Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 331-391

ALBERT CRUMEYROLLE (*)

Sur quelques interprétations physiques et théoriques des équations du champ unitaire d'Einstein-Schrödinger. (**)

Introduction.

1. - De la relativité restreinte aux théories unitaires.

La théorie de la relativité restreinte a été bâtie sur l'électromagnétisme dans le but d'étendre à toute la physique la loi d'équivalence des repères galiléens que l'on postule dans la dynamique newtonienne du point.

Dans le cadre géométrique constitué par un espace à quatre dimensions improprement euclidien ou de MINKOWSKI est apparue la possibilité de réunir dans un même champ de tenseurs antisymétriques $F^{\lambda\mu}$ le champ électrique et le champ magnétique qui apparaissent comme étrangers l'un à l'autre dans l'espace euclidien ordinaire $\mathcal{E}_3$ de la mécanique newtonienne. Cependant dans le cadre de la relativité restreinte la gravitation ne reçoit aucune explication: c'est un phénomène singulier superposé au champ électromagnétique.

(*) Adresse: Faculté des Sciences, Université, Toulouse, France.

(**) Reçu le 20-VI- 1961.

Thèse présentée à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris et soutenue le 5 Mai 1961 devant la Commission: M. A. LICHNEROWICZ, président; M[mes] TONNELAT, BRUHAT, examinateurs.

Dans le cadre de la relativité générale le champ de gravitation est représenté à l'aide d'un tenseur symétrique $g_{\lambda\mu}$ ou tenseur des potentiels de gravitation, il fournit sur une variété riemannienne à quatre dimensions une métrique de type hyperbolique normal qui permet une géométrisation complète du phénomène de gravitation en dehors de la matière et en l'absence de champ électromagnétique, la loi de NEWTON étant remplacée par six conditions indépendantes imposées à la structure de l'espace-temps, et les trajectoires des particules devenant les géodésiques d'un espace de RIEMANN quadridimensionnel.

Néanmoins, à l'intérieur de la matière, et à l'extérieur s'il existe un champ électromagnétique la géométrisation introduite est insuffisante pour expliquer les phénomènes mécaniques et physiques et on doit faire appel à un tenseur d'énergie $T_{\lambda\mu}$ symétrique qui s'obtient par extrapolation des résultats classiques sur la mécanique des fluides (cas intérieur) ou de la théorie de MAXWELL-LORENTZ (cas extérieur) sous leur forme tensorielle.

Les théories unitaires se proposent de fondre en un même hyperchamp le champ électromagnétique et le champ de gravitation, les lois physiques tirant leur explication d'une structure géométrique imposée à l'Espace-temps en dehors de toute hypothèse phénoménologique. On réalise l'ambition d'une telle explication, bien dans l'esprit de la philosophie cartésienne, et qui loin de suivre pas à pas les résultats de l'observation et de l'expérience, prétend les devancer, incorporant leurs apports actuels dans une vaste synthèse et leur fixant tout un programme de vérifications a posteriori.

Comme la donnée de la métrique d'un espace épuise ses propriétés géométriques il faut nécessairement dans une théorie unitaire élargir le cadre de la relativité générale soit en augmentant le nombre des dimensions de la variété (Théorie de JORDAN-THIRY) soit en se plaçant dans le cadre plus général des variétés à connexion linéaire et on aboutit ainsi à la théorie d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. C'est à cette dernière que nous allons consacrer la première partie de cette étude. Nous renvoyons pour l'exposé de la genèse de cette théorie au livre de M. LICHNEROWICZ [12].

Les équations du champ d'EISTEIN-SCHRÖDINGER peuvent se déduire d'un principe variationnel que l'on utilise aussi en relativité générale: c'est en quelque sorte une extrapolation du cas dit « extérieur », le cas intérieur devant disparaître en un certain sens. On sait que les éléments fondamentaux en sont un champ de tenseurs non symétriques $g_{\lambda\mu}$ et un champ de connexions $\Gamma^{\lambda}_{\beta\gamma}$ également non symétriques. Ces éléments n'ont a priori aucune signification physique: on ne pourra leur en trouver que selon la nature des relations qu'ils ont entre eux, ces relations devant redonner, au moins de manière approchée, celles de la théorie phénoménologique. EINSTEIN pensait que son ultime théorie unitaire contenait la possibilité d'explication de tous les phénomènes physiques aussi bien dans le cas « intérieur » que dans le cas « extérieur ». Il ne semble pas que les travaux effectués depuis sa mort par ses successeurs justifient à l'heure actuelle un tel optimisme; par contre ses équations nous paraissent bien adaptées à une interprétation physique complète dans le cas « extérieur » la présence de matiére étant liée aux singularités du champ.

En bref, nous avons voulu montrer que cette théorie rend compte du champ créé par des corps sphériques chargés ou neutres dans le vide qui les entoure, loin de ces corps et dans des hypothèses de vitesses faibles relativement à celle de la lumière. Tout cela semble bien s'appliquer aux objets astronomiques et à certains corpuscules élémentaires de la physique atomique.

2. - Rappel sommaire des interprétations anterieurement proposées et résumé de la première partie de notre étude.

La relativité générale donnant une géométrisation satisfaisante des phénomènes dans le cas extérieur en l'absence de champ électromagnétique, à l'aide d'un champ de tenseurs symétriques, conduisant à des coefficients de connexion également symétriques — ceux de RIEMANN-CHRISTOFFEL —, il était naturel de lier le champ électromagnétique à la partie antisymétrique des tenseurs ou des connexions. D'autre part, la méthode dite des singularités de EINSTEIN, INFELD, HOFFMANN (1938) permet de déduire les équations du mouvement d'un corps en utilisant simplement les équations du cas extérieur: une extension de cette méthode en théorie unitaire était bien indiquée. INFELD et CALLAWAY ont donc essayé de déduire, par cette méthode, les équations du mouvement des particules neutres ou chargées, des équations d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. Mais si leur méthode redonne bien, comme il fallait s'y attendre, les équations du mouvement des particules neutres, elle conduit à ce résultat paradoxal que le mouvement des particules chargées ne serait pas influencé par la présence d'un champ électromagnétique: c'était la faillite complète de la théorie unitaire ou du moins de son interprétation.

La méthode de CALLAWAY-INFELD a été reprise et améliorée par PHAM TAN HOANG qui arrive cependant au même résultat négatif que ses prédécesseurs.

A notre avis l'échec de ces tentatives résulte d'un mauvais choix des coefficients susceptibles de représenter les composantes du champ électromagnétique. Le choix de ces auteurs conduit à supposer en première approximation qu'une certaine fonction φ est harmonique au sens usuel et de la forme $\frac{A}{r}$, A désignant une constante et r la distance ordinaire; or une étude approfondie des équations conduit à choisir pour φ une fonction biharmonique $\frac{A}{r} + B\,r^2 + C\,r$ (B et C

étant des constantes) et pour le champ électrique le potentiel harmonique $K \cdot \Delta\varphi$, K désignant une nouvelle constante.

A notre connaissance TREDER (cf. [26]) et CLAUSER (cf. [5]) ont signalé les premiers la possibilité d'utiliser pour φ une fonction biharmonique, mais leur interprétation est différente de la nôtre en ce qui concerne le choix des coefficients susceptibles de représenter le champ électromagnétique: l'un et l'autre lient directement ce champ à la partie antisymétrique des potentiels $g_{\lambda\mu}$, alors que dans nôtre travail il est lié à la partie antisymétrique du tenseur de RICCI. La publication de CLAUSER (cf. [5]) ne contient aucun résultat sur les équations de MAXWELL, celle de TREDER (cf. [26]) examine le problème et constate des contradictions qu'elle ne résout point. D'ailleurs l'un et l'autre conservent aussi φ comme potentiel électrostatique: le choix d'un potentiel proportionnel à $\Delta\varphi$, fonction harmonique lève la plupart des difficultés.

Le problème du mouvement des particules chargées est résolu par CLAUSER et TREDER. Le premier utilise un superpotentiel déduit des identités de conservation mises par SCHRÖDINGER sous forme d'équations en divergence ordinaire. (cf. [24], pp. 109-113). Le calcul d'un flux nul sur des sections d'espaces à structure euclidienne lui donne les conditions cherchées. Par la méthode d'INFELD et HOFFMANN, TREDER obtient aussi les mêmes équations.

Dans notre travail, après avoir obtenu les équations de MAXWELL-LORENTZ dans le vide, nous avons abordé le problème du mouvement des particules en reprenant au début une méthode analogue à celle de PHAM TAN HOANG, mais en conduisant ensuite les calculs de manière différente par une utilisation plus complète des conditions d'isothermie allégeant considérablement les calculs: nous retrouvons ainsi par une méthode nouvelle les équations déja obtenues par CLAUSER et TREDER; cette méthode paraît aussi moins artificielle que celle de ces auteurs qui choisissent pour leurs intégrations des combinaisons assez arbitraires des composantes du tenseur de RICCI.

La première partie de ce travail se termine par un chapitre consacré à la recherche d'un tenseur d'énergie électromagnétique, problème délicat, car les résultats de la relativité restreinte n'ont jamais été sur ce point convenablement généralisés, et de plus le tenseur d'énergie que l'on considère habituellement n'est pas défini de façon intrinsèque: seule sa divergence a une signification. Nous avons montré que la partie symetrique $h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}$ donne un accord remarquable mais tout de même imparfait avec les résultats de la relativité générale, quand on l'utilise loin des particules pour construire un tenseur d'énergie. D'autres solutions sont possibles mais aucune ne donne des résultats parfaitement satisfaisants si on les compare à ceux que donnent l'étude du problème de CAUCHY.

3. - Un nouveau formalisme unitaire.

On a déjà tenté de géométriser et d'élargir le cadre des théorie unitaires et nous citerons les travaux de M.me MAURER-TISON sur les connexions coaffines, ceux de LENOIR qui partent d'un point de vue voisin, ceux de GROSJEAN sur les espaces « semi-métriques octodimensionnels », de MOFFAT à variables de champ imaginaires.

Certains de ces travaux présentent le défaut de n'apporter qu'un nouveau schéma dans lequel s'incorporent des résultats connus et rien d'autre. Il est difficile d'interpréter physiquement les nouvelles variables de configurations utilisées par certains auteurs et le recours à un espace-quotient parait bien artificiel.

En utilisant une technique voisine de celle de M. LICHNEROWICZ dans l'étude des connexions presque complexes, nous plongeons la variété fondamentale W_4 dans une variété plus vaste V_8, ce qui nous permet, sans augmenter le nombre des variables de configuration, d'introduire un espace tangent octodimentionnel et facultativement de nouvelles variables de champ. Nous avons montré que l'on pouvait continuer à utiliser un tenseur symétrique g_{ij}, et surtout le théorème de RICCI qui donne une grande souplesse à toutes les opérations de dérivation covariante. Les identités de RICCI et de BIANCHI redonnent des résultats connus mais de manière très simple et très naturelle. L'usage des notations $(+\ -)$ d'EINSTEIN pour les deux sortes de dérivées covariantes devient inutile. Dans cette nouvelle optique le choix des équations de champ est largement arbitraire: c'est un problème que nous n'avons fait qu'aborder, nous étant surtout attaché à mettre sur pied un nouveau formalisme. Nous proposons un système d'équations susceptibles de redonner dans un cas particulier celles d'EINSTEIN-SCHRÖDINGER mais pouvant aussi s'interpréter de manière essentiellement différente pour le champ de gravitation, lequel s'accompagnerait d'un champ de « magnéto-gravitation » qui est au premier ce qu'est le champ magnétique relativement au champ électrostatique. Tous les champs seraient représentés par les parties anti-symétriques des tenseurs de RICCI et satisferaient à des équations en tous points analogues.

Ce travail n'aurait pas vu le jour sans les conseils et les encouragements de M. le Professeur LICHNEROWICZ, du Collège de France, à qui j'exprime ici mes plus sincères remerciements. Je remercie également M.me M. A. TONNELAT et M.me Y. BRUHAT dont les indications ont eu pour moi beaucoup de prix, sans oublier tous ceux, qui, bénévolement, m'ont communiqué les résultats de leurs travaux.

PREMIÈRE PARTIE

CHAPITRE I.

RECHERCHE ET INTERPRETATION D'UNE SOLUTION APPROCHÉE DES ÉQUATIONS DU CHAMP UNITAIRE.

§ 1. - Rappel de résultats fondamentaux. Préliminaires.

1. - L'hyperchamp de base.

Sur une variété différentiable V_4 à quatre dimensions on se donne indépendamment une connexion linéaire à vecteur de torsion nul $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ et un champ de tenseurs $g_{\alpha\beta}$, relativement au repère naturel de coordonnés locales x^{α} $(\alpha = 0, 1, 2, 3)$.

Comme en relativité générale nous supposons que la variété est de classe C^2, C^4 par morceaux. Le tenseur fondamental $g_{\alpha\beta}$ étant de classe C^1, C^3 par morceaux. Des hypothèses sur la différentiabilté de V_4 et des formules de changement de coordonnées pour les coefficients d'une connexion linéaire il résulte qu' il faut supposer les $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ continus et de classe C^2 par morceaux.

Nous supposons de plus que:

a) $g = \text{dét}\,(g_{\alpha\beta}) \neq 0$, le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est régulier;

b) la forme quadratique $\Phi\,(u) = g_{\alpha\beta}\, u^{\alpha}\, u^{\beta}$ est non dégénérée, de type hyperbolique normal.

La condition a) entraîne l'existence d'un tenseur $g^{\alpha\beta}$ tel que:

$$g_{\alpha\varrho}\, g^{\beta\varrho} = g_{\varrho\alpha}\, g^{\varrho\beta} = \delta^{\beta}_{\alpha}\ ;$$

$g^{\alpha\beta}$ sera dit associé à $g_{\alpha\beta}$.

2. - Les tenseurs déduits de $g_{\alpha\beta}$ par symétrisation ou antisymétrisation.

Nous poserons:

$$g_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\beta}, \qquad g^{\alpha\beta} = l^{\alpha\beta} + m^{\alpha\beta}$$

avec

$$h_{\alpha\beta} = g_{(\alpha\beta)}, \qquad k_{\alpha\beta} = g_{[\alpha\beta]},$$

$$l^{\alpha\beta} = g^{(\alpha\beta)}, \qquad m^{\alpha\beta} = g^{[\alpha\beta]}.$$

On peut montrer (conférer [**12**], page 255) que l'hypothèse b) entraîne la régularité des tenseurs $h^{\alpha\beta}$ et $l_{\alpha\beta}$.

3. - Les équations du champ.

Rappelons ici le système des équations du champ ([**12**], p. 266):

$$\text{(1.1)} \qquad \partial_\varrho g_{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\varrho} g_{\sigma\mu} - L^\sigma_{\varrho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0,$$

$$\text{(1.2)} \qquad \partial_\varrho \{\sqrt{|g|}\, g^{[\varrho\beta]}\} = \partial_\varrho \bar{g}^{[\varrho\beta]} = 0,$$

$$\text{(1.3)} \qquad P_{\alpha\beta} - \frac{2}{3}(\partial_\alpha S'_\beta - \partial_\beta S'_\alpha) = 0$$

(S'_α vecteur covariant arbitraire) dans lesquelles

$$\bar{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta},$$

$$P_{\alpha\beta} = \partial_\sigma L^\sigma_{\alpha\beta} - \partial_\beta L^\sigma_{\alpha\sigma} + L^\sigma_{\varrho\sigma} L^\varrho_{\alpha\beta} - L^\sigma_{\varrho\beta} L^\varrho_{\alpha\sigma};$$

on sait que localement le système précédent peut être remplacé par le système suivant:

$$\text{(1.1)} \qquad \partial_\varrho g_{\lambda\mu} - L^\sigma_{\lambda\varrho} g_{\sigma\mu} - L^\sigma_{\varrho\mu} g_{\lambda\sigma} = 0,$$

$$\text{(1.4)} \qquad L^\varrho_{[\alpha\varrho]} = S_\alpha = 0,$$

$$\text{(1.5)} \qquad P_{(\alpha\beta)} = 0,$$

$$\text{(1.6)} \qquad \partial_\alpha P_{[\beta\gamma]} + \partial_\beta P_{[\gamma\alpha]} + \partial_\gamma P_{[\alpha\beta]} = 0.$$

4. - Quelques formules remarquables.

Nous inspirant des calculs de M. A. TONNELAT (cf. [24]) nous poserons:

$$L^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{(\beta\gamma)} + S^{\alpha}_{\beta\gamma}\,, \qquad S^{\alpha}_{\beta\gamma} = L^{\alpha}_{[\beta\gamma]}$$

et formerons à l'aide (1.1) la combinaison algorithmique qui conduit en géométrie riemannienne aux symboles de CHRISTOFFEL. Il vient ainsi:

$$\frac{1}{2}\left(\partial_\mu g_{\lambda\varrho} + \partial_\lambda g_{\varrho\mu} - \partial_\varrho g_{\mu\lambda}\right) = L^{\sigma}_{\lambda\mu} h_{\sigma\varrho} - L^{\sigma}_{\mu\varrho} k_{\sigma\varrho} + L^{\sigma}_{\varrho\lambda} k_{\sigma\mu}$$

puis en prenant la partie symétrique:

$$L^{\nu}_{(\lambda\mu)} = \frac{h^{\nu\varrho}}{2}\left(\partial_\lambda h_{\varrho\mu} + \partial_\mu h_{\lambda\varrho} - \partial_\varrho h_{\mu\lambda}\right) + h^{\nu\varrho}\left(S^{\sigma}_{\mu\varrho} k_{\sigma\lambda} + S^{\sigma}_{\lambda\varrho} k_{\sigma\mu}\right),$$

$$L^{\nu}_{(\lambda\mu)} = \left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}_h + h^{\nu\varrho}\left(S^{\sigma}_{\mu\varrho} k_{\sigma\lambda} + S^{\sigma}_{\lambda\varrho} k_{\sigma\mu}\right). \tag{1.7}$$

Nous poserons:

$$U^{\nu}_{\lambda\mu} = \left(S^{\sigma}_{\mu\varrho} k_{\sigma\lambda} + S^{\sigma}_{\lambda\varrho} k_{\sigma\mu}\right) h^{\nu\varrho}, \tag{1.8}$$

on obtient ensuite par antisymétrisation:

$$S^{\nu}_{\lambda\mu} = \frac{h^{\nu\varrho}}{2}\left(\partial_\mu k_{\lambda\varrho} + \partial_\lambda k_{\varrho\mu} - \partial_\varrho k_{\mu\lambda}\right) + h^{\nu\varrho}\left(L^{\sigma}_{(\lambda\varrho)} k_{\mu\sigma} + L^{\sigma}_{(\mu\varrho)} k_{\sigma\lambda}\right). \tag{1.9}$$

Nous aurons également besoin plus loin d'une forme remarquable du tenseur de RICCI $P_{\mu\nu}$ que nous allons ècrire:

Posons:

$$L^{\varrho}_{\mu\nu} = \left\{ {\sigma \atop \mu\nu} \right\}_h + U^{\varrho}_{\mu\nu} + S^{\varrho}_{\mu\nu}\,,$$

$$\Theta^{\varrho}_{\mu\nu} = U^{\varrho}_{\mu\nu} + S^{\varrho}_{\mu\nu}\,.$$

Il vient:

$$P_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} + \Theta^{\lambda}_{\mu\nu} U_{\lambda} - \Theta^{\lambda}_{\mu\varrho} \Theta^{\varrho}_{\lambda\nu} + \overset{h}{\nabla}_{\varrho} \Theta^{\varrho}_{\mu\nu} - \overset{h}{\nabla}_{\nu} U_{\mu} , \tag{1.10}$$

$$U_{\lambda} = U^{\sigma}_{\lambda\sigma} = \Theta^{\sigma}_{\lambda\sigma} ,$$

$R_{\mu\nu}$ désigne le tenseur de RICCI costruit avec

$$\left\{ \begin{matrix} \nu \\ \lambda\mu \end{matrix} \right\}_h .$$

Par symétrisation de (1.10) on obtient:

$$P_{(\mu\nu)} = R_{\mu\nu} + U^{\lambda}_{\mu\nu} U_{\lambda} - (U^{\lambda}_{\mu\varrho} U^{\varrho}_{\lambda\nu} + S^{\lambda}_{\mu\varrho} S^{\varrho}_{\lambda\nu}) + \overset{h}{\nabla}_{\varrho} U^{\varrho}_{\mu\nu} - \tag{1.11}$$

$$- \frac{1}{2} (\overset{h}{\nabla}_{\nu} U_{\mu} + \overset{h}{\nabla}_{\mu} U_{\nu}).$$

§ 2. - Les équations approchées.

