eta^{n-1}\overline{V}^{k-1}_{k-1})^{1/k})\,. \tag{6.16}$$

Tenendo presente la (6.15) avremo allora per ogni $\overline{V}_{k-1}$:

$$| V_{k-1} | \cdot (| V_{k-1} | / \overline{V}_{k-1})^{(k-1)/(k+1)} \leqslant O((\eta^{n-1}\overline{V}^k_k)^{1/(k+1)})\,. \tag{6.17}$$

Supponiamo ora, in contrasto con il risultato espresso dal lemma, che sia:

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \{ | V_{k-1} | / (\eta^{n-1}\overline{V}^k_k)^{1/(k+1)} \} = +\infty\,.$$

Posto per semplicità $\overline{U}_k = (\eta^{n-1}\overline{V}^k_k)^{1/(k+1)}$, esisterà allora una funzione $\varrho(\eta) \to +\infty$ tale che sia (7)

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \{ | V_{k-1} | / (\overline{U}_k\varrho(\eta)) \} = 1\,, \tag{6.18}$$

---

(7) Per quanto riguarda l'esistenza della funzione $\varrho(\eta)$, vedi le osservazioni alla definizione 5.1.

e inoltre

$$\varrho(\eta) = \eta^b\ c(\eta)\,, \tag{6.19}$$

con b costante non negativa, e $c(\eta)$ una funzione lentamente oscillante.

Allora, se $\{\eta'\}$ è una successione tale che $|\ V_{k-1}(\eta';\ f)\ | \sim \overline{U}_k\ \varrho(\eta')$, dalla (6.17) si ottiene che per ogni $\overline{V}_{k-1}$ si ha:

$$\overline{\lim}\ \overline{V}_{k-1}/(\overline{U}_k(\varrho(\eta'))^{2k/(k-1)}) > 0\ . \tag{6.20}$$

D'altra parte, dalle formule (6.18) e (6.19) segue che esiste una particolare maggiorante $\overline{V}_{k-1}$ che è uguale proprio alla funzione $\overline{U}_k\ \varrho(\eta)$ (vedi la def. 5.1 di maggiorante $\overline{V}$); per questa maggiorante la (6.20) è un assurdo, a causa di $\varrho(\eta) \to +\infty$; poichè questo risultato è stato raggiunto per mezzo delle ipotesi:

A) il lemma è vero per il valore $k-1$,

B) il lemma è falso per il valore k,

si ha il passaggio di induzione dal valore $k-1$ al valore k. D'altra parte, abbiamo già dimostrato che il lemma è vero quando $k=1$, e quindi, per induzione, resta completamente dimostrato.

Lemma 6.2. *Sia* $S_{f_1} \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$ *e sia ancora, per un* k *fissato,* $k \geqslant 1$

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\ |\ V_k(\eta;\ f_1)\ |\ /(\eta^{n-1}\overline{V}_0^{k+1}(\eta;\ A-1)) = +\infty\,. \tag{6.21}$$

Allora esiste un intero m *e una funzione aritmetica* f_2 *con* $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}$ *tale che sia*

$$\overline{\lim_{\eta+\infty}}\ |\ V_k(\eta;\ f_2)\ |\ /(\eta^{n+m}\ \overline{V}_0^{k+1}(\eta;\ A-1)) = +\infty\,. \tag{6.22}$$

Osservazione. È su un lemma analogo a questo che si basa la dimostrazione del teorema principale; in esso al posto della (6.21) si considera il caso $\overline{\lim} > 0$, e $k=0$. Allora vale la (6.22) con $\overline{\lim} > 0$. Il caso esaminato nel Lemma 6.2 è più facile da risolvere, ma riteniamo interessante il processo con il quale dal Lemma 6.2 si ottiene il Teorema 6.4, processo che impiegheremo anche nella dimostrazione del teorema principale.

Dimostrazione.

Dal Lemma 6.1 e dal Teorema 6.2 ricaviamo la maggiorazione:

$$\begin{aligned} |\ V_k(\eta;\ f_1)\ | \leqslant\ & O((\overline{V}_0(\eta;\ A-1)(\eta^{n-1}\overline{V}_k^k(\eta;\ f_1))^{1/(k+1)}) + \\ & + \eta^{-m-1}\ |\ V_k(\eta;\ f_2)\ |\,, \end{aligned} \tag{6.23}$$

con $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}$. Supponendo falsa la (6.22) avremo intanto

(6.24) $$\eta^{-m-1} \mid V_k(\eta;\ f_2) \mid = O(\eta^{n-1} \overline{V}_0^{h+1}(\eta;\ \Lambda - 1)) .$$

Dalla (6.21) segue che esiste una funzione $\sigma(\eta) \to +\infty$ tale che sia [8]