1. - Hypothèse de champ faible et des vitesses faibles.

Le système des équations du champ unitaire étant très difficile à étudier dans le cas général, nous nous bornerons dans ce qui suit aux hypothèses suivantes: Nous admettons que les composantes du tenseur $g_{\alpha\beta}$ sont développables jusqu'à un certain ordre suivant les puissances de $\frac{1}{c}$ (c = vitesse de la lumière).

Les développements des $h_{\alpha\beta}$ s'identifient (à l'ordre 2 ou 3 en $\frac{1}{c}$ suivant les indices) aux développements de MINKOWSKI de la relativité générale.

Les indices i, j, k étant « spatiaux » ainsi que tout indice latin, 0 étant un indice temporel, les dérivées d'indice 0 sont d'un ordre inférieur à celui des dérivées par rapport aux composantes spatiales,

$$\partial_0 = \frac{1}{c} \partial_t$$

(hypothèse des vitesses faibles).

2. - Développements limités des composantes du tenseur fondamental.

Par analogie avec les résultats obtenus en relativité générale par M.me HENNEQUIN [8] nous poserons donc:

$$(1.12)\qquad \begin{cases} h_{00} = 1 - \dfrac{2U_{00}}{c^2} + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right] & (\alpha) \\[2ex] h_{0i} = \dfrac{\alpha_i}{c^3} + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right] & (\beta) \\[2ex] h_{ij} = -\delta_{ij} - 2\delta_{ij}\dfrac{U_{00}}{c^2} + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right] & (\gamma) \end{cases}$$

(δ_{ij} = tenseur de KRÖNECKER).

Il vient alors:

$$(1.13)\qquad h = \text{dét}\,(h_{\alpha\beta}) = -1 - \frac{4U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

$$(1.14)\qquad \begin{cases} h^{00} = 1 + \dfrac{2U_{00}}{c^2} + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right] & (\alpha) \\[2ex] h^{0i} = \dfrac{\alpha_i}{c^3} + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right] & (\beta) \\[2ex] h^{ij} = -\delta^{ij} + 2\delta^{ij}\dfrac{U_{00}}{c^2} + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right]. & (\gamma) \end{cases}$$

Quant aux développements de $k_{\alpha\beta}$, pour des raisons qui seront justifiées *a posteriori*, nous les prendrons comme il suit:

$$(1.15)\qquad \begin{cases} k_{00} = k_{ii} = 0 & (\alpha) \\[2ex] k_{0i} = -k_{i0} = \dfrac{\beta_i}{c^3} + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right] & (\beta) \\[2ex] k_{ij} = \dfrac{\beta_{ij}}{c^2} + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right]. & (\gamma) \end{cases}$$

Nous déterminerons ensuite les développements de $l^{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$, $m^{\alpha\beta}$ et $m_{\alpha\beta}$.

Par des calculs que nous ne reproduirons pas, SCHRÖDINGER montre que:

$$g = h + k + \frac{h}{2} k_{\alpha\beta} h^{\alpha\varrho} h^{\beta\sigma} k_{\varrho\sigma},$$

g, h, k, l désignant respectivement les déterminants de $g_{\alpha\beta}$, $h_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$, $l_{\alpha\beta}$; un calcul à peu près immédiat montre que $k = O\left[\frac{1}{c^{10}}\right]$ (ce déterminant sera supposé non nul) et que:

$$g = h + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

Des calculs faciles montrent alors que:

$$k^{i0} = O\,(c^3), \qquad k^{ij} = O\,(c^2).$$

Des formules suivantes **[18]**

$$l^{\alpha\beta} = \frac{h}{g} h^{\alpha\beta} + \frac{k}{g} k^{\beta\sigma} h_{\varrho\sigma} k^{\alpha\varrho},$$

$$m^{\alpha\beta} = \frac{k}{g} k^{\alpha\beta} + \frac{h}{g} h^{\alpha\varrho} h^{\beta\sigma} k_{\varrho\sigma},$$

$$l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + k_{\alpha\varrho} k_{\beta\sigma} h^{\varrho\sigma}$$

nous allons déduire d'autres résultats:

$$l^{\alpha\beta} = h^{\alpha\beta} + O\left[\frac{1}{c^4}\right], \qquad m^{\alpha\beta} = \frac{h}{g} h^{\alpha\varrho} h^{\beta\sigma} k_{\varrho\sigma} + O\left[\frac{1}{c^7}\right],$$

$$m^{0i} = -k_{0i} + O\left[\frac{1}{c^5}\right], \qquad m^{ij} = k_{ij} + O\left[\frac{1}{c^6}\right], \qquad l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

3. - Développements limités des coefficients de connexion.

Nous utiliserons essentiellement les formules (1.7) et (1.9) établies plus haut.

Comme $L^{\nu}_{(\lambda\mu)}$ fait intervenir les $S^{\nu}_{\lambda\mu}$ et inversement, nous devons évaluer un ordre de grandeur des différents termes de (1.7) et (1.9).

Si $L^{\nu}_{(\lambda\mu)} = O(c^n)$, $n \geqslant -1$, $\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}_h$ est d'ordre $\frac{1}{c^2}$ ou $\frac{1}{c^3}$, comme on le voit d'après les développements des $h_{\alpha\beta}$, il faut que $S^{\nu}_{\lambda\mu}$ contienne un terme dont l'ordre en c est supérieur ou égal à 1, en égard aux développements des $k_{\lambda\beta}$. Mais alors d'après (1.9) comme le premier terme du deuxième membre est d'ordre c^p avec $p \leqslant -2$, il faudrait que dans le 2.ème terme figurât un $L^\alpha_{(\beta\gamma)}$, d'ordre 3 au moins en c; en revenant à (1.7) on verrait qu'il existe un $S^\nu_{\lambda\mu}$ d'ordre 5 en c, etc.; on arriverait ainsi à trouver des $L^\lambda_{(\beta\gamma)}$ dont l'ordre dépasse relativement à c tout entier positif n, ce qui est absurde physiquement.

Donc les $L^\lambda_{(\beta\gamma)}$ sont par rapport à $\frac{1}{c}$ d'ordre supérieur à 1.

D'après (1.9) on voit que les $S^\lambda_{\beta\gamma}$ sont d'ordre supérieur ou égal à 2.

En première approximation les $L^\alpha_{(\beta\gamma)}$ sont donc égaux aux symboles de CHRISTOFFEL de $h_{\alpha\beta}$, le deuxième terme de (1.7) étant d'ordre 4 au moins en $\frac{1}{c}$.

Des calculs assez longs nous conduisent alors aux résultats suivants:

$$(1.12)\qquad \begin{cases} L^0_{(0i)} = \dfrac{-\partial_i U_{00}}{c^2} + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right] \\[2ex] L^i_{00} = \dfrac{-\partial_i U_{00}}{c^2} + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right] \\[2ex] L^i_{(jk)} = \dfrac{1}{c^2}\left(-\delta_{jk}\,\partial_i U_{00} + \delta^i_j\,\partial_k U_{00} + \delta^i_k\,\partial_j U_{00}\right) + O\left[\dfrac{1}{c^4}\right], \end{cases}$$

$$(1.12')\qquad \begin{cases} L^0_{00} = \dfrac{-\partial_t U_{00}}{c^3} + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right] \\[2ex] L^0_{(ij)} = \dfrac{1}{c^3}\left[\delta_{ij}\,\partial_t U_{00} + \dfrac{\partial_i \alpha_j + \partial_j \alpha_i}{2}\right] + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right] \\[2ex] L^i_{(0k)} = \dfrac{1}{c^3}\left[\delta^i_k\,\partial_t U_{00} - \dfrac{\partial_k \alpha_i - \partial_i \alpha_k}{2}\right] + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right], \end{cases}$$

$$(1.13)\qquad S^i_{jk} = \frac{\partial_j \beta_{ki} + \partial_k \beta_{ij} - \partial_i \beta_{jk}}{2\,c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

$$(1.13')\qquad \begin{cases} S_{0i} = \dfrac{\partial_t \beta_i - (\partial_k U_{00})\,\beta_{ki}}{c^4} + O\left[\dfrac{1}{c^6}\right] \qquad \text{(avec sommation en } k) \\[2ex] S^0_{ij} = \dfrac{\partial_i \beta_j - \partial_j \beta_i + \partial_t \beta_{ij}}{2\,c^3} + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right] \\[2ex] S^i_{0j} = \dfrac{-\partial_i \beta_j - \partial_j \beta_i + \partial_t \beta_{ji}}{2\,c^3} + O\left[\dfrac{1}{c^5}\right]. \end{cases}$$

4. - Les trois dernières équations du champ en première approximation.

a) $$\boxed{P_{(\alpha\beta)} = 0},$$

$$P_{\alpha\beta} = \partial_\varrho L^\varrho_{\alpha\beta} - \partial_\beta L^\sigma_{\alpha\sigma} + L^\varrho_{\alpha\beta} L^\sigma_{\varrho\sigma} - L^\sigma_{\alpha\varrho} L^\varrho_{\sigma\beta} = \partial_\varrho L^\varrho_{\alpha\beta} - \partial_\beta L^\sigma_{\alpha\sigma} + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

Tenant compte de la nullité du vecteur de torsion $L^\sigma_{\alpha\sigma} = L^\sigma_{\sigma\alpha}$ et de la relation (cf. [12])

$$\partial_\beta L^\sigma_{\alpha\sigma} = \partial_\alpha L^\sigma_{\beta\sigma},$$

il vient ainsi:

$$P_{(\alpha\beta)} = \partial_\varrho L^\varrho_{(\alpha\beta)} - \partial_\beta L^\sigma_{(\alpha\sigma)} + O\left[\frac{1}{c^4}\right]. \tag{1.14}$$

Quatre cas se présentent suivant la valeur des indices α, β.

1. er cas: $$P_{00} = 0,$$

$$P_{00} = \partial_\varrho L^\varrho_{00} - \frac{\partial_t}{c} L_{(0\sigma)} + O\left[\frac{1}{c^4}\right] = \partial_i L^i_{00} + O\left[\frac{1}{c^4}\right] = -\frac{\Delta U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

Δ désignant le laplacien ordinaire dans un espace euclidien auxiliaire $\mathcal{E}_3$. En annulant le coefficient de $\frac{1}{c^2}$ on obtient donc la condition:

$$\Delta U_{00} = 0. \tag{1.15}$$

2. ème cas: $$P_{(ij)} = 0 \qquad (i \neq j),$$

$$P_{(ij)} = \partial_\varrho L^\varrho_{(ij)} - \partial_i L^\sigma_{(j\sigma)} + O\left[\frac{1}{c^4}\right] = \partial_k L^k_{(ij)} - \partial_i L^0_{(j0)} - \partial_i L^k_{(jk)} + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

Tenant compte des formules (1.12) on trouve:

$$P_{(ij)} = O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

3. ème cas: $\qquad P_{(ii)} = 0\,,$

$$P_{(ii)} = \partial_\varrho L^\varrho_{ii} - \partial_i L^\sigma_{(i\sigma)} + O\left[\frac{1}{c^4}\right] = \partial_k L^k_{ii} - \partial_i L^0_{(i0)} + O\left[\frac{1}{c^4}\right] = \frac{-\Delta U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

on retrouve ainsi (1.15).

4. ème cas:

$$P_{(0i)} = 0\,.$$

Tous les termes sont au moins d'ordre 3 en $\frac{1}{c}$:

$$P_{(0i)} = \frac{\partial_t}{c} L^0_{(0i)} + \partial_j L^j_{(0i)} - \partial_i L^0_{00} - \partial_i L^i_{(0j)} + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

Désignons par $\vec{\alpha}$ le vecteur de composantes $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ dans l'espace euclidien ordinaire $\mathcal{E}_3$. En annulant les termes en $\frac{1}{c^3}$ nous obtenons l'équation:

$$4\,\partial_{it} U_{00} + \partial_i(\partial_l \alpha_l + \partial_m \alpha_m + \partial_n \alpha_n) - \Delta\alpha_i = 0 \qquad (i = 1,\ 2,\ 3),$$

soit:

$$\boxed{4\partial_t\,(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\ U_{00}) = -\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{\alpha}} \,, \tag{1.16}$$

puisque

$$\overrightarrow{\Delta\alpha} = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(\mathrm{Div}\,\vec{\alpha}) - \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\ \vec{\alpha}\,.$$

(Nous indiquerons par des majuscules les opérateurs relatifs à l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$.)

Ainsi l'équation $P_{(\alpha\beta)} = 0$ nous conduit à poser:

$$\boxed{U_{00} = \frac{Gm}{r}}\,; \tag{1.17}$$

où:

1) r désigne a distance ordinaire du centre d'une particule de coordonnées (ξ^i) au point où on calcule le champ de coordonnées (x^i),

$r^2 = \sum_i (x^i - \xi^i)^2$ (qui est fonction de t par l'intermédiaire des (ξ^i);

2) m désigne la masse de la particule (que nous supposerons constante en première approximation $\left[\text{au Chapitre II nous verrons que } \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = O\left[\frac{1}{c^2}\right]\right]$;

3) G est la constante de gravitation.

L'équation (1.17) est alors satisfaite si l'on pose:

$$\alpha_i = 4\, U_{00} \frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} \tag{1.18}$$

où $\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}$ s'interprète comme la vitesse ordinaire de la particule: le deuxième membre de (1.16) s'écrit, en effet,

$$-\overrightarrow{\text{Grad}}\ \text{Div}\ \vec{\alpha}, \qquad \text{car} \qquad \Delta\vec{\alpha} = 0$$

et la première composante est simplement:

$$-4\partial_{ik}\, U_{00} \frac{\mathrm{d}\xi^k}{\mathrm{d}t} = 4\partial_{it}\, U_{00}\,.$$

C'est d'ailleurs la solution de Schwarschild de la relativité générale, déjà utilisée par beaucoup d'auteurs.

b) $$\boxed{S_\alpha = L^\varrho_{[\alpha\varrho]} = 0} \qquad \text{(cfr. (1.4)).}$$

Deux cas se présentent selon la valeur de l'indice α.

1. er cas: $S_{i\sigma}^{\sigma} = 0,$

$$S_{i\sigma}^{\sigma} = S_{i0}^{0} + S_{ik}^{k} = S_{ik}^{k} + O\left[\frac{1}{c^4}\right] = \frac{1}{c^2}\sum_k \partial_k \beta_{ki} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

ce qui conduit à

$$\sum_k \partial_k \beta_{ki} = 0 . \tag{1.19}$$

Dans l'espace euclidien $\mathcal{E}_3$ nous poserons:

$$\beta_{12} = \beta_3', \qquad \beta_{23} = \beta_1', \qquad \beta_{31} = \beta_2'; \qquad \vec{\beta}' = (\beta_1', \beta_2', \beta_3').$$

(1.19), qui s'écrit en détail

$$\partial_2 \beta_{21} = \partial_3 \beta_{13}, \quad \partial_3 \beta_{32} = \partial_1 \beta_{21}, \quad \partial_1 \beta_{13} = \partial_2 \beta_{32}$$

entraîne localement

$$\boxed{\vec{\beta}' = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \varphi}. \tag{1.20}$$

2. ème cas: $S_{0\sigma}^{\sigma} = S_{0i}^{i} = 0.$

Cela nous donne:

$$\sum_i \frac{\partial_i \beta_i}{c^3} = O\left[\frac{1}{c^5}\right] . \tag{1.21}$$

Nous prendrons localement:

$$\boxed{\vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{\psi}}, \qquad \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3). \tag{1.22}$$

c) $$\boxed{\partial_\alpha P_{[\beta\gamma]} + \partial_\beta P_{[\gamma\alpha]} + \partial_\gamma P_{[\alpha\beta]} = 0} \qquad \text{(cfr. (1.6))},$$

ce que nous écrirons $\sum_{pc} \partial_\alpha P_{[\beta\gamma]} = 0$ ($\sum_{pc}$: somme en permutation circulaire).

Il conviendra ici de distinguer deux cas.

1. er cas:
$$\sum_{pc} \partial_i P_{[jk]} = 0,$$

$$P_{[ij]} = \partial_k S^k_{ij} + O\left[\frac{1}{c^4}\right]$$

avec

$$S^k_{ij} = \frac{1}{2c^2}(\partial_i \beta_{jk} + \partial_j \beta_{ki} - \partial_k \beta_{ij}) + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

Tenant compte de la relation (1.19) il vient

$$P_{[ij]} = -\frac{\Delta\beta_{ij}}{2c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

ce qui nous conduit à écrire:

(1.23) $$\mathrm{Div}\, \Delta\vec{\beta'} = 0.$$

Puis, de (1.20) et de la formule classique

$$\Delta\vec{\beta'} = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \mathrm{Div}\, \vec{\beta'} - \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{\beta'},$$

il vient:

(1.24) $$\boxed{\Delta\,(\Delta\varphi) = 0}.$$

Résultat déjà obtenu par Clauser [5] et Treder [26].