(6.25) $$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \mid V_k(\eta;\ f_1) \mid / (\eta^{n-1} \overline{V}_0^{k+1}(\eta;\ \Lambda - 1)\sigma(\eta)) = 1 ,$$

(6.26) $$\sigma(\eta) = \eta^c\ c(\eta) ,$$

con c costante non negativa, e $c(\eta)$ una funzione lentamente oscillante. Allora, se η' è una successione tale che

$$\mid V_k(\eta';\ f_1) \mid \sim \eta'^{n-1} \overline{V}_0^{k+1}(\eta';\ \Lambda - 1)\sigma(\eta') ,$$

ricaviamo dalle formule (6.23) e (6.24):

(6.27) $$\overline{\lim_{\eta'\to\infty}}\ \overline{V}_k(\eta';\ f_1)/(\eta'^{n-1} \overline{V}_0^{k+1}(\eta';\ \Lambda - 1)(\sigma(\eta'))^{(k+1)/k}) > 0 .$$

D'altra parte, dalle formule (6.25) e (6.26) segue che esiste una particolare maggiorante $\overline{V}_k(\eta;\ f_1)$ che è uguale proprio alla funzione $\eta^{n-1} \overline{V}_0^{k+1}(\eta;\ \Lambda - 1)\sigma(\eta)$ (vedi la def. 5.1 di maggiorante $\overline{V}$); per questa maggiorante la (6.27) è un assurdo, a causa di $\sigma(\eta) \to +\infty$ e quindi il lemma è dimostrato.

Possiamo ora dimostrare il Teorema 6.4 come conseguenza dei Lemmi 6.1 e 6.2.

Supponiamo che la relazione (6.21) del Lemma 6.2 sia verificata per un k fissato $\geqslant 1$. Allora avremo immediatamente da questo lemma, per induzione, che esiste una successione di trasformazioni

$$\{ S_{f_r} \}, \quad \text{con } S_{f_r} \in \mathfrak{G}^*_{h+m_r, n-1+m_r+r}$$

per le quali

(6.28) $$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \mid V_k(\eta;\ f_r) \mid / (\eta^{n-2+m_r+r} \overline{V}_0^{k+1}(\eta;\ \Lambda - 1)) = +\infty .$$

---

[8] Per quanto riguarda l'esistenza della funzione $\sigma(\eta)$, vedi le osservazioni alla definizione 5.1.

D'altra parte dai Teoremi 6.1 e 5.6 segue senza difficoltà che

$$V_k(\eta;\ f_r) = O(\eta^{h+m_r-1})\,. \tag{6.29}$$

Dalle (6.28) e (6.29) avremo allora

$$h + m_r - 1 \geqslant n - 2 + m_r + r - (k+1)\alpha_0(\Lambda - 1)\,. \tag{6.30}$$

Infine, per ipotesi era $\alpha_0(\Lambda-1)$ una quantità finita; la disuguaglianza (6.30) è allora evidentemente impossibile per r abbastanza grande. Ne segue che è pure impossibile la relazione (6.21) quando $k \geqslant 1$; con questo è dimostrata la prima parte del Teorema 6.4 quando $k \geqslant 2$. Se $k = 1$, avremo dal Lemma 6.1 e dal Teorema 6.4 con $k = 2$,

$$|\,V_0(\eta;\ f)\,| \leqslant O((\eta^{n-1}(\eta^{n-1}\overline{V}_0^2(\eta;\ \Lambda-1)))^{1/2})$$

e quindi il Teorema 6.4 è valido anche per $k = 1$. Il caso $\alpha_0(\Lambda-1) = +\infty$ si risolve poi senza particolari difficoltà con l'aiuto della formula (6.3). Ricaviamo infatti dalla (6.3):

se $\alpha_0(\Lambda-1) = +\infty$, allora per $m' \geqslant \alpha_{k-1}(f_1)$ si ha

$$\alpha_k(f_1) - (m + m' + 1) \geqslant \min\,(\alpha_{k-1}(f_1) - m';\ \alpha_k(f_2))\,. \tag{6.31}$$

Se $\alpha_{k-1}(f_1) = +\infty$, dal Teorema 5.6 avremo $\alpha_k(f_1) = +\infty$. Se al contrario $\alpha_{k-1}(f_1)$ è una quantità finita, e così è anche $\alpha_k(f_1)$, presi m e m' sufficientemente grandi si ottiene:

esiste $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m+m',n+m+m'+1}$ per cui

$$\alpha_k(f_1) \geqslant m + m' + 1 + \alpha_k(f_2)\,. \tag{6.32}$$

Dalla (6.32) ricaviamo per induzione che, se $\alpha_k(f_1)$ è finito mentre $\alpha_0(\Lambda-1) = +\infty$, allora esiste una successione $\{S_{f_r}\}$ con $S_{f_r} \in \mathfrak{G}^*_{h+m_r,n-1+m_r+r}$ per la quale

$$\alpha_k(f_1) \geqslant m_r + r - 1 + \alpha_k(f_r)\,. \tag{6.33}$$

Infine, per la (6.29) deve essere

$$\alpha_k(f_r) \geqslant 1 - m_r - h\,, \tag{6.34}$$

e quindi dalla (6.33) otteniamo $\alpha_k(f_1) \geqslant r - h$. Poichè r è arbitrario, si ha $\alpha_k(f_1) = +\infty$, e la dimostrazione del Teorema 6.4 è così completata.

Ricordiamo qui che il Teorema 6.4 ci dà informazioni sulle funzioni $\overline{V}_k(\eta;\, f)$ con $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$ indipendentemente dalle ipotesi fatte all'inizio di questo paragrafo **VI**; la parte data dalla formula (6.11) prende in esame il caso in cui $\alpha_0(\Lambda - 1)$ oppure $\alpha_{k-1}(f)$ sono uguali a $+\infty$.

VI. 3. - Maggiorazione di $\int_\eta^{\eta'} V_0(t;f)\,dt$.

Teorema 6.5. *Sia* $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$. *Allora avremo per* $\eta < \eta' < 2\eta$:

$$\Big|\int_\eta^{\eta'} V_0(t;\, f)\,dt\,\Big| \leqslant O(\eta^{n-1}\overline{V}_0^2(\eta;\, \Lambda - 1))\,.$$

Dimostrazione.

Dal Teorema 5.4 si ricava

$$\int_0^\eta V_0(t;\, f)\,dt = \sum_{j=1}^k V_j(\eta;\, f) + V_{k+1}(\eta;\, f{*}1) + O(\eta^{-\lambda_k(f)+\varepsilon})$$

per ogni $\varepsilon > 0$ fissato. Dal risultato elementare di R. Breusch [2]:

$$\psi(x) = x + O(x/(\log x)^c) \qquad \text{con } c > 1/6 - \varepsilon$$

(vedi a questo proposito il paragrafo **I**), avremo intanto

$$\alpha_0(\Lambda - 1) \geqslant 1/6\,. \tag{6.35}$$

Ora, se $S_f \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$, si vede facilmente che esiste una costante a tale che $S_f S_1 - a S_1 \in \mathfrak{G}^*_{h+1,n+1}$. Ma allora ne segue facilmente, usando il Teorema 6.4:

$$V_{k+1}(\eta;\, f{*}1) = a + O(\eta^n \overline{V}_0^{k+2}(\eta;\, \Lambda - 1))\,. \tag{6.36}$$

Se ora prendiamo, ad es., $k = 7$, il termine $O(...)$ della (6.36) è $o(\eta^{n-1}\overline{V}_0^2(\eta;\, \Lambda - 1))$, e quindi per il Teorema 6.4 si ottiene la formula asintotica

$$\int_0^\eta V_0(t;\, f)\,dt = a + O(\eta^{n-1}\overline{V}_0^2(\eta;\, \Lambda - 1))\,, \tag{6.37}$$

dove a è una costante opportuna. È immediato il Teorema 6.5 da questa formula (6.37).

§ VII. — Completamento della dimostrazione del teorema principale.

VII. 1. - Il processo fondamentale di induzione.

Per dimostrare il Teorema A, che dimostreremo nella forma

$$V_0(\eta;\ \Lambda-1) = O(\eta^{-N}) \text{ per ogni } N>0 \text{ arbitrario fissato }, \tag{7.1}$$

ci appoggeremo sul seguente

Lemma fondamentale.

Sia $S_{f_1} \in \mathfrak{G}^*_{h,n}$, *sia* $\alpha_0(\Lambda-1)$ *finito, e sia*

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \,|\, V_0(\eta;\ f_1) \,|\, /(\eta^{n-1}\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda-1)) > 0\ . \tag{7.2}$$

Allora esistono m *e la trasformazione* S_{f_2} *con* $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m,n+m+1}$ *tale che*

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}} \,|\, V_0(\eta;\ f_2) \,|\, /(\eta^{n+m}\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda-1)) > 0\ . \tag{7.3}$$

Dimostrazione.