2.ème cas:
$$\sum_{pc} \partial_0 P_{[ij]} = 0,$$

$$P_{[0j]} = \partial_0 S^0_{0j} + \partial_i S^i_{0j} + O\left[\frac{1}{c^5}\right] = \partial_i S^i_{0j} + O\left[\frac{1}{c^5}\right].$$

Tenant compte de (1.13′) il vient:

$$P_{[0j]} = -\frac{1}{2c^3}\left[\Delta\beta_j + \sum_i (\partial_{ij}\beta_i - \partial_{ii}\beta_{ij})\right] + O\left[\frac{1}{c^5}\right].$$

Puis si on tient compte de (1.19) et (1.21) on trouve finalement:

$$P_{[0j]} = -\frac{1}{2c^3}\Delta\beta_j + O\left[\frac{1}{c^5}\right] ;$$

la relation $\sum_{pc} \partial_0 P_{[ij]} = 0$ conduit donc à

$$\frac{\partial_i \Delta\beta_j - \partial_j \Delta\beta_i}{c^3} - \frac{1}{c^3}\partial_t \Delta\beta_{ij} = 0 . \tag{1.25}$$

On peut écrire (1.25) sous une forme plus suggestive en posant:

$$\frac{1}{c^3}\overrightarrow{\Delta\beta} = \vec{W}, \qquad \frac{1}{c^2}\overrightarrow{\Delta\beta'} = \vec{V}$$

on obtient ainsi

$$\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{W} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{V}}{\partial t} = 0 . \tag{1.25'}$$

5. - Conséquences des équations (1.4) **et** (1.6).

Cherchons pour (1.24) et (1.25) des solutions simples. $\Delta(\Delta\varphi) = 0$ nous conduit à poser:

$$\varphi = \frac{A}{r} + B r^2 + C r, \qquad \text{où} \quad r^2 = \sum_i (x^i - \xi^i)^2. \tag{1.26}$$

φ est la fonction biharmonique la plus générale dans $\mathcal{E}_3$, qui ne dépend que de r (à une constante additive près qui disparaîtrait dans les calculs ci-dessous).

Nous chercherons ensuite pour (1.25) une solution de la forme:

$$\vec{\beta} = \lambda\,\overrightarrow{\text{Grad}}\,\varphi \wedge \vec{v} \qquad (\lambda \text{ est une constante}),$$

$$\vec{v}\left[\frac{d\xi^1}{dt}, \frac{d\xi^2}{dt}, \frac{d\xi^3}{dt}\right] \quad \text{dans } \mathcal{E}_3 ,$$

$$\beta_1 = \lambda\left[\partial_2\varphi\,\frac{d\xi^3}{dt} - \partial_3\varphi\,\frac{d\xi^2}{dt}\right],$$

$$(\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{\beta})^3 = \lambda\left[\partial_{13}\varphi\,\frac{d\xi^1}{dt} + \partial_{23}\varphi\,\frac{d\xi^2}{dt} + \partial_{33}\varphi\,\frac{d\xi^3}{dt} - \frac{d\xi^3}{dt}\,\Delta\varphi\right],$$

$$\Delta\,(\overrightarrow{\text{Rot}}\,\vec{\beta})^3 = \lambda\,(\partial_{3i}\,\Delta\varphi)\,\frac{d\xi^i}{dt},$$

$$\Delta\,(\partial_t\,\beta_3') = \partial_{t3}\,\Delta\varphi\,,$$

$$\partial_t\,\Delta\varphi = \sum_i \frac{2c}{r^3}\,(x^i - \xi^i)\,\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = -\,(\partial_i\,\Delta\varphi)\,\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}\,.$$

Si l'on tient compte de ces derniers résultats dans (1.25) on obtient:

$$\lambda\,(\partial_{3i}\,\Delta\varphi)\,\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t} = -\,(\partial_{3i}\,\Delta\varphi)\,\frac{\mathrm{d}\xi^i}{\mathrm{d}t}\,,$$

car $\Delta(\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\vec{\beta}) = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,(\Delta\,\vec{\beta})$, puisque $\mathrm{Div}\,\vec{\beta} = 0$, ce qui fait que $\lambda = -\,1$. Donc on pourra prendre pour (1.25) la solution particulière

$$\vec{\beta} = -\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\varphi \wedge \vec{v}\,. \tag{1.27}$$

§ 3. - Une interpretation possible des résultats précédents.

1. - Le champ électromagnétique et le premier groupe des équations de Maxwell dans le vide.

Nous nous proposons de lier le vecteur $\vec{W}$ au champ magnétique et le vecteur $\vec{V}$ au champ électrique.

Nous poserons donc: $\vec{H}$ désignant le champ magnétique et K une constante:

$$\underset{(1)}{\vec{H}} = K\,c^2\,\vec{W} = \frac{K}{c}\,\Delta\,\vec{\beta} \tag{1.28}$$

(l'indice inférieur (n) rappelle qu'il s'agit d'un élément d'ordre (n) en $1/c$).

De la formule

$$\mathrm{Div}\,(\Delta\,\vec{\beta}) = \mathrm{Div}\cdot[\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(\mathrm{Div}\,\vec{\beta}) - \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{\beta}]$$

et de

$$\mathrm{Div}\,\vec{\beta} = 0$$

nous déduisons

$$\mathrm{Div}\,(\Delta\,\vec{\beta}) = 0$$

et

(1.29) $$\mathrm{Div}\, \underset{(1)}{\vec{H}} = 0.$$

Donc localement

$$\underset{(1)}{\vec{H}} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{A} \qquad \text{avec} \qquad \vec{A} = -\frac{K}{c}\, \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{\beta}.$$

Posons de même:

$\underset{(0)}{\vec{E}} = Kc^2\, \vec{V} = K\, \Delta\beta'$, $\underset{(0)}{\vec{E}}$ étant le terme principal du champ électrique $\vec{E}$.

Comme nous avons trouvé $\mathrm{Div}\, (\overrightarrow{\Delta\, \beta'}) = 0$, nous aurons

(1.30) $$\mathrm{Div}\, \underset{(0)}{\vec{E}} = 0.$$

Nous avons donc obtenu, d'après (1.25) et (1.30),

(1.31) $$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \underset{(1)}{\vec{H}} - \frac{1}{c}\, \frac{\partial \underset{(0)}{\vec{E}}}{\partial t} = 0,$$

(1.32) $$\mathrm{Div}\, \underset{(0)}{\vec{E}} = 0.$$

On reconnait le premier groupe des équations de MAXWELL dans le vide. Notons que (1.31) et (1.32) résultent directement de

$$\sum_{pc} \partial_\alpha\, P_{[\beta\gamma]} = 0 \qquad \text{et} \qquad S_\alpha = 0.$$

Enfin tenons compte des résultats de la fin du § 2, n. 4:

$$\underset{(1)}{\vec{H}} = \frac{K}{c} \Delta\vec{\beta},$$

$$\underset{(1)}{H_1} = -\frac{K}{c}\left[\partial_2\, \Delta\varphi\, \frac{\mathrm{d}\xi^3}{\mathrm{d}t} - \partial_3\, \Delta\varphi\, \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}t}\right] =$$

$$= -\frac{2KC}{c}\left[\partial_2 \left[\frac{1}{r}\right] \frac{\mathrm{d}\xi^3}{\mathrm{d}t} - \partial_3 \left[\frac{1}{r}\right] \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}t}\right] = -\frac{2KC}{c}\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \frac{1}{r} \wedge \vec{v}\,.$$

De même:

$$\underset{(0)}{\vec{E}} = K\, \Delta \vec{\beta}' = K\, \overrightarrow{\text{Grad}}\, (\Delta\varphi) = 2KC\, \overrightarrow{\text{Grad}}\, \frac{1}{r}$$

En posant $2KC = -e$, e désignant la charge de la particule, nous retrouvons

(1.33) $$\underset{(1)}{\vec{H}} = \frac{e}{c}\, \overrightarrow{\text{Grad}}\, \frac{1}{r} \wedge \vec{v},$$

(1.34) $$\underset{(0)}{\vec{E}} = -e\, \overrightarrow{\text{Grad}}\, \frac{1}{r},$$

où les unités sont pour les grandeurs électriques e, $\vec{E}$ celles du système e. s. c.g.s. et pour $\vec{H}$ celles du système e.m. c.g.s. (système mixte).

§ 4. - Le deuxieme groupe des équations de Maxwell et une extension des résultats précédents.

Rappelons les résultats que nous venons de trouver:

$$\sum_k \partial_k \beta_{ki} = 0 \qquad \text{traduit par} \qquad \overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{\beta}' = 0,$$

où

(1.20) $$\vec{\beta}' = \overrightarrow{\text{Grad}}\, \varphi$$

avec $\vec{\beta}' = (\beta_{23},\ \beta_{31},\ \beta_{12})$;

(1.22) $$\sum_k \partial_k \beta_k = 0 \qquad \text{traduit par} \qquad \vec{\beta} = \overrightarrow{\text{Rot}}\, \psi,$$

ou $$\text{Div}\, \vec{\beta} = 0$$

avec $\vec{\beta} = (\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3)$;

$$P_{[ij]} = -\frac{\Delta\beta_{ij}}{2c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right], \qquad P_{[0j]} = -\frac{\Delta\beta_j}{2c^3} + O\left[\frac{1}{c^5}\right];$$

(1.23) $$\text{Div}\, \vec{\beta}' = 0,$$

ou

(1.24) $$\Delta\, (\Delta\varphi) = 0;$$

(1.25′) $$\overrightarrow{\text{Rot}}\, (\Delta\, \vec{\beta}) - \frac{\partial}{\partial t}\, \Delta\, \vec{\beta}' = 0\,.$$

Cela nous a conduit, en posant

$$\underset{(1)}{\vec{H}} = \frac{K}{c}\, \Delta\vec{\beta}, \qquad \underset{(0)}{\vec{E}} = K\, \Delta\vec{\beta'}, \quad (K \text{ constante}),$$

au premier système de MAXWELL-LORENTZ dans le vide:

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \underset{(1)}{\vec{H}} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t} \underset{(0)}{\vec{E}} = 0, \qquad \mathrm{Div}\, \underset{(0)}{\vec{E}} = 0,$$

avec

$$\underset{(1)}{\vec{H}} = -2K\frac{C}{c}\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}} \left[\frac{1}{r}\right] \wedge \vec{v}, \qquad \underset{(0)}{\vec{E}} = 2KC\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}} \left[\frac{1}{r}\right].$$

En première approximation et à un coefficient de proportionnalité près la partie antisymétrique du tenseur de Ricci $P_{[\alpha\beta]}$ *donne les composantes d'espace du champ électromagnétique.*

$F^{\alpha\beta}$, $F_{\alpha\beta}$ désignant les composantes du tenseur champ électromagnétique, nous postulons donc:

$$F = 2Kc^2\, {}^*P.$$

F, P désignant respectivement les formes linéaires antisymétriques de composantes $F_{\alpha\beta}$ et $P_{[\alpha\beta]}$, ${}^*P$ étant la forme adjointe à P dans l'espace à 4 dimensions, orientable, muni d'une métrique qui en première approximation (termes d'ordre 2 et 3 en $1/c$) ne diffère pas de $h_{\alpha\beta}$ ou $l_{\alpha\beta}$, indifféremment.

Notons qu'en raison de la dimension 4:

$${}^*F = 2Kc^2\, {}^{**}P = -2Kc^2\, P.$$

Posons:

$$\eta_{\alpha\beta\gamma\delta} = \sqrt{|a|}\, \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}, \qquad \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} = -\frac{1}{\sqrt{|a|}}\, \varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta},$$

$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ étant l'indicateur de KRÖNECKER.

Nous savons que

$$\sqrt{|a|} = 1 + 2\,\frac{U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

En première approximation nous pouvons donc écrire:

$$\underset{(1)}{H_i} = *F_{0i} = F^{jk} = 2Kc^2 *P^{[jk]} = 2Kc^2 P_{[i0]},$$

$$\underset{(0)}{E_i} = *F_{jk} = F^{0i} = 2Kc^2 *P^{[0i]} = 2Kc^2 P_{[kj]}$$

(i, j, k, étant une permutation paire de 1,2,3), et le premier système des équations de MAXWELL dans le vide:

$$\mathrm{d}^* F = 0,$$

se ramenant à

$$\sum_{pc} \partial_\alpha P_{[\beta\gamma]} = 0,$$

prend alors la forme que nous avons trouvée plus haut en (1.31) et (1.32) (en première approximation).

Le deuxième groupe des équations de MAXWELL-LORENTZ dans le vide, qui s'écrit en notations d'espace ordinaire:

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\, \vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = 0, \tag{1.35}$$

$$\mathrm{Div}\, \vec{H} = 0, \tag{1.36}$$

fait intervenir dans (1.35) les termes du 4-me ordre en $1/c$ du développement de $P_{[\alpha\beta]}$ et en (1.36) les termes du 3-me ordre. Il s'écrit, dans l'espace à 4 dimensions, $\mathrm{d}F = 0$, ou $\mathrm{d}\, *P = 0$, dans notre interprétation, soit encore:

$$*^{-1}\, \mathrm{d}\, *P = 0$$

ou

$$\delta P = 0,$$

δP désignant la codifférentielle de P (voir à ce sujet [**13**], page 177 et suivantes).

Notre interprétation exigerait donc que la forme P soit harmonique, au moins à l'ordre 4 pour les équations associées à (1.35) *et à l'ordre 3 pour celle qui est associée à* (1.36).

Nous allons vérifier qu'il en est bien ainsi:

1.*er Cas*: Equation (1.36).

$\delta P = 0$ donne, par passage aux composantes [**13**],

$$\overset{a}{\nabla}_\lambda P^\alpha_\lambda = 0, \qquad \text{où} \qquad P^\alpha_\lambda = P_{[\mu\lambda]}\, a^{\mu\alpha}$$

si $\lambda = 0$, cette équation donne:

$$\overset{a}{\nabla}_\lambda P^\alpha_0 = 0\,, \qquad\qquad P^\alpha_0 = P_{[i0]}\, a^{i\alpha},$$

soit:

$$\sum_i \overset{a}{\nabla}_i P_{[i0]} \left[-1 + \frac{2\,U_{00}}{c^2}\right] = 0, \qquad \operatorname{mod} O\left[\frac{1}{c^7}\right],$$

$$\sum_i \partial_i P_{[i0]} = 0, \qquad \operatorname{mod} O\left[\frac{1}{c^5}\right],$$

c'est l'équation déjà obtenue $\operatorname{Div} \underset{(1)}{\vec{H}} = 0$ [voir (1.29)].

2.*ème Cas*: Soit $\lambda = i \quad (i = 1, 2, 3)$.

Nous obtenons trois équations scalaires

$$\overset{a}{\nabla}_\alpha P^\alpha_i = 0,$$

$$\overset{a}{\nabla}_\alpha P^\alpha_i = \overset{a}{\nabla}_0 P_{[0i]} + \sum_k \overset{a}{\nabla}_k P_{[ki]} \left[-1 + \frac{2\,U_{00}}{c^2}\right] = 0, \qquad \operatorname{mod} O\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

Ce qui se ramène à:

$$(1.37) \qquad \partial_0 P_{[0i]} - \partial_k P_{[ki]} + \left\{ {l \atop kk} \right\}_a P_{[li]} + \left\{ {l \atop ik} \right\}_a P_{[kl]} + 2\,\frac{\partial_k U_{00}}{c^2} P_{[ki]} = 0,$$

avec sommation en k et mod $O\left[\frac{1}{c^5}\right]$. Dans cette équation le seul terme qui donne lieu à de nouveaux calculs d'approximation est le deuxième, les autres s'expriment immédiatement à l'aide des coefficients déjà calculés. Nous devons calculer $P_{[ki]}$ à l'ordre 4. Calculons par exemple

$$P_{[12]} = \partial_\varrho L^\varrho_{12} - \partial_2 L^\sigma_{1\sigma} + L^\sigma_{\lambda\sigma} L^\lambda_{12} - L^\sigma_{1\varrho} L^\varrho_{\sigma 2}\,.$$

On obtient, après des calculs assez longs,

$$(1.38)\quad P_{[12]} = -\frac{\Delta\beta_3'}{2c^2} + \frac{U_{00}}{c^4}\Delta\beta_3' + \frac{1}{2c^4}\partial_{t^2}\beta_3' - \frac{1}{2c^4}\Delta k_3' + \frac{2}{c^4}(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\beta_3')$$

avec

$$k_3' = -\partial_t\,\psi_3 \qquad (\vec{\beta} = \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{\psi}),$$

où nous avons tenu compte de l'équation $S^{\sigma}_{1\sigma} = 0$ à l'ordre 4 et posé

$$\vec{k}' = (\underset{(4)}{k_{23}},\ \underset{(4)}{k_{31}},\ \underset{(4)}{k_{12}}).$$

Il nous reste donc à vérifier qu'à l'ordre 4 (1.37) est vérifiée. Nous ferons $i = 1$, et négligerons les termes d'ordre supérieur à 4. Alors (1.37) s'écrit :

$$\frac{5}{c^4}(\partial_2\, U_{00}\,\Delta\beta_3' - \partial_3\, U_{00}\,\Delta\beta_2') + \frac{2}{c^4}\partial_2(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\beta_3') - \frac{2}{c^4}\partial_3(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\beta_2'),$$

et nous allons vérifier que cette expression est nulle.

Le premier terme est nul. En effet:

$$\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\wedge\Delta\vec{\beta}' = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\wedge\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(\Delta\varphi),$$

$$\vec{\beta}' = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\varphi,$$

$$\overrightarrow{\Delta\beta'} = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\mathrm{Div}\,\vec{\beta}' - \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{\beta}' = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(\Delta\varphi),$$

$$\Delta\varphi = \frac{2C}{r} + 6B$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}$ et $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(\Delta\varphi)$ sont colinéaires, ce qui assure la validité de notre affirmation.