Applichiamo il Teorema 4.10 (la disuguaglianza fondamentale) alla trasformazione $S_{f_1L^{m'}}$. Allora esiste una funzione aritmetica f_2 con $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m+m',n+m+m'+1}$ per la quale

$$|\, S_{f_1L^{m+m'+1}}1 + S_{f_2}1 \,| \leqslant \binom{h+m+m'}{1+m}(m+1)S_{L^m}\,|\, S_{f_1L^{m'}}1 \,| + O(xL^{n+m'}). \tag{7.4}$$

Ora un calcolo analogo a quello svolto nella dimostrazione del Teorema 4.10 ci dà:

posto $F(x) = |\sum_{n\leq x} f_1(n)\,(\log n)^{m'}\,|$, si ha

$$S_{L^m}\,|\, S_{f_1L^{m'}}1 \,| = \sum_{n\leq x} \log^m n\cdot F(x/n)\ . \tag{7.5}$$

Infine avremo

$$\log^m n\cdot F(x/n) \leqslant \int_n^{n+1} \log^m t\cdot F(x/n)\,\mathrm{d}t = \tag{7.6}$$

$$= \int_n^{n+1} \log^m t\cdot F(x/t)\,\mathrm{d}t + \int_n^{n+1} \log^m t\cdot (F(x/n) - F(x/t))\,\mathrm{d}t\ .$$

Come nella formula (4.27) si ottiene una disuguaglianza

$$(7.7) \qquad | F(x) - F(y) | \leqslant \sum_{y<q\leq x} f(q) \,,$$

dove f è una funzione aritmetica opportuna tale che $S_f \in \mathfrak{G}_{h+m',n+m'}$. Procedendo come nella dimostrazione della disuguaglianza fondamentale, otteniamo infine:

$$(7.8) \qquad S_{L^m} \mid S_{f_1 L^{m'}} 1 \mid \leqslant \int_1^x \log^m t \cdot | S_{f_1 L^{m'}} (x/t) | \,\mathrm{d}t + O(xL^{n+m'}) \,.$$

Passando dalla (7.8) alle funzioni V con la trasformazione $x = e^\eta$, avremo la disuguaglianza

$$(7.9) \qquad | V_0(\eta;\, f_1\, L^{m+m'+1}) + V_0(\eta;\, f_2) | \leqslant$$

$$\leqslant \binom{h+m+m'}{1+m} (m+1) \int_0^\eta (\eta - t)^m \,| V_0(t;\, f_1\, L^{m'}) | \,\mathrm{d}t + O(\eta^{n+m'}) \,.$$

Per la formula (5.16), otteniamo dalla (7.9)

$$\eta^{m+m'+1} \,| V_0(\eta;\, f_1) | \leqslant \binom{h+m+m'}{1+m} (m+1) \int_0^\eta (\eta - t)^m \, t^{m'} \,| V_0(t;\, f_1) | \,\mathrm{d}t +$$

$$+ O(\eta^{m+m'} \overline{V}_0(\eta;\, f_1)) + O(\int_0^\eta (\eta - t)^m \, t^{m'-1} \overline{V}_0(t;\, f_1)\,\mathrm{d}t) + O(\eta^{n+m'}) +$$

$$+ | V_0(\eta;\, f_2) | \,,$$

e ricordando la relazione asintotica (5.14) avremo, quando $m' > \alpha_0(f_1)$,

$$(7.10) \qquad \eta^{m+m'+1} \,| V_0(\eta;\, f_1) | \leqslant \binom{h+m+m'}{1+m} (m+1) \int_0^\eta (\eta - t)^m \, t^{m'} \,| V_0(t;\, f_1) | \,\mathrm{d}t +$$

$$+ | V_0(\eta;\, f_2) | + O(\eta^{m+m'} \overline{V}_0(\eta;\, f_1)) + O(\eta^{n+m'}) \,.$$

Ora dal Teorema 6.4 avremo

$$\overline{\lim_{\eta\to\infty}}\, |\, V_0(\eta;\ f_1)\,|\,/(\eta^{n-1}\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda-1)) < +\infty\,. \tag{7.11}$$

Dalla formula (7.11) e dall'ipotesi (7.2) segue quindi che esiste una maggiorante $\overline{V}_0(\eta; f_1)$ uguale a $c_1\eta^{n-1}\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda-1)$ per una opportuna costante c_1:

$$\overline{V}_0(\eta;\ f_1) = c_1\eta^{n-1}\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda-1), \qquad \text{con } c_1 > 0\,. \tag{7.12}$$

Sceglieremo allora come maggiorante $\overline{V}_0(\eta;\ f_1)$ la maggiorante definita dalla (7.12).

Consideriamo ora l'integrale

$$\int_t^{t+\lambda} |\, V_0(u;\ f_1)\,|\, du\,. \tag{7.13}$$

Se $V_0(u;\ f_1)$ non cambia di segno in $(t,\ t+\lambda)$, allora dal Teorema 6.5 avremo

$$\int_t^{t+\lambda} |\, V_0(u;\ f_1)\,|\, du = O(t^{n-1}\overline{V}_0^2(t;\ \Lambda-1))\,. \tag{7.14}$$

Supponiamo al contrario che $V_0(u;\ f_1)$ abbia almeno un cambiamento di segno in $(t,\ t+\lambda)$.