Enfin la somme des deux derniers termes est nulle:

$$\partial_2(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\beta_3') = \partial_2(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\cdot\partial_3\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\varphi) =$$

$$= \partial_2\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\cdot\partial_3\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\varphi + \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, U_{00}\cdot\partial_{23}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\varphi\,.$$

Il suffit de montrer que $\partial_2 \overrightarrow{\text{Grad}}\, U_{00} \cdot \partial_3 \overrightarrow{\text{Grad}}\, \varphi$ est invariant quand on permute les indices 2 et 3. Cela s'écrit:

$$\partial_2 \overrightarrow{\text{Grad}} \left[\frac{1}{r}\right] \cdot \partial_3 \overrightarrow{\text{Grad}} \left[\frac{A}{r} + Cr\right] \ (^1)$$

et s'exprime comme une somme de deux nouveaux termes dont le premier possède la propriété d'invariance et dont le deuxième est égal à

$$C\partial_2 \overrightarrow{\text{Grad}}\, \frac{1}{r} \cdot \partial_3 \overrightarrow{\text{Grad}}\, r = - \frac{C\partial_2}{r^2} \overrightarrow{\text{Grad}}\, \frac{1}{r} \cdot \partial_3 \overrightarrow{\text{Grad}}\, \frac{1}{r} - \frac{C}{2} \partial_3 \frac{1}{r^2} \cdot \partial_2 \left[\overrightarrow{\text{Grad}}\, \frac{1}{r}\right]^2,$$

la propriété se ramène à l'invariance dans la permutation des indices 2 et 3 de $\partial_2 \frac{1}{r^4} \cdot \partial_3 \frac{1}{r^2}$, ce qui est évident.

Remarque au sujet du précédent calcul.

Nous aurions pu diriger d'une autre manière nos calculs pour établir que $\overset{a}{\nabla}_\alpha P^\alpha_\lambda = 0$. Nous reportant à un travail de M.me TONNELAT [25], on peut établir que (1.4) s'ècrit:

$$\overset{h}{\nabla}_\varrho \sqrt{h/g} \left[\frac{k}{g} k^{\mu\varrho} + h^{\mu\sigma} h^{\varrho\nu} k_\sigma\right] = 0 \tag{1.39}$$

et commencer les calculs en supposant seulement que $k_{\mu\nu}$ est d'ordre au moins égal à 2 en $\frac{1}{c}$, et $h_{\mu\nu}$ d'ordre supérieur ou égal à 0.

---

(1) Nous prenos $B = 0$ selon ce que nous admettons plus loin, mais cela est valable pour $B \neq 0$.

On déduit alors de (1.7), (1.8) et (1.9) que $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$ est d'ordre 2, $U^{\varkappa}_{\beta\gamma}$ d'ordre 4 et de (1.10) que:

$$P_{[\mu\nu]} = \overset{h}{\nabla}_{\varrho} S^{\varrho}_{\mu\nu} + O\left[\frac{1}{c^6}\right] \qquad \text{(voir [24], page 52)},$$

$$P_{[\mu\nu]} = R_{\mu\nu} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

de la relation (voir [24])

$$\frac{g}{h} = 1 + \frac{k}{h} + \frac{1}{2} h^{\mu\varrho} h^{\nu\sigma} k_{\mu\nu} k_{\varrho\sigma}$$

on déduit que (1.39) s'ècrit

$$\overset{h}{\nabla}_{\varrho} k_{\mu\varrho} = 0 \qquad \text{(avec sommation en } \varrho)$$

ou

$$\overset{h}{\nabla}{}^{\varrho} k_{\mu\varrho} = 0 \qquad (\nabla^{\varrho} = \nabla_{\sigma} h^{\sigma\varrho}),$$

en négligeant des termes d'ordre supérieur à 4 en $1/c$.

Dès lors considérons:

$$\nabla_{\alpha} \overset{h}{P}{}^{\varkappa}_{\lambda} = 0 \qquad \text{qui s'écrit} \qquad \overset{h}{\nabla}{}^{\mu}\left[\frac{\overset{h}{\nabla}{}^{\sigma}}{2} k_{\mu\lambda\sigma} - \Box k_{\mu\lambda}\right] = 0,$$

toujours à la même approximation, en posant:

$$k_{\mu\lambda\sigma} = \sum_{pc} \partial_{\mu} k_{\lambda\sigma}, \qquad \Box = \overset{h}{\nabla}{}^{\varrho} \overset{h}{\nabla}_{\varrho}.$$

Après quelques transformations qui tiennent compte des identités de Ricci et de Bianchi et de $P_{[\mu\nu]} = 0$ on trouve que la condition $\overset{h}{\nabla_{\alpha}} P^{\varkappa}_{\lambda} = 0$ équivaut, en négligeant des termes d'ordre supérieur à 4 en $1/c$, à

$$R_{\mu\lambda}{}^{\varrho\nu} \overset{h}{\nabla}{}^{\mu} k_{\varrho\nu} = 0 \qquad \text{([25], page 9)}.$$

En faisant $\lambda = 1$ et en introduisant ici les développements de $h_{\alpha\beta}$ et de $k_{\alpha\beta}$, il reste à vérifier, toujours à la meme approximation, que

$$\frac{1}{c^2}(\partial_i L^1_{(rj)} - \partial_j L^1_{(ri)}) \cdot \partial_r \beta_{ij} = 0 \qquad \text{(avec sommation en } i,\ j,\ r)$$

soit :

$$\frac{1}{c^2} \partial_i L^1_{(rj)} \partial_r \beta_{ij} = 0 ,$$

$$\frac{1}{c^4}(-\delta_{rj} \partial_{1i} U_{00} + \delta_{1j} \partial_{ri} U_{00} + \delta_{1r} \partial_{ij} U_{00}) \partial_r \beta_{ij} = 0,$$

$$\frac{1}{c^4}(\partial_r \beta_{ir} \cdot \partial_{1i} U_{00} - \partial_{ri} U_{00} \cdot \partial_r \beta_{i1}) = 0 ,$$

$$\frac{1}{c^4} \partial_{ri} U_{00} \cdot \partial_r \beta_{i1} = 0,$$

$$\frac{1}{c^4} \partial_3 \overrightarrow{\text{Grad}}\, U_{00} \cdot \partial_2 \overrightarrow{\text{Grad}}\, \varphi - \frac{1}{c^4} \partial_2 \overrightarrow{\text{Grad}}\, U_{00} \cdot \partial_3 \overrightarrow{\text{Grad}}\, \varphi = 0 .$$

or cela est précisément le résultat trouvé plus haut.

Notons donc que la vérification de nos équations dépend des développements posés pour les potentiels $g_{\alpha\beta}$, ce qui n'a rien de surprenant, et aussi de la forme des solutions choisies pour U_{00} et φ (on peut d'ailleurs montrer que la dernière égalité est encore vraie si on suppose que U_{00} et φ sont des fonctions quelconques de r).

Conclusion.

Si nous posons:

$$E_1 = 2\, K\, c^2\, {}^*P^{[0i]} = \frac{-K c^2}{\sqrt{|a|}} \varepsilon^{0 i \gamma\delta} P_{[\gamma\delta]} ,$$

$$H_1 = 2\, K\, c^2\, {}^*P^{[23]} = \frac{-K c^2}{\sqrt{|a|}} \varepsilon^{23\gamma\delta} P_{[\gamma\delta]} ,$$

il vient, en négligeant les termes d'ordre supérieur à 2,

$$H_1 = \frac{K}{c} \Delta\beta_1 ,$$

$$E_1 = -2\, K c^2 \left[1 - \frac{2\, U_{00}}{c^2}\right] P_{[23]} = 2K \left[\frac{\Delta\beta'_1}{2} - \frac{1}{2c^2} \partial_{t_2} \beta'_1 + \frac{1}{2c^2} \Delta k'_1 - \frac{2}{c^2} (\overrightarrow{\text{Grad}}\, A)_1 ,\right.$$

où nous avons posé

$$U_{00}\,\Delta\beta_i' + (\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,U_{00}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\beta_i') = (\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\Lambda)_i\,,$$

ce qui est légitime d'après les calculs que nous avons faits.

Dès lors, si nous calculons $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{E}$ nous aurons:

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = \frac{K}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\Delta\vec{k}'\,,$$

$$\Delta\vec{k}' = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\mathrm{Div}\,\vec{k}' - \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{k}' \quad \text{où} \quad \overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{k}' = -\,\partial_t\vec{\beta}\,,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} = \frac{K}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,(\partial_t\vec{\beta}), \qquad \frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = -\frac{K}{c}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,(\partial_t\vec{\beta}),$$

d'où résulte:

$$\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{E} + \frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = 0.$$

Ce qui est précisément le résultat que nous nous proposions d'établir.

Nous avons déjà obtenu $\mathrm{Div}\,\vec{H} = 0$.

Dans ces deux formules on néglige les termes d'ordre supérieur à 2 en $1/c$, c'est-à-dire que l'on tient compte des termes de $P_{[\alpha\beta]}$ à l'ordre 3 ou 4 selon les indices.

A cette approximation nous avons donc justifié l'hypothèse $F_{\alpha\beta} = 2Kc^2\,{}^*P_{[\alpha\beta]}$, sans aucune supposition sur la forme des termes d'ordre supérieur ou égal à 4 du tenseur métrique

$$a_{\alpha\beta} = l_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}\,, \qquad \mathrm{mod}\; O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

On pourrait se poser le problème suivant: quelles sont les métriques qui assurent la propriété d'harmonicité de la forme P, c'est-à-dire telles que $\delta P = 0$ ($dP = 0$ étant réalisée d'après les équations mêmes du champ)? Ce problème paraît compliqué, nous ne l'avons pas abordé.

Signalons aussi que nos calculs expliquent l'échec de la théorie d'EINSTEIN de 1950 où il était supposé que $P_{[\lambda\beta]}=0$. Cette théorie ne pouvait rendre compte de la présence d'un champ électromagnétique, lié précisément à la partie antisymétrique du tenseur de RICCI.

Terminons enfin ce chapitre en signalant une autre traduction de nos formules, valable en négligeant des termes d'ordre supérieur à 2:

$$\vec{H}=\frac{K}{c}\,\Delta\,\vec{\beta},$$

$$\vec{E}=2K\left[\frac{\Delta\vec{\beta}'}{2}-\frac{1}{2c^2}\partial_{t^2}\vec{\beta}'+\frac{1}{2c^2}\,\Delta\vec{k}'-\frac{2}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\Lambda\right].$$

Posant $\vec{A}=-\frac{K}{c}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{\beta}$, on trouve $\vec{H}=\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{A}$. Comme:

$$\Delta\vec{\beta}'=\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\Delta\varphi,\qquad \vec{\beta}'=\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\varphi,\qquad \Delta\vec{k}'=\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\mathrm{Div}\,\vec{k}',$$

on a

$$\vec{E}=K\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(\Delta\varphi)-\frac{K}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,(\partial_{t^2}\varphi)+\frac{K}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\mathrm{Div}\,\vec{k}'-\frac{4K}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\Lambda-\frac{K}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{k}'$$

$$=K\cdot\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\left[\Delta\varphi-\frac{\partial_{t^2}\varphi}{c^2}+\frac{\mathrm{Div}\,\vec{k}'}{c^2}-\frac{4}{c^2}\,\Lambda\right]-\frac{K}{c^2}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,k'.$$

Mais puisque $\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{k}'=-\partial_t\vec{\beta}$, on a

$$\vec{E}=K\cdot\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\left[\Delta\varphi-\frac{\partial_{t^2}\varphi}{c^2}+\frac{\mathrm{Div}\,\vec{k}'}{c^2}-\frac{4}{c^2}\,\Lambda\right]+\frac{K}{c^2}\,\partial_t\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{\beta}.$$

Finalement, en posant:

$$\vec{A}=-\frac{K}{c}\,\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{\beta},\qquad \Phi=-K\left[\Delta\varphi-\frac{\partial_{t^2}\varphi}{c^2}+\frac{\mathrm{Div}\,\vec{k}'}{c^2}-\frac{4}{c^2}\,\Lambda\right],$$

on obtient:

$$\vec{H}=\overrightarrow{\mathrm{Rot}}\,\vec{A},\qquad \vec{E}=-\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\Phi-\frac{1}{c}\,\frac{\partial\vec{A}}{dt},$$

équations classiques en électromagnétisme.

CHAPITRE II.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT EN THÉORIE UNITAIRE D'EINSTEIN-SCHRÖDINGER. LE CAS GRAVITATIONNEL.

§ 1. - Les identités de conservation.

En théorie unitaire les identités de conservation peuvent s'écrire [12]:

$$2\partial_\lambda H^\lambda_\varrho + 2H^\lambda_\varrho L^\sigma_{\sigma\lambda} - g^{\sigma\mu}\,\partial_\varrho P_{\sigma\mu} = 0, \tag{2.1}$$

où nous avons posé:

$$2H^\lambda_\varrho = P_{\varrho\sigma}\, g^{\lambda\sigma} + P_{\sigma\varrho}\, g^{\sigma\lambda}.$$

Nous allons transformer le premier membre de (2.1) de manière à tenir compte plus aisément des équations approchées du champ dont nous ferons usage plus loin. En introduisant les parties symétriques et antisymétriques des tenseurs, nous obtiendrons:

$$m^{\lambda\sigma} \sum_{pc} \partial_\lambda P_{[\varrho\sigma]} + 2P_{(\varrho\sigma)}(\partial_\lambda l^{\lambda\sigma} + l^{\lambda\sigma} L^\mu_{\mu\lambda}) + 2\partial_\lambda m^{\lambda\sigma} P_{[\varrho\sigma]} + 2l^{\lambda\sigma}\partial_\lambda P_{(\varrho\sigma)} +$$
$$+ 2P_{[\varrho\sigma]}\, m^{\lambda\sigma} L^\mu_{\mu\lambda} - l^{\sigma\mu}\,\partial_\varrho P_{(\sigma\mu)} = 0 \;;$$

or il est facile de monterer que

$$(\partial_\lambda m^{\lambda\sigma} + L^\mu_{\mu\lambda}\, m^{\lambda\sigma})\, P_{[\varrho\sigma]} = 0\,,$$

on déduit en effet de

$$\partial_\varrho \mathrm{g}^{\varrho\beta} + L^\varrho_{\sigma\varrho}\, g^{\sigma\beta} + L^\beta_{\varrho\sigma}\, g^{\varrho\sigma} = 0\,,$$

par antisymétrisation et compte tenu de $L^\sigma_{\sigma\varrho} = L^\sigma_{\varrho\sigma}$,

$$\partial_\varrho m^{\varrho\beta} + L^\varrho_{\varrho\sigma}\, m^{\sigma\beta} = 0\,.$$

Dès lors les identités de conservation s'écrivent:

$$m^{\lambda\sigma} \sum_{pc} \partial_\lambda P_{[\varrho\sigma]} + 2P_{(\varrho\sigma)} (\partial_\lambda l^{\lambda\sigma} + L^{\mu}_{\mu\lambda} l^{\lambda\sigma}) + 2l^{\lambda\sigma} \partial_\lambda P_{(\varrho\sigma)} - l^{\sigma\mu} \partial_\varrho P_{(\sigma\mu)} = 0,$$

que nous pouvons aussi bien écrire après multiplication par $l^{\varrho\nu}$ (puisque det $l^{\varrho\nu} \neq 0$):

$$(2.2) \quad m^{\lambda\sigma} l^{\varrho\nu} \sum_{pc} \partial_\lambda P_{[\varrho\sigma]} + P_{(\varrho\sigma)} [-2l^{\lambda\sigma} \partial_\lambda l^{\varrho\nu} + 2 L^{\mu}_{\mu\lambda} l^{\varrho\nu} l^{\lambda\sigma} + \partial_\lambda (l^{\varrho\sigma} l^{\lambda\nu}) + 2\partial_\lambda \mathfrak{S}^{\lambda\nu} = 0.$$

Nous avons posé:

$$l^{\varrho\nu} l^{\lambda\sigma} P_{(\varrho\sigma)} = \mathscr{P}^{\lambda\nu}, \qquad l^{\sigma\mu} P_{(\sigma\mu)} = \mathscr{P},$$

$$(2\text{-}3) \qquad \mathfrak{S}^{\lambda\nu} = \mathscr{P}^{\lambda\nu} - \frac{1}{2} l^{\lambda\nu} \mathscr{P},$$

Dans (2.2) nous avons mis en évidence des termes qui s'annulent d'après les équations du champ:

$$P_{(\varrho\sigma)} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_{pc} \partial_\lambda P_{[\varrho\sigma]} = 0$$

et dont l'ordre sera facile à évaluer dans la méthode des approximations.

§ 2. - Le cas purement gravitationnel.

Les équations qui donnent $L^{\alpha}_{(\beta\gamma)}$ et $S^{\alpha}_{\beta\gamma}$ [voir Chap. I: (1.7) et (1.9)] montrent que si le tenseur $g_{\alpha\beta}$ est symétrique il en est de même des $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ qui s'identifient alors aux symboles de CHRISTOFFEL de $g_{\alpha\beta}$.

Ce cas est identique au cas extérieur purement gravitationnel de la relativité générale en considérant $g_{\alpha\beta}$ comme le tenseur métrique. Nous étudierons d'abord ce cas en nous inspirant de la méthode suivie par PHAM TAN HOANG ([20] et [21]), mais nous conduirons nos calculs de manière différente en rattachant étroitement nos résultats aux conditions d'isothermie.

Nous nous placerons donc en coordonnées isothermes relativement à $g_{\alpha\beta}$, dans ces conditions:

$$g^{\alpha\beta} \left\{ {\varrho \atop \alpha\beta} \right\}_g = 0.$$

Nous admettrons, selon un résultat classique, que les conditions d'isothermie sont compatibles avec les hypothèses de champ faible ([3] et [8]).

Dans le Chapitre II nous poserons donc:

$$\mathcal{T}_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{T} = R, \qquad \mathfrak{S}^{\alpha\beta} = S^{\alpha\beta}.$$

$R_{\alpha\beta}$ et $S_{\alpha\beta}$ sont respectivement le tenseur de RICCI et le tenseur d'EINSTEIN de l'espace-temps riemannien. Ils sont symétriques.

Les identités de conservation qui résultent dans ce cas de la définition même de $S_{\alpha\beta}$ à partir des symboles de CHRISTOFFEL (identités de BIANCHI) s'écrivent d'après (2.2):

$$(2.2 \text{ bis}) \qquad R_{\varrho\sigma}\left[-2g^{\lambda\sigma}\,\partial_\lambda\, g^{\varrho\nu} + 2L^{\mu}_{\mu\lambda}\, l^{\varrho\nu}\, l^{\lambda\sigma} + \partial_\lambda\,(l^{\varrho\sigma}\, l^{\lambda\nu})\right] + 2\partial_\lambda\, S^{\lambda\nu} = 0\,.$$

1. - La métrique des sections d'espace de l'espace-temps V_4.

a) *Orientation dans l'espace et le temps.*

La métrique riemanienne $ds^2 = g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta$ de type hyperbolique normal peut par hypothèse se mettre en chaque point de V_4 sous la forme:

$$ds^2 = (\omega^0)^2 - (\omega^1)^2 - (\omega^2)^2 - (\omega^3)^3$$

où les ω^α sont un système de formes de PFAFF locales linéairement indépendantes.

Des considérations tirées de la relativité restreinte nous conduisent aux définitions suivantes:

Une direction $\overrightarrow{dx}$ tangente en (x) à V_4 est orientée dans le temps ou dans l'espace selon que

$$g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta > 0 \qquad \text{ou} \qquad g_{\alpha\beta}\, dx^\alpha\, dx^\beta < 0,$$

respectivement.

Un k-plan élémentaire ($k = 2$ ou 3) tangent en x à V_4 est orienté dans l'espace si toutes ses directions sont orientées dans l'espace. Il est orienté dans le temps s'il admet des directions orientées dans le temps.

Considérons un 3-plan élémentaire π_x défini par l'équation $v_\alpha \, dx^\alpha = 0$; la direction définie par le vecteur v^α est la normale au plan, par suite π_x est orienté dans l'espace ou le temps selon que v^α est orienté dans le temps ou l'espace:

$$g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta > 0 \quad \text{orientation de } \pi_x \text{ dans l'espace,}$$

$$g^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta < 0 \quad \text{orientation de } \pi_x \text{ dans le temps.}$$

Soit $\vec{\eta}$ un vecteur unitaire ($\vec{\eta}^2 = 1$) donc orienté dans le temps et soit π_x le 3-plan élémentaire $\eta_\alpha \, dx^\alpha = 0$ orthogonal, donc orienté dans l'espace.

Nous dirons que $\vec{\eta}$ et π_x définissent en x un temps et un espace associés. Si $\vec{X}$ est un vecteur arbitraire de V_4, il est la somme d'un vecteur colinéaire à $\vec{\eta}$ et d'un vecteur orthogonal à $\vec{\eta}$ donc dans π_x, on a:

$$\vec{X} = (\vec{X}\cdot\vec{\eta})\cdot\vec{\eta} + X^* \tag{2.4}$$

avec

$$\vec{\eta}\cdot X^* = 0 .$$

Le premier vecteur de (2.4) est dit la composante temporelle de $\vec{X}$ et $\vec{X}^*$ sa composante spatiale relatives aux temps et espaces associés définis par $\vec{\eta}$; la quantité $-(\vec{X}^*)^2$ est dite la grandeur d'espace du vecteur $\vec{X}$ relativement à la direction de temps $\vec{\eta}$.

Une courbe Γ de V_4 est orientée dans le temps si les tangentes en ses différents points sont orientées dans le temps. Le long de Γ

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} \, dx^\alpha \, dx^\beta > 0 .$$

Pour $ds^2 < 0$ Γ est orientée dans l'espace.

Une hypersurface (S) à 3 dimensions est orientée dans l'espace si ses éléments plans tangents aux différents points sont orientés dans l'espace. Si (S) est définie localement par $f(x^a) = 0$, l'élément plan admet une équation ayant pour coefficients

$$v_\alpha = \partial_\alpha f .$$

Par suite sur (S)

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \, \partial_\beta f > 0 .$$

Au contraire pour

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha f \, \partial_\beta f < 0$$

(S) est orientée dans le temps.

b) *La métrique* g^*_{ij}.

Adoptons en x un repère $(x, \vec{e_\lambda})$ pour lequel le vecteur $\vec{e_0}$ est colinéaire à $\vec{\eta}$. Dans ce repère la forme quadratique fondamentale est donnée par

$$(\vec{X})^2 = g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta ,$$

$\vec{e_0}$ étant orienté dans le temps on a l'inégalité:

$$(\vec{e_0})^2 = g_{00} > 0 .$$

Le vecteur $\vec{\eta}$ étant unitaire et colinéaire à $\vec{e_0}$ on aura

$$\vec{\eta} = \frac{\vec{e_0}}{\sqrt{g_{00}}} . \tag{2.5}$$

Cela posé, cherchons à évaluer $(\vec{X}^*)^2$. En élevant (2.4) au carré, il vient, compte-tenu de (2.5),

$$(\vec{X}^*)^2 = (\vec{X})^2 - (\vec{X}\cdot\vec{\eta})^2 = (\vec{X})^2 - \frac{1}{g_{00}} (\vec{X}\cdot\vec{e_0})^2 = (\vec{X})^2 - \frac{(X_0)^2}{g_{00}} =$$

$$= g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta - \frac{1}{g_{00}} (g_{0\alpha} X^\alpha)^2,$$

or

$$g_{\alpha\beta} X^\alpha X^\beta = \frac{1}{g_{00}} (g_{0\alpha} X^\alpha)^2 + \left[g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}\right] X^i X^j .$$

Comme $g_{00} > 0$, et d'après la signature du ds^2, le dernier terme du second membre est une forme quadratique définie négative aux 3 variables X^i. Il en résulte:

$$(\vec{X}^*)^2 = \left[g_{ij} - \frac{g_{i0}\, g_{j0}}{g_{00}}\right] X^i X^j .$$

Considérons la forme quadratique définie négative que nous venons de mettre en évidence et qui admet les coefficients

$$g^*_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}} ,$$

la forme associée est définie par

$$g^{*}_{ij}\, g^{*kj} = \delta^k_i ,$$

on peut vérifier que:

$$g^{*kj} = g^{kj} , \tag{2.6}$$

$$g^{*}_{ij}\, g^{jk} = g_{ij}\, g^{jk} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\, g_{0j}\, g^{jk} =$$

$$= g_{i\lambda}\, g^{\lambda k} - g_{i0}\, g^{0k} - \frac{g_{0i}}{g_{00}}\,(g_{0\lambda}\, g^{\lambda k} - g_{00}\, g^{0k}) = \delta^k_i .$$

En résumé: Pour tout repère $(x, \vec{e_\lambda})$ pour lequel g_{00} est positif, les deux formes quadratiques associées de coefficients

$$g^{*}_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}} , \qquad g^{*ij} = g^{ij}$$

sont définies négatives. Si $\vec{X}$ est un vecteur arbitraire de composantes (X^α) la grandeur d'espace de $\vec{X}$ relativement à la direction de temps définie par $\vec{e_0}$ est donnée par

$$-(\vec{X^*})^2 = - g^{*}_{ij}\, X^i\, X^j .$$

On établirait de même que l'inégalité $g^{00} > 0$ entraîne le caractère défini négatif des deux formes quadratiques associées admettant respectivement pour coefficients

$$g^{ij} - \frac{g^{0i}\, g^{0j}}{g^{00}} , \qquad g_{ij} .$$

Un ds^2 pourra s'interpréter physiquement dans les régions de V_4 où il existe une famille à un paramètre d'hypersurfaces à 3 dimensions W_3 orientées dans l'espace, appelées sections d'espaces ($x^0 = c^{te}$) ($g^{00} > 0$) et une famille à 3 paramètres de lignes L d'univers orientées dans le temps ($g_{00} > 0$) ($x^i = c^{te}$) coupant les hypersurfaces et telles qu'en chaque point (x^α) de ces régions on puisse construire un repère quadrimensionnel, dont l'un des vecteurs $\vec{e_0}$ est tangent à une ligne L et orienté dans le temps, les autres vecteurs $\vec{e_i}$ du repère définissant le 3-plan élémentaire tangent à W_3 issu de (x^λ). Nous choisirons sur W_3 la métrique définie négative:

$$g^*_{ij} = g_{ij} - \frac{g_{0i}\, g_{0j}}{g_{00}}.$$

Si l'on effectue le changement de coordonnées locales

$$x^{0'} = x^0, \qquad x^{i'} = \varphi^{i'}(x_j)$$

qui conserve W_3, et si $A_{\alpha\beta}$ désigne un tenseur de V_4, A_{ij} définit sur W_3 un tenseur, A_{0i} un vecteur, A_{00} un scalaire.

De même $A_{(\alpha)i}$, où α est fixé, définit sur W_3 un vecteur $\vec{A}_{(\alpha)}$.

2. - Le flux du vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$

α étant fixé, on peut associer à $S^{\alpha i}$ le vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$, de W_3 de composantes contrevariantes $S^{(\alpha)i}$ $(i = 1, 2, 3)$.

Si la variété W_3 est orientable, on peut définir sur W_3 une forme élément de volume

$$\eta^*_{i_1, i_2, i_3}$$

et associer à $\vec{S}^{(\alpha)}$ une forme différentielle extérieure quadratique

$$\Omega(\alpha) = \frac{1}{2\,!}\, \eta^*_{i_1, i_2, i_3}\, S^{(\alpha)i_3}\, dx^{i_1} \wedge dx^{i_2}.$$

Considérons, dans une hypersurface W_3 déterminée, un 3-champ C^3, et désignons par ∂C^3 sa frontière; posons de plus

$$\sigma^{(\alpha)} = \text{Flux}^*\, \vec{S}^{(\alpha)} = \int_{\partial C^3} \Omega\,(\alpha).$$

Pour un champ C^3 quelconque extérieur aux tubes d'univers il est évident, d'après le théorème de STOKES, que la condition nécessaire et suffisante pour que le flux $\sigma^{(\alpha)}$ soit nul est que la divergence du vecteur $\vec{S}^{(\alpha)}$ dans C^3 soit nulle:

$$\frac{1}{\sqrt{|\,g^*\,|}}\, \partial_i\, (S^{(\alpha)i} \sqrt{|\,g^*\,|}) = 0\ .$$

Pour un champ C^3 quelconque contenant en son intérieur la section d'espace d'un seul tube d'univers la nullité de cette divergence exprime une condition nécessaire et suffisante pour que le flux ne dépende ni de la forme, ni de la grandeur de ∂C^3. Le calcul de ce flux pourra se faire sur la frontière de la section d'espace ou sur la frontière d'un champ homéomorphe à la boule euclidienne à 3 dimensions et contenant en son intérieur la section d'espace du tube d'univers. Dans ce dernier cas il sera commode d'exprimer le flux sous la forme:

$$\int_{\partial C^3} S^{(\lambda)i} \, \nu_i \, d\sigma$$

(ν_i normale unitaire extérieure à la boule C^3; $d\sigma$ élément d'aire de la frontière de la boule, plongée dans W_3 munie de la métrique g^*_{ij}).

3. - Les équations du mouvement.

Elles seront choisies parmi les équations qui sont identiquement satisfaites dès que le système des équations du champ est vérifié. En première approximation, elles devront redonner les équations newtoniennes du mouvement d'un point matériel.

Il semble naturel d'admettre:

que ces équations se rattachent aux identités de conservation par extrapolation des résultats de la relativité générale;

qu'elles doivent faire intervenir dans le cas général les quatre systèmes d'équations du champ.

De plus, dans le cadre d'une solution faisant appel à la méthode des approximations, elles doivent donner des résultats utilisables.

Ce dernier point est le plus délicat à expliquer. Il est évident que même si nous savions résoudre rigoureusement le système d'équations du champ, c'est-à-dire calculer les coefficients $g_{\alpha\beta}$ et $L^{\alpha}_{\beta\gamma}$ en fonction des coordonnées et d'un certain nombre de constantes d'intégration, le problème du mouvement d'un corps ne serait pas résolu pour autant. Ce problème n'a de sens que si l'on identifie certains paramètres à certaines grandeurs physiques attachées au corps. Dans le Chapitre I on a déjà choisi certaines solutions qui, en fait, correspondent à des interprétations physiques plus ou moins déguisées, interprétations que nous tirons de nos connaissances antérieures. La correspondance que l'on établira entre certains coefficients et des grandeurs physiques attachées au corps: masse, vitesse, par exemple, doit nous permettre de faire en sorte que les « équations dites du mouvement » ne soient pas identiquement satisfaites quand nous tiendrons compte en elles de la solution approchée antérieurement trouvée.

Il semble, malgré une tentative de géométrisation totale des concepts mécaniques, que la position soit à peu près la même que dans la théorie classique où l'équation $\vec{F} = m\vec{\gamma}$ est tautologique sans hypothèse sur la forme du premier membre, une fois admises les notions de masse et d'accélération. C'est dans le cadre d'hypothèses se traduisant par des correspondances partiellement arbitraires, du point de vue purement logique, que le problème du mouvement des corps se pose et a un sens dans l'un ou l'autre des points de vue.

4. - Les identités de conservation et le flux du vecteur $\vec{S}^{(k)}$ en première approximation.

Les identités (2.2 bis) s'écrivent:

$$R_{\varrho\sigma}[-2g^{\lambda\sigma}\,\partial_\lambda\, g^{\varrho\nu} + 2L^{\mu}_{\mu\lambda}\, l^{\varrho\nu}\, l^{\lambda\sigma} + \partial_\lambda\,(l^{\varrho\sigma}\, l^{\lambda\nu})] + 2\,\partial_\lambda\, S^{\lambda\nu} = 0\,. \tag{2.2 bis}$$

Supposons les équations du champ satisfaites en première appro imation comme au Chapitre I:

$\partial_\lambda\, S^{\lambda\nu}$ commence par des termes d'ordre 4 en $\dfrac{1}{c}$,

R_{ij} » » » » » 4 » »,

R_{0i} » » » » » 5 » »,

$\partial_\lambda\, g^{\varrho\nu}$ et $L^{\lambda}_{\beta\gamma}$ étant d'ordre 2 au moins, on voit que le premier terme de (2.2 bis) est d'ordre 6 au moins, tandis que le dernier est «a priori» d'ordre 4 ; donc:

$$\partial_\lambda\, S^{\lambda\nu} = 0, \qquad \mathrm{mod}\ O\left[\frac{1}{c^6}\right], \tag{2.7}$$

si $\nu = k$ ($k = 1, 2, 3$) on a

$$S^{0k} = g^{\varrho 0} g^{\sigma k}\, R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2}\, g^{0k}\, g^{\sigma\mu}\, R_{\sigma\mu}\,,$$

S^{0k} est donc d'ordre 5 en $\dfrac{1}{c}$ et $\partial_0\, S^{0k}$ d'ordre 6 en $\dfrac{1}{c}$, cependant que $\partial_i\, S^{ik}$ est seulement d'ordre 4.

Il en résulte:

$$\partial_i S^{ik} = 0 \qquad \mathrm{mod}\ O\left[\frac{1}{c^6}\right]$$

et enfin, comme $\partial_i \sqrt{|g^*|}$ est d'ordre 2,

$$\frac{\partial_i [\sqrt{|g^*|} S^{ik}]}{\sqrt{|g^*|}} = 0, \qquad \mathrm{mod}\ O\left[\frac{1}{c^6}\right]. \tag{2.8}$$

Donc, compte-tenu des équations en première approximation, la divergence d'espace W_3 du vecteur $\vec{S}^{(k)}$, dont les composantes sont d'ordre 4, est nulle à l'ordre 4.

Si C_3 est un corps simplement connexe de W_3 et C_3' un domaine de W_3 simplement connexe tel que $C_3 \subset C_3'$, on a:

$$\int_{C_3' - C_3} \frac{\partial_i [\sqrt{|g^*|}\, S^{i(k)}]}{\sqrt{|g^*|}} \, dV = 0, \qquad \mathrm{mod}\ O\left[\frac{1}{c^6}\right],$$

soit:

$$\mathrm{Flux}^*_{\partial C_3'} \vec{S}^{(k)} = \mathrm{Flux}^*_{\partial C^3} \vec{S}^{(k)}, \qquad \mathrm{mod}\ O\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

Ce flux est donc indépendant du domaine C_3' en négligeant des termes d'ordre supérieur à 4.

Or, compte tenu de manière rigoureuse des équations du champ, ce flux est nul: il est donc naturel d'examiner les équations:

$$\mathrm{Flux}^*_{\partial C^3} S^{(k)} = 0 \tag{2.9}$$

et d'essayer de montrer qu'elles redonnent en première approximation les équations newtoniennes du mouvement d'un point matériel.

Mais avant d'aller plus loin il faut établir:

Que le calcul du flux d'ordre 4 ne fait intervenir que les coefficients déjà calculés des développements des potentiels (d'ordre 2 ou 3).

Si les coordonnées sont quelconques, tel n'est pas le cas, du moins «a priori», Pham Tan Hoang utilise ici une généralisation de la formule de Stokes pour se débarrasser des termes gênants et montrer que leur contribution est identiquement nulle. Mais les conditions d'isothermie, convenablement interprétées permettent d'aboutir plus rapidement au même résultat. Notre méthode diffère donc essentiellement, à partir de là, de celle des précédents auteurs. Elle s'appliquera sans aucune modification pour le mouvement des particules chargées.

Les conditions d'isothermie s'expriment par les relations:

$$(2.10) \qquad \partial_i \bar{g}^{i\alpha} = -\partial_0 \bar{g}^{0\alpha} \qquad \text{où} \qquad \bar{g}^{\alpha\beta} = \sqrt{|g|}\, g^{\alpha\beta}$$

(cf. [3]) et nous allons en tenir compte.

5. - L'équation Flux$^*_{\partial c^3} \vec{S}^{(k)} = 0$ en première approximation et compte tenu des conditions d'isothermie.

Supposons donc valables les développements du Chapitre I en coordonnées isothermes: relativement à $g_{\alpha\beta}$ symétrique.

D'aprés un résultat classique (cf. [8], page 21):

$$(2.11) \qquad S^{i(k)} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} \square\, \bar{g}^{i(k)} + \psi^{i(k)}, \text{ avec } \square = g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta} \text{ (d'Alembertien),}$$

$\psi^{i(k)}$ ne contient aucune dérivée du 2^e ordre.