Poichè ora la funzione $V_0(\eta;\ f_1)$ non può avere salti di discontinuità superiori a $O(e^{-\eta/2})$ (infatti si vede senza difficoltà che se $S_f\in\mathfrak{G}_{h,n}$ allora dobbiamo avere $f(m) = O(m^{1/2})$), ne segue che esiste un punto ξ, con $t < \xi < t+\lambda$, per cui

$$|\, V_0(\xi;\ f_1)\,| = O(e^{-t/2})\,. \tag{7.15}$$

Siano ora μ e ν due numeri per i quali

$$t < \xi - \nu < \xi + \mu < t + \lambda\,. \tag{7.16}$$

Allora avremo

$$\int_t^{t+\lambda} |\, V_0(u;\ f_1)\,|\, du = \Big(\int_t^{\xi-\nu} + \int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} + \int_{\xi+\mu}^{t+\lambda}\Big)\,|\, V_0(u;\ f_1)\,|\, du \leqslant \tag{7.17}$$

$$\leqslant (\lambda-(\mu+\nu))(1+o(1))\overline{V}_0(t;\ f_1) + \int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} |\, V_0(u;\ f_1)\,|\, du\,.$$

D'altra parte dal Teorema 6.3 avremo

$$| V_0(u;\ f_1) - V_0(\xi;\ f_1) | \leqslant K(f_1,\ N)u^{n-1} | u - \xi | + O(u^{-N})$$

quando $\xi - \nu < u < \xi + \mu$ e $\mu + \nu = O(1)$, da cui si ottiene

$$(7.18)\qquad \int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} | V_0(u;\ f_1) |\, du \leqslant \int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} | V_0(u;\ f_1) - V_0(\xi;\ f_1) |\, du + \int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} | V_0(\xi;\ f_1) |\, du \leqslant$$

$$\leqslant O(t^{n-1}) \int_{\xi-\nu}^{\xi+\mu} | u - \xi |\, du + O(t^{-N}) + O(\lambda e^{-t/2}) =$$

$$= O(t^{n-1})(\mu + \nu)^2 + O(t^{-N})$$

quando $\lambda = O(1)$. Dalle maggiorazioni (7.17) e (7.18) segue allora

$$(7.19)\qquad \int_{t}^{t+\lambda} | V_0(u;\ f_1) |\, du \leqslant$$

$$\leqslant (\lambda - (\mu + \nu))(1 + o(1))\overline{V}_0(t;\ f_1) + K(\mu + \nu)^2\ t^{n-1} + O(t^{-N}),$$

quando $V_0(u;\ f_1)$ ha un cambiamento di segno in $(t,\ t + \lambda)$, e inoltre $\lambda = O(1)$; nella (7.19) K indica una costante opportuna dipendente da f_1 e da N, e N è un numero positivo arbitrario fissato. Infine μ e ν devono soddisfare alla (7.16). Ne segue che la quantità $\mu + \nu$ è a nostra disposizione, purchè sia $\mu + \nu \leqslant \lambda$.

Se allora N è sufficientemente grande, e

$$(7.20)\qquad \lambda \geqslant (1/K)t^{-n+1}\overline{V}_0(t;\ f_1), \qquad \lambda = O(1),$$

ponendo nella (71.9)

$$\mu + \nu = (1/2K)t^{-n+1}\overline{V}_0(t;\ f_1)$$

avremo la maggiorazione

$$(7.21)\qquad \int_{t}^{t+\lambda} | V_0(u;\ f_1) |\, du \leqslant (1 + o(1))\overline{V}_0(t;\ f_1)(\lambda - (1/4K)t^{-n+1}\overline{V}_0(t;\ f_1))$$

quando $V_0(u;\ f_1)$ cambia di segno in $(t,\ t+\lambda)$. Se $V_0(u;\ f_1)$ non cambia di segno in $(t,\ t+\lambda)$, vale la maggiorazione (7.14):

$$\int_t^{t+\lambda} |\ V_0(u;\ f_1)\ |\ du \leqslant H t^{n-1} \overline{V}_0^2(t;\ A-1) \tag{7.14'}$$

per una opportuna costante H.

Per la (7.12), possiamo supporre $\overline{V}_0(\eta;\ f_1) = c_1\, \eta^{n-1} \overline{V}_0(\eta;\ A-1)$. Poniamo allora

$$M = \max\,(1/K;\ 1/4K + H/c_1^2)\,, \tag{7.22}$$

$$\lambda = M t^{-n+1} \overline{V}_0(t;\ f_1) = M c_1 \overline{V}_0(t;\ A-1)\,. \tag{7.23}$$

Poichè $\overline{V}_0(t;\ A-1) = O(1)$, la (7.20) è soddisfatta, e dalle (7.14′) e (7.21) avremo finalmente, qualunque sia il comportamento di $V_0(u;\ f_1)$ nell'intervallo $(t,\ t+\lambda)$,

$$\int_t^{t+\lambda} |\ V_0(u;\ f_1)\ |\ du \leqslant (1+o(1))\ \chi\ \lambda\ \overline{V}_0(t;\ f_1)\,, \tag{7.24}$$

con

$$\chi = \max\,(H/(Mc_1^2);\ 1 - 1/(4KM)) < 1\,,$$

$$\lambda = \lambda(t) = M c_1 \overline{V}_0(t;\ A-1) = M t^{-n+1} \overline{V}_0(t;\ f_1)\,.$$