Posons:

$$S^{i(k)} = \Theta^{i(k)} + \psi^{i(k)}, \qquad \Theta^{i(k)} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\, g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta}\, \bar{g}^{i(k)},$$

$$\operatorname{div}^* \vec{\Theta}^{(k)} = \frac{1}{2\sqrt{|g|}} (\partial_i\, g^{\alpha\beta})\, \partial_{\alpha\beta}\, \bar{g}^{i(k)} + \frac{1}{2\sqrt{|g^*|}}\, g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta}\, \bar{g}^{i(k)}\, \partial_i \sqrt{\left|\frac{g^*}{g}\right|} +$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{|g|}}\, g^{\alpha\beta}\, \partial_{\alpha\beta i}\, \bar{g}^{ik}.$$

Tenant compte de (2.10) il vient:

$$\operatorname{div}^* \vec{\Theta}^{(k)} = \frac{\partial_i\, g^{\alpha\beta}}{2\sqrt{|g|}} \cdot \partial_{\alpha\beta}\, \bar{g}^{i(k)} + \frac{g^{\alpha\beta}}{2\sqrt{|g^*|}}\, \partial_{\alpha\beta}\, \bar{g}^{i(k)}\, \partial_i \sqrt{\left|\frac{g^*}{g}\right|} - \frac{g^{\alpha\beta}}{2\sqrt{|g|}}\, \partial_{\alpha\beta 0}\, \bar{g}^{0k}.$$

D'après la formule classique qui donne le laplacien généralisé on a:

$$\Delta_2^*\, \varphi = \frac{1}{\sqrt{|g^*|}}\, \partial_i \left(\sqrt{|g^*|}\, g^{*ij}\, \partial_j \varphi\right) = \operatorname{div}^* \overrightarrow{\operatorname{grad}}\, \varphi\,.$$

Il vient ainsi, compte tenu de $g^{ij} = g^{*ij}$ [voir (2.6)],

$$\operatorname{div}^*\left[\vec{\Theta}^{(k)} + \frac{1}{2}\operatorname{grad}\partial_0 \bar{g}^{0k}\right] = \left\{\begin{array}{l} \dfrac{\partial_i g^{\alpha\beta}}{2\sqrt{|g|}}\,\partial_{\alpha\beta}\,\bar{g}^{i(k)} + \dfrac{g^{\alpha\beta}}{2\sqrt{|g^*|}}\,\partial_{\alpha\beta}\,\bar{g}^{i(k)}\,\partial_i\sqrt{\left|\dfrac{g^*}{g}\right|} + \\[2ex] + \dfrac{\sqrt{|g|}-1}{2\sqrt{|g|}}\,g^{ij}\,\partial_{0ij}\,\bar{g}^{0(k)} - \dfrac{g^{00}}{2\sqrt{|g|}}\,\partial_{000}\,\bar{g}^{0(k)} - \\[2ex] - \dfrac{g^{0i}}{\sqrt{|g|}}\,\partial_{00i}\,\bar{g}^{0(k)} + \dfrac{\partial_i\sqrt{|g^*|}}{2\sqrt{|g^*|}}\,g^{ij}\,\partial_{j0}\,\bar{g}^{0k}. \end{array}\right.$$

Introduisons ici les résultats du Chapitre I:

$$g^{00} = 1 + \frac{2\,U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right], \qquad \sqrt{-g} = 1 + \frac{2\,U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

$$g^{ik} = -\,\delta^{ik} + 2\delta^{ik}\,\frac{U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right], \qquad \sqrt{-g^*} = \sqrt{-g} + O\left[\frac{1}{c^3}\right],$$

$$\bar{g}^{0k} = \frac{\alpha_k}{c^3} + O\left[\frac{1}{c^5}\right], \qquad \bar{g}^{ij} = -\,\delta^{ij} + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

Relativement à $\dfrac{1}{c}$ les termes du 2^e membre de (2.12) sont d'ordre 6 au moins alors qu'au premier membre le 2^e terme est d'ordre 4, on a donc:

$$\operatorname{div}^*\vec{\Theta}^{(k)} = -\,\frac{1}{2}\operatorname{div}^*\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(\partial_0\,\bar{g}^{0k}) + O\left[\frac{1}{c^6}\right], \tag{2.13}$$

d'où l'on déduit localement:

$$\vec{\Theta}^{(k)} = -\,\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,(\partial_0\,\bar{g}^{0k}) + O\left[\frac{1}{c^6}\right] \quad \text{(Modulo un rotationnel d'espace } W_3\text{)}; \tag{2.14}$$

donc:

$$S^{i(k)} = -\,\frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\operatorname{grad}}\,\partial_0\,\bar{g}^{0k})^i + \psi^{i(k)} + O\left[\frac{1}{c^6}\right] \qquad \text{(Modulo un rotationnel).}$$

Mais (cf. [8]):

$$\psi^{i(k)} = \frac{-g^{\lambda\mu}}{\sqrt{-g}} \gamma_\lambda \, \partial_\mu \, \bar{g}^{i(k)} - g^{\lambda\mu} g^{\nu\varrho} L^i_{\lambda\nu} L^{(k)}_{\mu\varrho} + \frac{g^{i(k)}}{4} [2g^{\lambda\mu} \gamma_\lambda \gamma_\mu + L^\varrho_{\mu\nu} \partial_\varrho g^{\mu\nu}] \tag{2.15}$$

avec

$$\gamma_\lambda = \delta_\lambda \log \sqrt{-g} \, .$$

Des calculs assez longs conduisent alors aux résultats suivants:

$$\psi^{i(k)} = \frac{-2\partial_i U_{00} \, \partial_k U_{00}}{c^4} + O\left[\frac{1}{c^5}\right] \quad (i \neq k),$$

$$\psi^{k(k)} = \frac{\sum\limits_l (\partial_l U_{00})^2 - 2(\partial_k U_{00})^2}{c^4} + O\left[\frac{1}{c^5}\right].$$

On voit donc que modulo un rotationnel d'espace qui disparaîtra par intégration, et des termes d'ordre 6, S^{ik} s'exprime compte tenu de la solution en première approximation par des termes d'ordre 4 en $\frac{1}{c}$, ne contenant que des coefficients déjà calculés.

En écrivant que ce flux est nul on aura des relations entre les coefficients de $g_{\lambda\beta}$ d'ordre 2 et 3 qui pourront s'interpréter, nous le montrerons, comme les équations approchées du mouvement.

6. - L' équation $\text{Flux}^*_{\partial c^3} \overrightarrow{S^{(k)}} = 0$ en deuxième approximation et à une approximation quelconque.

Nous n'entreprendrons pas en détails les calculs en deuxième approximation, mais il est possible de montrer que la méthode précédente est susceptible de s'appliquer à un ordre quelconque.

Nous nous bornerons simplement à la deuxième approximation, mais on verra facilement que le raisonnement est général.

En deuxième approximation nous devrons calculer les g^{ik} à l'ordre 4, les g^{0k} à l' ordre 5, g^{00} à l' ordre 4. $S^{i(k)}$ sera nul à l' ordre 4 et le flux sera d' ordre 6.

Dans les termes de $S^{i(k)}$ d'ordre 6 ne figurent que des coefficients déjà calculés.

En effet, pour les termes qui proviennent de $\psi^{i(k)}$ c'est évident, car les termes de $\psi^{i(k)}$ sont des produits de facteurs dont deux au moins sont d'ordre supérieur ou égal à 2 en $\frac{1}{c}$: la contribution des termes d'ordre 5 ou 6 de $g_{\alpha\beta}$ donnera des termes d'ordre 7 ou 8, donc négligeables.

Pour $\Theta^{i(k)}$ reprenons la formule:

$$\operatorname{div}^* \vec{\Theta}^{(k)} = -\frac{1}{2} \operatorname{div}^* \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\partial_0 \bar{g}^{0k}) + \Lambda,$$

Λ représente une divergence $\Lambda = \operatorname{div}^* \vec{\lambda}$.

Dans Λ la contribution des coefficients de $g_{\lambda\beta}$ d'ordre 5 ou 6 donne des termes négligeables.

Posons $\Lambda = \Lambda' + O\left[\frac{1}{c^7}\right]$, où Λ' ne dépend que des coefficients connus.

On pourra trouver $\vec{\lambda}'$, d'une infinité de manières et modulo un rotationnel d'espace tel que:

$$\operatorname{div}^* \vec{\lambda}' = \Lambda',$$

$$\vec{\Theta}^{(k)} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{\operatorname{grad}} (\partial_0 \bar{g}^{0k}) + \vec{\lambda}' + O\left[\frac{1}{c^7}\right] \quad \text{(modulo un rotationnel).}$$

Donc finalement ψ^{ik} et Θ^{ik} ne dépendront que des coefficients déjà calculés, ce qui assurera le succès de la méthode.

7. - Le flux du vecteur $\vec{S}^{(0)}$.

Examinons enfin le cas du vecteur $\vec{S}^{(0)}$:

$$S^{00} = g^{\varrho 0} g^{\sigma 0} R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} g^{00} g^{\sigma\mu} R_{\sigma\mu} ,$$

S^{00} est d'ordre 4 en $\frac{1}{c}$ compte tenu des équations du champ à l'ordre 2. $\partial_0 S^{00}$ est d'ordre 5,

$$S^{k0} = g^{\varrho k} g^{\sigma 0} R_{\varrho\sigma} - \frac{1}{2} g^{0k} g^{\sigma\mu} R_{\sigma\mu}$$

est aussi d'ordre 5 comme $\partial_k S^{k0}$, si l'on tient compte des équations du champ à l'ordre 3.

Si nous reprenons l'équation

$$\partial_k S^{k(0)} + \partial_0 S^{0(0)} = O\left[\frac{1}{c^6}\right],$$

on voit que sans modifier légèrement notre méthode on ne peut arriver à un résultat analogue à (2.8).

(On pourrait écrire: $\partial_k S^{k(0)} = 0 + O\left[\frac{1}{c^6}\right]$, mais, comme S^{k0} est d'ordre 5, le calcul du flux à l'ordre 4 donnera identiquement zéro.)

C'est pour cela que nous supposerons que les équations du champ sont simplement satisfaites à l'ordre 2; S^{k0} est d'ordre 3, tandis que S^{00} est d'ordre 4, donc:

$$\partial_k S^{k(0)} = 0 + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

Comme plus haut l'utilisation de la condition d'isothermie nous permettra de trouver une équation où ne figurent que les coefficients déjà calculés.

Écrivons:

$$\partial_i \bar{g}^{i0} = - \partial_0 \bar{g}^{00}$$

Posons:

$$S^{i(0)} = \Theta^{i(0)} + \psi^{i(0)},$$

où $\psi^{i(0)}$ est d'ordre 5 d'apres la formule analogue à (2.15),

$$\text{div}^* \vec{\Theta}^{(0)} = - \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{div}}^* (\text{grad}\ \partial_0 \bar{g}^{i0}) + O\left[\frac{1}{c^5}\right].$$

En reprenant mot à mot le calcul fait plus haut, on a

$$\vec{S}^{(0)} = - \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{grad}}\ (\partial_0 \bar{g}^{00}) + O\left[\frac{1}{c^5}\right] \qquad \text{(modulo un rotationnel d'espace } W_3).$$

Remarque: Le choix que nous avons fait pour α^i assure la vérification de cette condition d'isothermie:

$$\alpha^i = 4\ U_{00}\ \frac{d\xi^i}{dt} \qquad \text{(voir Chapitre I)},$$

$$\frac{1}{c^3}\ \partial_i \alpha^i = - \frac{1}{c^3}\ \partial_t (4\ U_{00}),$$

car:

$$\partial_i\ U_{00} \frac{d\xi^i}{dt} = - \partial_t\ U_{00}.$$

D'une manière générale, si les équations du champ sont satisfaites jusqu'à l'ordre 4, on pourra appliquer la méthode exposée aux nn. **5** et **6** et on verra que le calcul du flux d'ordre 5 est seulement tributaire des coefficients déjà calculés.

En résumé, on calculera le flux du vecteur $\vec{S}^{(k)}$ les équations du champ étant vérifiées à l'ordre 3, 5, 7, ..., $2n+1$ et le flux du vecteur $\vec{S}^{(0)}$ les équations étant satisfaites à l'ordre 2, 4, 6, ... en écrivant que ce flux est nul sur la frontière du corps matériel on aura 4 équations dont 3 correspondront aux équations du mouvement proprement dit, la 4^e^ étant une équation de conservation.

§. 3. – Détermination effective des equations du mouvement en première approximation et dans le cas de deux points matériels non chargés.

Nous allons faire un calcul effectif en supposant les équations du champ satisfaites à l'ordre 2 pour le flux de $\vec{S}^{(0)}$ et à l'ordre 3 pour le flux de $\vec{S}^{(k)}$, ce qui correspond dans les deux cas à la première approximation.

Nous supposerons qu'il n'existe en présence que deux corpuscules M_1 et M_2 (mais les résultats s'étendent par linéarisation à un système de n corpuscules), les corpuscules seront assimilés à des sphères de rayons respectifs ϱ_1 et ϱ_2 plongées dans W_3.

On utilisera parfois des indices supérieurs pour distinguer les éléments attachés à chaque corpuscule (ainsi on écrira $\overset{(1)}{g}{}^{ij}$ et $\overset{(2)}{g}{}^{ij}$).

La distance $M_1 M_2$ évaluée avec la métrique $\overset{*}{g}{}^{ij}$ sera supposée très grande relativement aux rayons ϱ_1 et ϱ_2 que nous ferons d'ailleurs tendre vers zéro. Les paramètres qui dépendent des coordonnées d'espaces seront considérés avec leurs valeurs au centre de la sphère quand on se placera sur la surface de celle-ci.

$\overset{(1)}{\xi}{}^i$ et $\overset{(2)}{\xi}{}^i$ désigneront les coordonnées du centre des corpuscules et x^i ($i = 1, 2, 3$) celles d'un poin quelconque de W_3 section d'espace de V_4.

Nous devrons calculer:

$$\mathrm{Flux}^*_{\partial M_1} \vec{S}^{(a)} = \int_{\partial M_1} S^{(a)i} \nu_i \, d\sigma,$$

mais nous noterons que le terme principal se calculera en remplaçant $\overset{*}{g}{}^{ij}$ par $-\delta^{ij}$, ν_i par $-n^i$, $d\sigma$ par $d\Sigma$ dans un espace euclidien ordinaire $\mathcal{E}_3$ en correspondance biunivoque avec W_3 (égalité des coordonnées de même rang), n^i

désignant la normale unitaire extérieure à une sphère euclidienne (que nous appellerons encore M_2) et $\mathrm{d}\Sigma$ sont éléments d'aire ordinaire.

Modulo des termes que nous sommes en droit de négliger, nous avons donc:

$$\text{(2.17)} \qquad \mathrm{Flux}^*_{\partial M_2} \vec{S}^{(a)} = -\int_{\partial M_2} S^{(a)i} n^i \,\mathrm{d}\Sigma \qquad \text{(sommer en } i\text{)}.$$

1. - Les équations à l'ordre 2 et le flux du vecteur $\vec{S}^{(0)}$.

Les équations à l'ordre 2 se ramènent à l'unique condition $\Delta U_{00} = 0$ dont la solution choisie est:

$$U_{00} = Gm/r, \qquad r^2 = \sum_i (x^i - \xi^i)^2$$

(G = constante de gravitation, m = masse de la particule).

D'après les résultats établis au § 2, nous devons calculer:

$$\mathrm{Flux}\ \vec{S}^{(0)} = -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\ \partial_0\,\bar{g}^{00} + O\left[\frac{1}{c^5}\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\ \partial_0\,\bar{g}^{00} + O\left[\frac{1}{c^5}\right] \qquad \text{(modulo un rotationnel)},$$

or

$$\bar{g}^{00} = 1 + \frac{4\,U_{00}}{c^2} + O\left[\frac{1}{c^4}\right].$$

(2.17) s'écrit donc:

$$\frac{1}{c^3}\,\partial_t\,(\mathrm{Flux}_{\partial M_2}\ \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\ U_{00}) = 0, \qquad \mathrm{mod}\ O\left[\frac{1}{c^5}\right].$$

Mais d'après un résultat classique $\overset{(1)}{U}_{00}$ donne un terme nul et on obtient:

$$\frac{\overset{(2)}{\mathrm{d}m}}{\mathrm{d}t} = O\left[\frac{1}{c^2}\right],$$

résultat qui justifie une hypothèse que nous avons faite au Chapitre I [cf. la formule (1.18)].

2. - Les équations à l'ordre 2 et 3 et le flux du vecteur $\vec{S}^{(k)}$.

La i^e composante $S^{i(k)}$ du vecteur $\vec{S}^{(k)}$ s'exprime, modulo un rotationnel d'espace W_3 et en négligeant des termes d'ordre 6 en $1/c$, par:

$$-\frac{1}{2}\,(\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\;\partial_0\,\bar{g}^{0k})^i-\frac{2\,\partial_i U_{00}-\partial_k U_{00}}{c^4}=\frac{1}{c^4}\left[\frac{\partial_{ti}\,\alpha_k}{2}-2\;\partial_i\;U_{00}\,.\,\partial_k\;U_{00}\right]$$

pour $i\neq k$, et par:

$$\frac{1}{c^4}\left[\frac{\partial_{tk}\,\alpha_k}{2}+\sum_l\,(\partial_l\;U_{00})^2-2(\partial_k\;U_{00})^2\right]$$

pour $i=k$. Nous avons d'abord à calculer:

$$\text{a)}\quad\frac{1}{2c^4}\int_{\partial M_2}\partial_{ti}\,\alpha_k\,n^i\,\mathrm{d}\Sigma=\frac{1}{c^4}\,\partial_t\int_{\partial M_2}n^i\cdot(\overrightarrow{\mathrm{Grad}})_i\,\alpha_k\,\mathrm{d}\Sigma=\frac{\partial_t}{c^4}\,\mathrm{Flux}\;\;\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\;\alpha_k$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\;\;\alpha_k=\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\left[\dfrac{4Gm}{r}\;\dfrac{\mathrm{d}\xi^k}{\mathrm{d}t}\right]$.

Dans le flux, le terme correspondant à la particule M_1 est identiquement nul d'après un résultat classique, quant au terme qui provient de M_2 il donne, d'après le théorème de GAUSS et après dérivation en t,

$$-\frac{8\pi G}{c^4}\,\overset{(2)}{m}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\xi^k}{\mathrm{d}t^2}.$$

b) Il reste à calculer le flux du vecteur de composantes $\psi^{i(k)}$, $\psi^{i(k)}$ étant réduit à ses termes d'ordre 4.

α) Si $i\neq k$, on a

$$2\;\partial_i\;U_{00}\;\partial_k\;U_{00}=2\partial_i\;\overset{(1)}{U}_{00}\;\partial_k\;\overset{(1)}{U}_{00}+2\partial_i\;\overset{(1)}{U}_{00}\;\partial_k\;\overset{(2)}{U}_{00}+$$

$$+\,2\;\partial_i\;\overset{(2)}{U}_{00}\;\partial_k\;\overset{(1)}{U}_{00}+2\partial_i\;\overset{(2)}{U}_{00}\;\partial_k\;\overset{(2)}{U}_{00}\,,$$

d'après les propriétés d'addivité des fonctions harmoniques ordinaires. Par intégration sur ∂M_2, le premier terme donnera 0 en faisant tendre ϱ_2 vers 0, la fonction intégrée étant continue sur ∂M_2. Le deuxième terme conduit à l'intégrale:

$$\frac{1}{\varrho_2^4} \int_{\partial M_2} (x^i - \overset{(2)}{\xi^i})\,(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})\,\partial_i \overset{(1)}{U_{00}}\,\mathrm{d}\Sigma$$

à un coefficient multiplicatif près. Elle donne:

$$\frac{1}{(\varrho_2)^4} \int_{\partial M_2} (x^i - \overset{(2)}{\xi^i})\,(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})\,\partial_i \overset{(1)}{U_{00}}\,(\overset{(2)}{\xi^i})\,\mathrm{d}\Sigma$$

en assimilant $U_{00}(x^i)$ à $U_{00}(\overset{(2)}{\xi^i})$: on obtient ainsi un produit d'inertie qui est nul. Le troisième terme $2\partial_i \overset{(2)}{U_{00}}\,\partial_k \overset{(1)}{U_{00}}$ donne:

$$-2G\overset{(2)}{m} \int_{\partial M_2} \frac{(x^i - \overset{(2)}{\xi^i})^2}{(\varrho_2)^4}\,\partial_k \overset{(1)}{U_{00}}\,\mathrm{d}\Sigma \qquad \text{(sommer en } i,\ i \neq k\text{)},$$

ce qui conduit, en faisant tendre ϱ_2 vers 0 et en utilisant un résultat classique sur les moments d'inertie, à

$$-\frac{16\pi}{3} G\overset{(2)}{m}\,\partial_k \overset{(1)}{U_{00}}\,(\overset{(2)}{\xi_i}):$$

c'est le nombre opposé qui intervient dans le flux. Enfin le 4e terme $2\partial_i \overset{(2)}{U_{00}}\,\partial_k \overset{(2)}{U_{00}}$ donne, à un coefficient près,

$$\int_{\partial M_2} \frac{(x^i - \overset{(2)}{\xi^i})^2\,(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})}{(\varrho_2)^7}\,\mathrm{d}\Sigma \qquad (i \neq k)$$

intégrale nulle, car la fonction à intégrer est impaire sur la sphère.

β) Si $i = k$, $\sum_l (\partial_l U_{00})^2$ donne un résultat différent de 0 par le terme $\partial_i \overset{(1)}{U}_{00}\, \partial_i \overset{(2)}{U}_{00}$ seulement. Ce terme conduit à:

$$-2G \overset{(2)}{m} \int_{\partial M_2} \frac{(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})(x^l - \overset{(2)}{\xi^l})}{(\varrho_2)^4}\, \partial_l \overset{(1)}{U}_{00}\, \mathrm{d}\Sigma \qquad \text{(sommer en } l\text{)},$$

mais seul $l = k$ donne un terme différent de 0:

$$-8\,\frac{\pi G}{3}\, \overset{(2)}{m}\, \partial_k \overset{(1)}{U}_{00}\, (\overset{(2)}{\xi_i}).$$

Enfin, avec $-2(\partial_k U_{00})^2$ le seul terme à considérer est

$$-4\partial_k \overset{(1)}{U}_{00}\, \partial_k \overset{(2)}{U}_{00}\,,$$

qui donne:

$$4G \overset{(2)}{m} \int_{\partial M_2} \frac{(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})^2}{(\varrho_2)^4}\, \partial_k \overset{(1)}{U}_{00}\, \mathrm{d}\Sigma \qquad (k \text{ fixé}),$$

soit en faisant tendre ϱ_2 vers 0:

$$\frac{16}{3}\, \pi G \overset{(2)}{m}\, \partial_k \overset{(1)}{U}_{00}\, (\overset{(2)}{\xi^i}).$$

Par addition des termes trouvés il vient, après réduction,

$$\overset{(2)}{m}\, \frac{\mathrm{d}^2 \overset{(2)}{\xi^k}}{\mathrm{d}t^2} = \overset{(1)}{m}\, \overset{(2)}{m}\, G \cdot \left[\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\, \frac{1}{M_1 M_2}\right]^k,$$

le gradient étant calculé relativement aux coordonnées de M_2. C' est bien la loi de NEWTON.

CHAPITRE III.

LES ÉQUATIONS DU MOUVEMENT DES PARTICULES CHARGÉES.

Nous allons montrer dans ce Chapitre, que contrairement à l'avis de beaucoup d'auteurs, les équations du champ unitaire donnent la loi du mouvement des particules chargées.

Nous supposons maintenant avec les hypothèses du Chapitre I que les coefficients $g_{\alpha\beta}$ ne sont plus symétriques. $P_{(\alpha\beta)}$ désigne la partie symétrique du tenseur de Ricci à vecteur de torsion nul. Nous rappelons la formule (2.2):

$$m^{\lambda\sigma}\, l^{\varrho\nu} \sum_{pc} \partial_\lambda P_{[\varrho\sigma]} + P_{(\varrho\sigma)}\, [-2\, l^{\lambda\sigma}\, \partial_\lambda l^{\varrho\nu} + 2 L^{\mu}_{\mu\lambda}\, l^{\varrho\nu}\, l^{\lambda\sigma} + \partial_\lambda (l^{\varrho\sigma}\, l^{\lambda\nu})] + 2\, \partial_\lambda \mathfrak{S}^{\lambda\nu} = 0,$$

où nous avons posé:

$$l^{\varrho\nu}\, l^{\lambda\sigma}\, P_{(\varrho\sigma)} = \mathcal{S}^{\lambda\nu}, \qquad l^{\sigma\mu}\, P_{(\sigma\mu)} = \mathcal{S}, \qquad \mathfrak{S}^{\lambda\nu} = \mathcal{S}^{\lambda\nu} - \frac{1}{2}\, l^{\lambda\nu}\, \mathcal{S}\,.$$

Comme au Chapitre II nous voyons que, compte-tenu de la vérification des équations du champ à l'ordre 2 et 3,

$$\partial_\lambda \mathfrak{S}^{\lambda\nu} = O\left[\frac{1}{c^6}\right]. \tag{3.1}$$

Dès lors tous les résultas établis plus haut (Chapitre II, nn. **2** à **4** inclus) subsistent en remplaçant partout g^{ij} par l^{ij} et $\overset{*}{g}{}^{ij}$ par $\overset{*}{l}{}^{ij}$. Nous prendrons pour équations du mouvement des particules chargées:

$$\text{Flux}^*{}_{\partial c^3} \overrightarrow{\mathfrak{S}}{}^{(\alpha)} = 0\,.$$

Mais nous allons faire ici une remarque importante: nous allons montrer que dans le calcul approché à un ordre quelconque, toute modification de la métrique portant sur les termes d'ordre supérieur à 3 est sans influence sur $\mathfrak{S}^{\alpha\beta}$ et sur le flux lui-même, ce qui fait que l'on pourra remplacer partout $l^{\alpha\beta}$ par $h^{\alpha\beta}$, $\overset{*}{l}{}^{\alpha\beta}$ par $\overset{*}{h}{}^{\alpha\beta}$.

Posons

$$l^{\alpha\beta} = a^{\alpha\beta} + O\left[\frac{1}{c^4}\right],$$

$$\mathfrak{S}^{\alpha\beta} = \mathfrak{F}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} l^{\alpha\beta}\, \mathfrak{F} = l^{\alpha\mu} l^{\beta\nu} P_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2} l^{\alpha\beta} l^{\mu\nu} P_{(\mu\nu)} =$$

$$= \left[h^{\alpha\mu} + O\left[\frac{1}{c^4}\right]\right] \left[h^{\beta\nu} + O\left[\frac{1}{c^4}\right]\right] P_{(\mu\nu)} - \frac{1}{2}\left[h^{\alpha\beta} + O\left[\frac{1}{c^4}\right]\right] \left[h^{\mu\nu} + O\left[\frac{1}{c^4}\right]\right] P_{(\mu\nu)}.$$

Dans le calcul de flux de $\vec{\mathfrak{S}}^{(0)}$ à l'ordre 3 en $\frac{1}{c}$, $P_{(\mu\nu)}$ est nul à l'ordre 2, l'erreur commise en remplaçant $l^{\alpha\beta}$ par $a^{\alpha\beta}$ dans $\vec{\mathfrak{S}}^{(0)}$ est d'ordre 7.

Dans le calcul du flux de $\vec{\mathfrak{S}}^{(i)}$ à l'ordre 4, $P_{(\mu\nu)}$ est nul à l'odre 3, l'erreur dans $\vec{\mathfrak{S}}^{(i)}$ est d'ordre 8.

De manière générale quand le flux est calculé à l'ordre m, $P_{(\mu\nu)}$ commence par des termes du même ordre et l'erreur dans $\vec{\mathfrak{S}}^{(\alpha)}$ est d'ordre $m + 4$, donc négligeable.

Une nouvelle erreur s'introduit dans le calcul du flux, l^{*ij} étant remplacé par $\overset{*}{a}{}^{ij}$ mais elle est aussi négligeable, les deux tenseurs étant pris dans l'un et l'autre cas égaux à δ^{ij}.

Nous poserons donc:

$$\mathfrak{S}^{*i(\alpha)} = h^{i\mu}\, h^{\alpha\nu}\, P_{(\mu\nu)} - (1/2)\, h^{i\alpha}\, h^{\mu\nu}\, P_{(\mu\nu)}$$

et c'est le flux du vecteur $\vec{\mathfrak{S}}^{*(\alpha)}$ que nous considererons, les coordonnées étant isothermes relativement à $h_{\alpha\beta}$.

Rappelons une formule établie au Chapitre I:

$$(3.2)\qquad P_{(\mu\nu)} = R_{\mu\nu} + U^{\lambda}_{\mu\nu}\, U_\lambda - (U^{\lambda}_{\mu\varrho}\, U^{\varrho}_{\lambda\nu} + S^{\lambda}_{\mu\varrho}\, S^{\varrho}_{\lambda\nu}) + \overset{h}{\nabla}_\varrho U^{\varrho}_{\mu\nu} - (1/2)\,(\overset{h}{\nabla}_\nu U_\mu + \overset{h}{\nabla}_\mu U_\nu),$$

où $R_{\mu\nu}$ désigne le tenseur de Ricci de $h_{\alpha\beta}$ et

$$U^{\nu}_{\lambda\mu} = (S^{\sigma}_{\mu\varrho}\, k_{\sigma\lambda} + S^{\sigma}_{\lambda\varrho})\, h^{\nu\varrho}, \qquad U_\lambda = U^{\sigma}_{\lambda\sigma}.$$

Nous poserons:

$$P_{(\mu\nu)} = R_{\mu\nu} + A_{\mu\nu} \,,$$

$$\mathfrak{S}^{*i(k)} = h^{i\mu} h^{k\nu} R_{\mu\nu} - (1/2)\, h^{ik} h^{\mu\nu} R_{\mu\nu} + h^{i\mu} h^{k\nu} A_{\mu\nu} - (1/2)\, h^{ik} h^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \,,$$

(3.3) $$\mathfrak{S}^{*i(k)} = S^{i(k)} + (h^{i\mu} h^{k\nu} - (1/2)\, h^{ik} h^{\mu\nu}) A_{\mu\nu} \,;$$

$S^{\alpha\beta}$ désigne le tenseur d'EINSTEIN de l'espace riemannien muni de la métrique $h_{\alpha\beta}$.

Notons que $S^{i(k)}$ donnera lieu aux mêmes calculs que plus haut. $g_{\alpha\beta}$ étant remplacé partout par $h_{\alpha\beta}$. Quant à $A_{\mu\nu}$ sa structure montre qu'il ne fait intervenir dans le calcul du flux à l'ordre $2n+2$ que les coefficients des potentiels déjà calculés d'ordre au plus égal à $2n$ et $2n+1$.

Il nous faut simplement calculer les coefficients $A_{\mu\nu}$.

1. - Calcul de $\mathfrak{S}^{*i(k)}$ à l'ordre 4.

Tous les termes de $A_{\mu\nu}$ sont au moins d'ordre 4 en $1/c$. L'ordre de grandeur des coefficients montre que:

$$\mathfrak{S}^{*i(k)} = S^{i(k)} + A_{i(k)} + \frac{1}{2}\, \delta^{i(k)} (A_{00} - A_{11} - A_{22} - A_{33}) + O\left[\frac{1}{c^6}\right],$$

(3.4) $$A_{ik} = - S^{l}_{ir} S^{r}_{lk} + \partial_r U^{r}_{ik} - \frac{1}{2} (\overset{h}{\underset{k}{\nabla}} U_i + \overset{h}{\nabla}_i U_k) + O\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

Ce qui nous conduit au calcul de 3 termes.

a) *Calcul de* $(1/2)\, (\overset{h}{\underset{k}{\nabla}} U_i + \overset{h}{\underset{i}{\nabla}} U_k)$. Nous savons que [**24**]:

$$L^{\varrho}_{k\varrho} = \left\{ {\varrho \atop k\varrho} \right\}_h + U_k = \frac{1}{2}\, \partial_k \log |g| = \frac{1}{2}\, \partial_k \log |h| + U_k \,,$$

donc:

$$U_k = \frac{1}{2}\, \partial_k \log \left| \frac{g}{h} \right| , \qquad \frac{1}{2} (\overset{h}{\underset{k}{\nabla}} U_i + \overset{h}{\underset{i}{\nabla}} U_k) = \frac{1}{2}\, \partial_{ki} \log \left| \frac{g}{h} \right| + O\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

Mais on peut écrire [24]:

$$g = h + k + \frac{h}{2} k_{\alpha\beta} k_{\varrho\sigma} h^{\alpha\varrho} h^{\beta\sigma}.$$

ce qui donne

$$\frac{g}{h} = 1 + \frac{1}{2} \sum_{i,k} \frac{\beta_{ik}^2}{c^4} + O\left[\frac{1}{c^6}\right] = 1 + \frac{1}{c^4} \sum_i (\beta_i')^2 + O\left[\frac{1}{c^6}\right],$$

d'où

$$\frac{1}{2} (\overset{h}{\underset{k}{\nabla}} U_i + \overset{h}{\underset{i}{\nabla}} U_k) = \frac{1}{2c^4} \partial_{ki} \sum_l (\beta_l')^2 + O\left[\frac{1}{c^6}\right].$$

b) *Calcul de* $\partial_r U^r_{ik}$. On trouve:

$$\partial_r \underset{(4)}{U^r_{ik}} = -(1/2) \sum_{r,s} [\partial_{r2} \beta_{ks} \beta_{is} + \partial_r \beta_{is} (\partial_k \beta_{sr} - \partial_s \beta_{rk}) + \partial_r \beta_{ks} (\partial_i \beta_{sr} - \partial_s \beta_{ri})].$$

c) *Calcul de* $S^l_{ir} S^r_{lk}$. Il vient après quelques calculs faciles:

$$\underset{(2)}{S^l_{ir}} \underset{(2)}{S^r_{lk}} = (1/4) \sum_{r,l} [\partial_i \beta_{rl} \partial_k \beta_{rl} + 2 \partial_r \beta_{li} (\partial_l \beta_{kr} - \partial_r \beta_{lk})].$$

En réunissant tous ces résultats et prenant par exemple $i = 1$, $k = 2$, on trouve, tenant compte de $\overrightarrow{\text{Rot}}\, \vec{\beta}' = 0$,

$$\partial_r \underset{(4)}{U^r_{12}} = -3 \partial_1 \beta_2' \cdot \partial_3 \beta_3' + 3 \partial_3 \beta_1' \cdot \partial_3 \beta_2' + \frac{\Delta (\beta_1' \beta_2')}{2},$$

$$\underset{(2)}{S^l_{1r}} \underset{(2)}{S^r_{l2}} = 2 \partial_1 \beta_3' \partial_2 \beta_3' + \partial_2 \beta_1' (\partial_1 \beta_1' + \partial_2 \beta_2' - \partial_3 \beta_3'),$$

$$(3.5) \qquad \underset{(4)}{\mathfrak{S}^{*1(2)}} = \underset{(4)}{S^{1(2)}} - (\partial_{12}/2) \sum_i (\beta_i')^2 + \partial_1 \beta_3' \partial_2 \beta_3' - \\ - \partial_2 \beta_1' (\partial_1 \beta_1' + \partial_2 \beta_2' + 2 \partial_3 \beta_3') + (1/2) \Delta (\beta_1' \beta_2')$$

et de même:

$$(3.6) \qquad \underset{(4)}{\mathfrak{S}^{3(2)}} = \underset{(4)}{S^{3(2)}} - (\partial_{32}/2) \sum_i (\beta_i')^2 + \partial_3 \beta_1' \partial_2 \beta_1' - \\ - \partial_2 \beta_3' (\partial_2 \beta_2' + \partial_3 \beta_3' + 2 \partial_1 \beta_1') + (1/2) \Delta (\beta_2' \beta_3').$$

Calculons enfin $\mathfrak{S}^{*2(2)} = S^{2(2)} + (1/2)\,(A_{22} - A_{11} - A_{33}) + O(1/c^6)$.

On a:

$$\underset{(4)}{\partial_r U^r_{11}} = -(1/2)\,\Delta\,[(\beta_2')^2 + (\beta_3')^2] + (\partial_1 \beta_3')^2 + (\partial_1 \beta_2')^2 - $$
$$- 2\,(\partial_2 \beta_3')^2 - \partial_2 \beta_2'\, \partial_1 \beta_1' - \partial_3 \beta_3'\, \partial_1 \beta_1' + 2\, \partial_3 \beta_3'\, \partial_2 \beta_2',$$

$$\underset{(2)}{S^l_{1r}}\, \underset{(2)}{S^r_{l1}} = -2\,(\partial_2 \beta_3') + \frac{(\partial_1 \beta_1')^2 - (\partial_2 \beta_2' - \partial_3 \beta_3')^2}{2},$$

$$\underset{(4)}{A_{11}} = -\frac{\Delta}{2}\,[(\beta_2')^2 + (\beta_3')^2] + (\partial_1 \beta_3')^2 + (\partial_1 \beta_2')^2 - \frac{(\partial_1 \beta_1')^2 - (\partial_2 \beta_2')^2 - (\partial_3 \beta_3')^2}{2} -$$
$$- \partial_2 \beta_2'\, \partial_1 \beta_1' - \partial_3 \beta_3'\, \partial_1 \beta_1' + \partial_2 \beta_2'\, \partial_3 \beta_3' - (1/2)\, \partial_{11} \sum_i (\beta_i')^2,$$

$$(3.7)\quad \underset{(4)}{\mathfrak{S}^{*2(2)}} = \underset{(4)}{S^{2(2)}} + (1/2).\left\{\begin{array}{l} \Delta\,(\beta_2')^2 - 2\,(\partial_1 \beta_3')^2 - (3/2)\,(\partial_2 \beta_2')^2 + \dfrac{(\partial_1 \beta_1')^2 + (\partial_3 \beta_3')^2}{2} + \\ + 3\,\partial_3 \beta_3'\, \partial_1 \beta_1' - \partial_2 \beta_2'\, \partial_3 \beta_3' - \partial_1 \beta_1'\, \partial_2 \beta_2' + \\ + (1/2)\, \partial_{11} \sum\limits_i (\beta_i')^2 + (1/2) \sum\limits_i [\partial_{33} (\beta_i')^2 - \partial_{22} (\beta_i')^2]. \end{array}\right.$$

2. - Calcul effectif du flux de $\overrightarrow{\mathfrak{S}}^{*(k)}$ à l'ordre 4.