Dalla maggiorazione (7.24) avremo allora senza particolari difficoltà, se $\overline{V}_0(\eta;\ f_1)$ è dato dalla (7.12),

$$\int_0^\eta (\eta - t)^m\ t^{m'}\ |\ V_0(t;\ f_1)\ |\ dt \leqslant (1+o(1))\chi \int_0^\eta (\eta - t)^m\ t^{m'} \overline{V}_0(t;\ f_1)\ dt \tag{7.25}$$

per un opportuno $\chi < 1$, *indipendente da m e da m′*. Ora, se $m' > \alpha_0(f_1)$, dalla formula (5.14) segue

$$\int_0^\eta (\eta - t)^m\ t^{m'} \overline{V}_0(t;\ f_1)\ dt \sim B(m+1,\ m' + n - \alpha_0(A-1))\,. \tag{7.26}$$

$$\cdot\, \eta^{m+m'+1} \overline{V}_0(\eta;\ f_1)$$

(dove $B(x, y)$ è la funzione Beta di EULERO), a causa di $\alpha_0(f_1) = \alpha_0(\Lambda - 1) - n + 1$.

D'altra parte, fissati m, h, n e $\alpha_0(\Lambda - 1)$, vale la relazione di limite:

$$\lim_{m'\to\infty}\left\{\binom{h+m+m'}{1+m}(m+1)B(m+1,\ m'+n-\alpha_0(\Lambda-1))\right\} = 1 . \tag{7.27}$$

Sia allora m' così grande che $m' > \alpha_0(\Lambda - 1)$ e

$$\chi \cdot \binom{h+m+m'}{1+m}(m+1)B(m+1,\ m'+n-\alpha_0(\Lambda-1)) < \chi' < 1 . \tag{7.28}$$

Ciò è possibile, per la (7.27) e poichè la costante $\chi < 1$ risulta indipendente da m e da m'. Supponiamo ancora $m > \alpha_0(\Lambda - 1)$, ad esempio $m = [\alpha_0(\Lambda - 1)] + 1$. Avremo allora dalle formule (7.28), (7.26), (7.25) e (7.10):

$$\eta^{m+m'+1}\,|\,V_0(\eta;\ f_1)\,| \leqslant \chi'\eta^{m+m'+1}\overline{V}_0(\eta;\ f_1) + |\,V_0(\eta;\ f_2)\,| + O(\eta^{n+m'}), \tag{7.29}$$

dove $\overline{V}_0(\eta;\ f_1) = c_1\,\eta^{n-1}\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda - 1)$.

Infine, avevamo scelto $m > \alpha_0(\Lambda - 1)$. Con questa scelta, avremo $\eta^{n+m'} = o(\eta^{m+m'+1}\overline{V}_0(\eta;\ f_1))$ a causa di $\alpha_0(f_1) = \alpha_0(\Lambda - 1) - n + 1$, come si vede dalla (7.12). Se poi $\{\ \eta'\ \}$ è una successione per la quale $|\,V_0(\eta';\ f_1)\,| \sim \overline{V}_0(\eta';\ f_1)$, avremo dalla (7.29) e dalla formula $\overline{V}_0(\eta;\ f_1) = c_1\,\eta^{n-1}\overline{V}_0(\eta;\ \Lambda - 1)$:

$$V_0(\eta';\ f_2) \geqslant (1 + o(1))(1 - \chi')c_1\,\eta'^{\,n+m+m'}\overline{V}_0(\eta';\ \Lambda - 1); \tag{7.30}$$

poichè infine si ha $S_{f_2} \in \mathfrak{G}^*_{h+m+m',n+m+m'+1}$, otteniamo dalla (7.30) il lemma fondamentale, con $m + m'$ al posto di m.

Osservazioni alla dimostrazione. Il processo di maggiorazione usato per l'integrale $\int_t^{t+\lambda}$ è una modifica del procedimento di A. SELBERG [6], perfezionato da E. M. WRIGHT [8]. Si vede bene qui l'importanza dei due parametri interi arbitrari m e m', la cui introduzione ci sembra di un certo interesse.

VII. 2. - La dimostrazione del teorema.

Supponiamo che sia $\alpha_0(\Lambda - 1)$ una quantità finita. Poniamo nel lemma fondamentale $f_1 = \Lambda - 1$. Poichè $S_{\Lambda-1} \in \mathfrak{G}^*_{1,1}$, la (7.2) è evidentemente verificata e con essa le ipotesi del lemma fondamentale. Ne viene immediatamente per induzione che esiste una successione di trasformazioni $\{ S_{f_r} \}$ con

$$S_{f_r} \in \mathfrak{G}^*_{h_r, h_r + r - 1}, \qquad f_1 = \Lambda - 1 ,$$

per le quali si ha

$$\overline{\lim_{\eta \to \infty}} \mid V_0(\eta;\ f_r) \mid / (\eta^{h_r + r - 2}\, \overline{V}_0(\eta;\ \Lambda - 1)) > 0 . \tag{7.31}$$

Dalla (7.31) segue immediatamente la disuguaglianza

$$\alpha_0(f_r) \leqslant \alpha_0(\Lambda - 1) + 2 - h_r - r . \tag{7.32}$$

Ricordiamo ora il Teorema 6.1. Ne ricaviamo la disuguaglianza

$$\alpha_0(f_r) \geqslant 1 - h_r , \tag{7.33}$$

ed infine dalle (7.32) e (7.33) si ottiene $\alpha_0(\Lambda - 1) \geqslant r - 1$. Poichè r è arbitrario, si ha un assurdo con l'ipotesi $\alpha_0(\Lambda - 1)$ finito. Ne segue $\alpha_0(\Lambda - 1) = +\infty$, da cui $V_0(\eta;\ \Lambda - 1) = O(\eta^{-N})$ per ogni N arbitrario fissato. Ricordando la formula (5.1), il Teorema A è completamente dimostrato.

Il Teorema B è infine una conseguenza immediata dell'ultima parte del Teorema 6.4 .

VII. 3. - Osservazioni finali.

È possibile modificare la dimostrazione ora data del Teorema A in modo da ottenere un risultato del tipo seguente:

$$\psi(x) = x + O(x \exp(-h(x))) , \tag{7.34}$$

con una esplicita funzione $h(x)$ per la quale

$$\lim_{x \to \infty} \{ h(x) / \log \log x \} = +\infty . \tag{7.35}$$

Dovrebbe inoltre essere possibile generalizzare i risultati ora trovati al caso dei « Primzahlsatz astratti », in particolare al caso del « Primzahlsatz » per le progressioni aritmetiche.

Di notevole aiuto nella dimostrazione è stato il formalismo di S. A. AMITSUR, che permette di chiarire la struttura delle formule del tipo di SELBERG; inoltre l'idea di introdurre il cambiamento di variabili $x = e^{\eta}$ che porta a considerare le funzioni V_k risale a E. M. WRIGHT [8]; sembra però nuova la considerazione delle funzioni V_k nella loro dipendenza dal parametro intero k. Sembra nuova anche l'idea, che ha un ruolo essenziale nella dimostrazione, di lavorare sulle funzioni fL^m invece che sulle funzioni f; questo permette di maggiorare in modo utile V_1 per mezzo di V_0, e permette inoltre di conservare l'effetto di « riduzione dell'integrale » del fattore χ del § 7.

L'idea di usare la disuguaglianza

$$|P_n(-S_\Lambda, \ldots, -S_{\Lambda L^{n-1}})| \leqslant S_{\Lambda_n} \tag{7.36}$$

risale, per $n = 2$, ad A. SELBERG [6]. A questo proposito ricordiamo che abbiamo definito « sorprendente » la maggiorazione (2.5). Infatti, a giustificazione di questa affermazione, osserviamo che dal Teorema B si ha senza difficoltà

$$P_n(-S_\Lambda, \ldots, -S_{\Lambda L^{n-1}})1 \sim a_n x , \tag{7.37}$$

per una opportuna costante a_n, ed essendo invece

$$S_{\Lambda_n}1 \sim nx \log^{n-1}x , \tag{7.38}$$

riteniamo di grande interesse che la disuguaglianza (7.36) possa condurre ai Teoremi A e B.

Bibliografia.

Sul « Primzahlsatz » vedasi:

[1] R. BREUSCH, *Another proof of the prime number theorem*, Duke Math. J. **21** (1954), 49-53.

[2] R. BREUSCH, *An elementary proof of the prime number theorem with remainder term*, Pacific J. Math. **10** 1960), 487-499.

[3] P. ERDÖS, *On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **35** (1949), 374-384.

[4] G. H. HARDY and E. M. WRIGHT, *An introduction to the theory of numbers*, IV ed. Oxford 1960.

[5] P. KUNH, *Eine Verbesserung des Restgliedes beim elementaren Beweis des Primzahlsatzes*, Math. Scand. **3** (1955), 75-89.

[6] A. SELBERG *An elementary proof of the prime number theorem*, Ann. of Math. **50** (1949), 305-313.

[7] J. G. Van der Corput, *Sur le reste dans la démonstration élémentaire du théorème des nombres premiers* Colloque sur la theorie des nombres, Bruxelles 1956, 183-194.