Ce flux est la somme du flux de $\overrightarrow{S}^{(k)}$ que l'on a déjà calculé et du flux d'un deuxième vecteur que nous allons évaluer.

Comme au Chapitre II nous remarquerons que:

$$\text{Flux}^*_{\partial M_2} \overrightarrow{\mathfrak{S}}^{*(k)} = -\int_{\partial M_2} \mathfrak{S}^{*k(i)}\, n^i\, d\Sigma \qquad \text{(sommer en } i\text{)},$$

en négligeant des termes d'ordre supérieur à 4.

Nous allons calculer l'intégrale:

$$\int_{\partial M_2} \mathfrak{S}^{*k(i)}\, n^i\, d\Sigma .$$

Rappelons que nous avons choisi plus haut:

$$\vec{\beta}' = \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\varphi, \qquad \varphi = A/r + Br^2 + Cr, \qquad r^2 = \sum_i (x^i - \xi^i)^2,$$

$$\Delta\varphi = 6B + 2\,C/r,$$

$$\beta'_i = \partial_i\,\varphi = -\frac{A\,(x^i - \xi^i)}{r^3} + 2B\,(x^i - \xi^i) + \frac{C\,(x^i - \xi^i)}{r} = \lambda(x^i - \xi^i),$$

$$\partial_k\,\beta'_i = \delta_{ki}\,\lambda + \frac{\partial\lambda}{\partial r}\,\frac{(x^k - \xi^k)\,(x^i - \xi^i)}{r} \qquad \text{avec } \lambda = -A/r^3 + 2B + C/r\,.$$

Nous avons comme au Chapitre II à considérer des termes relatifs à la particule M_1 (ils donnent 0 quand $\varrho_2 \to 0$), des termes relatifs à M_2 et des termes « croisés ».

Une remarque nous permettra de conclure que certaines intégrales sont nulles.

Considérons dans $\mathfrak{S}^{*(ik)}$ les termes qui contiennent des produits de deux dérivées $\partial_k\,\beta'_i$ distinctes ou confondues (termes quadratiques) et montrons que ces termes donnent 0 dans le calcul du flux.

En effet, les termes relatifs à M_2 de $\mathfrak{S}^{*\,i(k)}$ seront multiplés par

$$(x^i - \overset{(2)}{\xi^i})/\varrho_2 \qquad\qquad \text{(composantes de } n^i\text{)}$$

et on obtiendra des expressions impaires sur le champ d'intégration. En ce qui concerne les termes croisés on aura à intégrer le produit d'expressions impaires par des fonctions qui sont considérées comme constantes sur M_2 — leur valeur étant celle que l'on trouve au centre de la particule M_2 — le résultat sera également nul.

Nous avons donc à calculer simplement pour $\vec{\mathfrak{S}}^{*(2)}$ le flux du vecteur dont les composantes sont respectivement:

$$(1/2)\,\Delta(\beta'_1\,\beta'_2) - (1/2)\,\partial_{12}\sum_i(\beta'_i)^2\,,$$

$$(1/2)\,\Delta\,(\beta'_2)^2 + (1/4)\,\partial_{11}\sum_i(\beta'_i)^2 + (1/4)\,\partial_{33}\sum_i(\beta'_i)^2 - (1/2)\sum_i\partial_{22}\,(\beta'_i)^2\,,$$

$$(1/2)\,\Delta\,(\beta'_2\,\beta'_3) - (1/2)\,\partial_{32}\sum_i(\beta'_i)^2\,.$$

Ce calcul se décompose ainsi: A) flux du vecteur $(1/2)\,\Delta\,(\beta_2'\cdot\vec{\beta}')$; B) flux du vecteur $-(1/2)\ \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\ \partial_2 \sum_i (\beta_i')^2$; C) flux du vecteur $[0,\,(1/4)\,\Delta \sum_i (\beta_1')^2,\ 0]$.

A) *Flux de vecteur* $(1/2\,\Delta)\,(\beta_2'\cdot\vec{\beta'})$. On a :

$$(1/2)\,\Delta\,(\beta_2'\cdot\beta_k') = (1/2)\,(\Delta\,\beta_2')\cdot(\beta_k') + (1/2)\,(\Delta\beta_k')\,\beta_2' + \sum_i \partial_i\,\beta_2'\cdot\partial_i\,\beta_k'\,,$$

où le dernier terme donne 0 d'apres la remarque sur les termes quadratiques, et

$$\Delta\beta_k' = -\,2C\,(x^k - \xi^k)/r^3.$$

α) *Termes relatifs à* M_2 : ils sont nuls d'après la remarque faite plus haut.
β) *Termes croisés* $(1/2)\,(\Delta\beta_k')\,\beta_2'$ donne:

$$(1/2)\int_{\partial M_2} \overset{(2)}{\beta_2'}\cdot\Delta\overset{(1)}{\beta_k'}\cdot n^k\,\mathrm{d}\Sigma + (1/2)\int_{\partial M_2} \overset{(1)}{\beta_2'}\,\Delta\overset{(2)}{\beta_k'}\,n^k\,\mathrm{d}\Sigma =$$

$$= -\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{\lambda}\int_{\partial M_2}\sum_k \frac{(x^k - \overset{(1)}{\xi_k})\,(x^k - \overset{(2)}{\xi_k})\,(x^2 - \overset{(2)}{\xi_2})}{\varrho_2\,\overset{(1)}{r^3}}\,\mathrm{d}\Sigma - \overset{(2)}{C}\int_{\partial M_2}\lambda(x^2 - \overset{(1)}{\xi^2})\sum_k\frac{(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})^2}{(\varrho_2)^4}\,\mathrm{d}\Sigma.$$

Mais nous assimilons

$$x^k - \overset{(1)}{\xi^k} \quad \text{à} \quad \overset{(2)}{\xi^k} - \overset{(1)}{\xi^k}, \qquad \overset{(1)}{r} \quad \text{à} \quad M_1\,M_2\,,$$

et on obtient donc, en faisant tendre ϱ_2 vers 0,

$$\frac{4\pi}{3}\,\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{A}\,\frac{\overset{(2)}{\xi^2} - \overset{(1)}{\xi^2}}{(M_1\,M_2)^3} - 4\pi\overset{(2)}{C}\left[\frac{-\overset{(1)}{A}}{(M_1\,M_2)^3} + 2\,\overset{(1)}{B} + \frac{\overset{(1)}{C}}{M_1\,M_2}\right](\overset{(2)}{\xi^2} - \overset{(1)}{\xi^2}),$$

$(1/2)\,(\Delta\beta_2')\,\beta_k'$ donne:

$$(1/2)\int_{\partial M_2}\overset{(2)}{\beta_k'}\cdot\Delta\,\overset{(1)}{\beta_1'}\,n^k\,\mathrm{d}\Sigma + (1/2)\int_{\partial M_2}\overset{(1)}{\beta_k'}\cdot\Delta\,\overset{(2)}{\beta_2'}\,n^k\,\mathrm{d}\Sigma =$$

$$= -\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{\lambda}\int_{\partial M_2}\sum_k\frac{(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})^2\,(x^2 - \overset{(1)}{\xi^2})}{\varrho_2\,\overset{(1)}{r^3}}\,\mathrm{d}\Sigma - \overset{(2)}{C}\int_{\partial M_2}\overset{(1)}{\lambda}\sum_k\frac{(x^k - \overset{(1)}{\xi^k})\,(x^k - \overset{(2)}{\xi^k})\,(x^2 - \overset{(2)}{\xi^2})}{(\varrho_2)^4}\,\mathrm{d}\Sigma,$$

ce qui donne, quando $\varrho_2 \to 0$,

$$\frac{4\pi}{3}\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{A}\,\frac{\overset{(2)}{\xi_2}-\overset{(1)}{\xi_2}}{(M_1\,M_2)^3}-\frac{4\pi \overset{(2)}{C}}{3}\left[\frac{-\overset{(1)}{A}}{(M_1\,M_2)^3}+2\overset{(1)}{B}+\frac{\overset{(1)}{C}}{M_1\,M_2}\right](\overset{(2)}{\xi^2}-\overset{(1)}{\xi^2}).$$

B) *Flux du vecteur* — $(1/2)\,\overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\partial_2 \sum_i (\beta'_i)^2$. α) *Termes relatifs à* M_2 : ils sont nuls d'après une remarque faite. β) *Termes croisés*

$$-\int_{\partial M_2}\sum_i \partial_{i2}\Big(\sum_k \overset{(2)}{\beta'_k}\cdot\overset{(1)}{\beta'_k}\Big)\frac{x^i-\overset{(2)}{\xi^i}}{\varrho_2}\,\mathrm{d}\Sigma\,.$$

Seul $k=2$ donne un terme non nul:

$$\left[\lim_{\varrho_2\to 0} -\int_{\partial M_2}\sum_i \partial_{i2}\,\overset{(2)}{\beta'_2}\cdot\frac{x^i-\overset{(2)}{\xi^i}}{\varrho_2}\,\mathrm{d}\Sigma\right]\cdot\overset{(1)}{\beta'_2}\,,$$

$$\overset{(2)}{\beta'_2}=\overset{(2)}{\lambda}\,(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})\qquad (\text{avec } r=\varrho_2),$$

$$\partial_{i2}\,\overset{(2)}{\beta'_2}=\frac{\mathrm{d}\overset{(2)}{\lambda}}{\mathrm{d}r}\,\frac{(x^i-\overset{(2)}{\xi^i})}{r}-\frac{\mathrm{d}\overset{(2)}{\lambda}}{\mathrm{d}r}\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})\,(x^i-\overset{(2)}{\xi^i})}{r^3}+2\;\delta_{ir}\,\frac{\mathrm{d}\overset{(2)}{\lambda}}{\mathrm{d}r}\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})}{r}+$$

$$+\frac{\mathrm{d}^2\,\overset{(2)}{\lambda}}{\mathrm{d}r^2}\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})^2(x^i-\overset{(2)}{\xi^i})}{r^2}\qquad (\text{avec } r=\varrho_2)\,.$$

Multipliant par $(x^i-\overset{(2)}{\xi^i})/\varrho_2$ et sommant en i, on obtient:

$$\frac{\mathrm{d}\overset{(2)}{\lambda}}{\mathrm{d}r}+\frac{\mathrm{d}\overset{(2)}{\lambda}}{\mathrm{d}r}\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})^2}{r^2}+\frac{\mathrm{d}^2\,\overset{(2)}{\lambda}}{\mathrm{d}r^2}\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})^2}{r}\qquad (\text{avec } r=\varrho_2),$$

de sorte que nous avons à calculer

$$-\overset{(1)}{\beta'_2}\int_{\partial M_1}\left[\frac{d\overset{(2)}{\lambda}}{dr}+\frac{d\overset{(2)}{\lambda}}{dr}\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})^2}{r^2}+\frac{d^2\overset{(2)}{\lambda}}{dr^2}\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})^2}{r}\right]d\Sigma \qquad (\text{avec } r=\varrho_2),$$

où

$$\frac{d\overset{(2)}{\lambda}}{dr}=\frac{3\overset{(2)}{A}}{(\varrho_2)^4}-\frac{\overset{(2)}{C}}{(\varrho_2)^2}\,, \qquad \frac{d^2\overset{(2)}{\lambda}}{dr^2}=-\frac{12\,\overset{(2)}{A}}{(\varrho_2)^5}+\frac{2\overset{(2)}{C}}{(\varrho_2)^3}\,.$$

On obtient finalement

$$\frac{8\pi\overset{(2)}{C}}{3}\left[\frac{-\overset{(1)}{A}}{(M_1\,M_2)^3}+2\,\overset{(1)}{B}+\frac{\overset{(1)}{C}}{M_1\,M_2}\right](\overset{(2)}{\xi^2}-\overset{(1)}{\xi^2}).$$

C) *Flux du vecteur* $[0,\ (1/4)\,\Delta\sum_i(\beta'_i)^2,\ 0]$. α) *Termes relatifs à* M_2:

$$\frac{1}{4}\int_{\partial M_2}\Delta\sum_i(\overset{(2)}{\beta'_i})^2\,\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})}{\varrho_2}\,d\Sigma \quad \text{avec } \Delta\sum_i(\overset{(2)}{\beta'_i})^2=2\sum_i\overset{(2)}{\beta'_i}\times\Delta\,\overset{(2)}{\beta'_i}+2\sum_{ik}(\partial_k\,\beta'_i)^2$$

ce qui donne zéro par intégration. β) *Termes croisés*:

$$\frac{1}{2}\int_{\partial M_2}\Delta\sum_i(\overset{(1)}{\beta'_i})\,(\overset{(2)}{\beta'_i})\,\frac{x^2-\overset{(2)}{\xi_2}}{\varrho_2}\,d\Sigma\,;$$

en formant le laplacien on obtient un terme quadratique nul par intégration et deux termes qui donnent, quand $\varrho_2\to 0$ $(i=2)$,

$$-\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{\lambda}\,\frac{\overset{(2)}{\xi_2}-\overset{(1)}{\xi^2}}{(M_1\,M_2)^3}\int_{\partial M_2}\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})^2}{\varrho_2}\,d\Sigma, \qquad -\overset{(2)}{C}\,\overset{(1)}{\lambda}\,(\overset{(2)}{\xi^2}-\overset{(1)}{\xi^2})\int_{\partial M_2}\frac{(x^2-\overset{(2)}{\xi^2})^2}{(\varrho_2)^4}\,d\Sigma\,,$$

soit finalement:

$$\frac{4\pi \overset{(1)}{C}}{3} \overset{(2)}{A} \frac{\overset{(2)}{\xi^2} - \overset{(1)}{\xi^2}}{(M_1\, M_2)^3} - \frac{4\pi \overset{(2)}{C}}{3} \left[\frac{-\overset{(1)}{A}}{(M_1\, M_2)^3} + 2\, \overset{(1)}{B} + \frac{\overset{(1)}{C}}{M_1\, M_2} \right] (\overset{(2)}{\xi^2} - \overset{(1)}{\xi^2}) \,.$$

En additionnant tous les résultats trouvés on obtient:

$$4\,\pi\,(\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{A} + \overset{(2)}{C}\,\overset{(1)}{A}) \frac{\overset{(2)}{\xi^2} - \overset{(1)}{\xi^2}}{(M_1\, M_2)^3} \qquad - 8\,\pi\, \overset{(2)}{C}\, \overset{(1)}{B}\, (\overset{(2)}{\xi^2} - \overset{(1)}{\xi^2}) \qquad - 4\,\pi\, \overset{(1)}{C}\, \overset{(2)}{C} \frac{(\overset{(2)}{\xi^2} - \overset{(1)}{\xi^2})}{M_1\, M_2}.$$

Si nous tenons compte du terme provenant de $S^{i(2)}$ nous trouverons après simplification par $8\pi G$ et réduction de termes:

$$\overset{(2)}{m} \frac{\mathrm{d}^2\, \overset{(2)}{\xi^k}}{\mathrm{d}t^2} = - \overset{(1)}{m}\, \overset{(2)}{m}\, G \frac{\overset{(2)}{\xi^k} - \overset{(1)}{\xi^k}}{(M_1\, M_2)^3} + \frac{\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{A} + \overset{(2)}{C}\,\overset{(1)}{A}}{2G} \frac{(\overset{(2)}{\xi^k} - \overset{(1)}{\xi^k})}{(M_1\, M_2)^3} - \frac{\overset{(2)}{C}\ \overset{(1)}{B}}{G} (\overset{(2)}{\xi^k} - \overset{(1)}{\xi^k}) - \frac{\overset{(1)}{C}\ \overset{(2)}{C}}{2G} \frac{\overset{(2)}{\xi^k} - \overset{(1)}{\xi^k}}{M_1\, M_2},$$

$$\overset{(2)}{m} \frac{\mathrm{d}^2\, \overrightarrow{M_2}}{\mathrm{d}t^2} = \overset{(1)}{m}\, \overset{(2)}{m}\, G \cdot \overrightarrow{\mathrm{Grad}} \frac{1}{M_1\, M_2} - \frac{\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{A} + \overset{(2)}{C}\,\overset{(1)}{A}}{2G} \overrightarrow{\mathrm{Grad}} \frac{1}{M_1\, M_2} - \frac{\overset{(2)}{C}\ \overset{(1)}{B}}{G} \overrightarrow{M_1\, M_2} - \frac{\overset{(1)}{C}\ \overset{(2)}{C}}{2G} \frac{\overrightarrow{M_1\, M_2}}{M_1\, M_2},$$

les opérateurs étant ceux de l'espace euclidien ordinaire et les gradients étant calculés en $M_2\,(\overset{(2)}{\xi^i})$. CLAUSER a obtenu ce résultat par une méthode entièrement différente [5] ainsi que TREDER [26].

3. - Interprétation finale.

Nous avons posé plus haut: $2KC = -e$ (voir Chapitre I) et

$$\underset{(0)}{\vec{E}} = -e\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}} \frac{1}{r}, \qquad \overset{(1)}{C} = -\frac{e_1}{2K};$$

posons maintenant :

$$\overset{(1)}{A} = -2Ke_1\, G, \qquad \overset{(2)}{A} = -2Ke_2\, G\,.$$

Alors $\dfrac{\overset{(1)}{C}\,\overset{(2)}{A} + \overset{(2)}{C}\,\overset{(1)}{A}}{2G} = e_1\, e_2$. Il semble indiqué de choisir $B = 0$ à cause de la nature de l'avant dernier terme: $-\dfrac{\overset{(2)}{C}\;\overset{(1)}{B}}{G}\,\overrightarrow{M_1\, M_2}$. C'est aussi ce que font CLAUSER [5] et TREDER [26]. Nous obtenons dès lors:

$$\boxed{\overset{(2)}{m}\,\frac{\mathrm{d}^2\,\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t^2} = \overset{(1)}{m}\,\overset{(2)}{m}\, G\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\frac{1}{r} - e_1\, e_2\, \overrightarrow{\mathrm{Grad}}\,\frac{1}{r} - \frac{\overset{(1)}{C}\;\overset{(2)}{C}}{2G}\,\frac{\overrightarrow{M_1\, M_2}}{r}} \qquad (r = M_1\, M_2)\,,$$

où nous notons la présence inattendue du dernier terme, force constante en module, ce terme est acceptable si l'on suppose que les coefficients $\overset{(1)}{C}$ et $\overset{(2)}{C}$ sont petits.

(Continua)

* * *