[8] E. M. Wright, *The elementary proof of the prime number theorem*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh (A) **63** (1952), 257-267.

Sulle generalizzazioni « classiche » del « Primzahlsatz » vedasi:

[9] H. Ehlich, *Ein elementarer Beweis des Primzahlsatzes für binäre quadratische Formen*, J. Reine Angew. Math. **201** (1959), 1-36.

[10] G. J. Rieger, *Verallgemeinerung der Selberg schen Formel auf Idealklassen* mod *f in algebraische Zahlkörpern*, Math. Z. **69** (1958), 183-194.

[11] A. Selberg, *An elementary proof of Dirichlet's theorem about primes in an arithmetic progression*, Ann. of Math. **50** (1949), 297-304.

[12] A. Selberg, *An elementary proof of the prime number theorem for arithmetic progression*, Canad. J. Math. **2** (1950), 66-78.

[13] H. N. Shapiro, *An elementary proof of the prime ideal theorem*, Comm. Pure Appl. Math. **2** (1949), 309-323.

[14] H. N. Shapiro, *On a theorem of Selberg and generalizations*, Ann. of Math. **51** (1950), 485-497.

[15] H. N. Shapiro, *On primes in arithmetic progression*, I and II, Ann. of Math. **52** (1950), 217-230 and 231-243.

Sulle generalizzazioni astratte del « Primzahlsatz » e sul calcolo simbolico vedasi:

[16] S. A. Amitsur, *On arithmetic functions*, J. Analyse Math. **5** (1956-57), 273-317.

[17] S. A. Amitsur, *Some results on arithmetic functions*, J. Math. Soc. Japan **11** (1959), 275-290.

[18] S. A. Amitsur, *Arithmetic linear transformations and abstract prime number theorems*, Canad. J. Math. **13** (1961), 83-109.

[19] W. Forman and H. N. Shapiro, *Abstract prime number theorems*, Comm. Pure Appl. Math. **7** (1954), 587-619.

[20] K. Yamamoto, *Theory of arithmetic linear transformations and its applications to an elementary proof of Dirichlet's theorem*, J. Math. Soc. Japan **7** (1955), 424-434.

[21] K. Yamamoto, *Arithmetic linear transformations in an algebraic number field*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, **12** (1958), 41-66.

Sui teoremi Tauberiani collegati con la dimostrazione elementare del « Primzahlsatz » vedasi:

[22] H. EHLICH, *Über die elementaren Beweise der Primzahlsatze*, J. Reine Angew. Math. **203** (1960), 143-153.

[23] P. ERDÖS, *On a Tauberian theorem connected with the new proof of the prime number theorem*, J. Indian Math. Soc. **13** (1949), 131-147.

[24] H. R. PITT, *Tauberian theorems*, Oxford 1958.

[25] H. N. SHAPIRO, *Tauberian theorems and elementary prime number theory*, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 579-610.

[26] E. M. WRIGHT, *Functional inequalities in the elementary theory of primes*, Duke Math. J. **19** (1952), 695-704.

Sui metodi della teoria delle funzioni analitiche nello studio della distribuzione dei numeri primi, vedasi:

[27] N. M. KOROBOV, *Maggiorazioni di somme di Weyl e la distribuzione dei numeri primi* (in lingua russa), Dokl. Akad. Nauk SSSR **123** (1958), 28-31.

[28] K. PRACHAR, *Primzahlverteilung*, Springer, Berlin 1957.

[29] I. M. VINOGRADOV, *Una nuova maggiorazione della funzione* $\zeta(1+it)$ (in lingua russa), Izv. Akad. Nauk SSSR., Ser. Mat. **22** (1958), 161-164.

Indice.

Summary

Using the elementary method of Erdös and Selberg, one proves the result $\vartheta(x) = x + O(x/\log^m x)$ *for every* m.

* * *

Errata.

S. N. SRIVASTAVA, *On the order and type of integral functions.* Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 265-280.

The statement of Theorem 2 of « Section I » is:

If $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *and* $f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ *be integral functions of regular growth and of finite orders* ϱ_1, ϱ_2 *respectively, then the function* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, *where*

$$\log\{1/|c_n|\} \sim |\sqrt{\log\{1/|a_n|\} \cdot \log\{1/|b_n|\}}|,$$

is an integral function of regular growth and order ϱ, *such that*

$$\sqrt{\varrho_1 \varrho_2} = \varrho .$$

The conditions « $|a_n/a_{n+1}|$, $|b_n/b_{n+1}|$ and $|c_n/c_{n+1}|$ are non-decreasing functions of n for $n > n_0$ », should be added in the statement of the above theorem.

Without these conditions the order ϱ of the function $f(z)$ need not necessarily be equal to $\sqrt{\varrho_1 \varrho_2}$.

* * *

Indice

del Volume « Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962) ».

* * *