Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 243-248

LUIGI MERLI (*)

Una nuova formula di interpolazione. (**)

1. - Introduzione.

È noto che le formule di interpolazione di LAGRANGE presentano una anomalia nel loro comportamento, riguardo alla convergenza verso la funzione continua che si interpola, che fu messa in evidenza per la prima volta da G. FABER e S. BERNSTEIN [1].

Molte moderne formule di interpolazione sono state escogitate nell'intento di eliminare tale anomalia. Anche la classica formula di interpolazione di HERMITE si presta a tale scopo; ma dal punto di vista del calcolo numerico la formula di interpolazione di LAGRANGE rimane sempre quella più semplice ad usarsi.

Scopo di questa Nota è di costruire una nuova formula di interpolazione che dal punto di vista numerico ha gli stessi pregi di quella di LAGRANGE e che elimina d'altra parte la ricordata anomalia di FABER e BERNSTEIN.

Dimostreremo infatti un teorema di equicomportamento, dal punto di vista della convergenza, di tale procedimento di interpolazione, con quello classico di HERMITE.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica « U. Dini », Università, Firenze, Italia.

(**) Ricevuto il 20-V-1962.

Lavoro eseguito nell'ambito del Gruppo di Ricerca n. 6 del Comitato per la Matematica del C.N.R., per l'anno 1961-62.

(1) G. FABER, *Über die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen*, Jahr. Math. Ver. **23** (1914), 192-210; S. BERNSTEIN, *Quelques remarques sur l'interpolation*, Comm. Soc. Math. Karkoff **14** (1914) 114-122.

2. - Costruzione della nuova formula di interpolazione.

Siano assegnati, nell'intervallo (a, b), i punti

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$$

e siano

$$f(x_1), \quad f(x_2), \quad \dots, \quad f(x_n)$$

le corrispondenti ordinate assegnate in tali punti.

Sia h $(h > 0)$ un numero più piccolo della minima ampiezza degli intervalli in cui viene diviso (a, b) dai punti dati e costruiamo il polinomio di LAGRANGE relativo ai punti

$$x_1, \quad x_1 + h, \quad x_2, \quad x_2 + h, \quad \dots, \quad x_n, \quad x_n + h,$$

nei quali supporremo assegnati i valori

$$f(x_1), \quad f(x_1), \quad f(x_2), \quad f(x_2), \quad \dots, \quad f(x_n), \quad f(x_n),$$

rispettivamente (²).

Esso sarà dato dalla formula

$$(1) \quad P_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \frac{\omega_n(x)\, \omega_n(x-h)}{\omega_n'(x_k)} \left[\frac{1}{(x - x_k)\, \omega_n(x_k - h)} + \frac{1}{(x - x_k - h)\omega_n\,(x_k + h)} \right],$$

avendo posto

$$\omega_n(x) = (x - x_1)\,(x - x_2) \dots (x - x_n)\,.$$

Tale polinomio (1) risulta di grado $\leqslant 2n - 1$ e se $f(x)$ è una funzione continua, assegnata in (a, b), esso ne è il polinomio interpolante, assumendo nei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ i valori $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$.

Se avessimo costruito il polinomio di LAGRANGE che nei punti $x_1, x_2, \dots, x_n$ prende i valori $f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)$, avremmo ottenuto un polinomio di grado

(²) Si noti che h dipende dalla divisione scelta e perciò da n [cfr. la (8) del testo].

$\leqslant n-1$, anch'esso interpolante la $f(x)$ negli stessi punti, ma che non si presta all'approssimazione della $f(x)$ per il ricordato fenomeno di FABER e BERNSTEIN.

Faremo ora vedere che la formula (1), sfruttando l'opportuno innalzamento del grado, permette di risolvere il problema dell'approssimazione: daremo, infatti, un teorema di equicomportamento con la formula di HERMITE, pure essa di grado $\leqslant 2n-1$,

$$H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \left[\frac{\omega_n(x)}{(x-x_k)\,\omega_n'(x_k)}\right]^2 \left[1-(x-x_k)\frac{\omega_n''(x_k)}{\omega_n'(x_k)}\right], \tag{2}$$

che, come è noto, interpola la $f(x)$ nei punti $x_1, x_2, \ldots, x_n$, avendo ivi derivata nulla e si presta alla risoluzione del problema dell'approssimazione (3).

3. - Un teorema di equicomportamento dei polinomi (1) e (2).

Studieremo in primo luogo la differenza $P_n(x)-H_n(x)$ e faremo vedere che facendo tendere h opportunamente a zero, per $n\to\infty$, per particolari scelte di punti interpolanti, qualunque sia la $f(x)$ continua, essa ha per limite lo zero uniformemente in ogni intervallo interno ad (a, b).

Infatti, posto

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k)\,(x-x_k)},$$

si ha, essendo $0<\theta<1$,

$$P_n(x)-H_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k^{(n)^2}(x)\cdot$$

$$\cdot\left\{\frac{\omega_n'^2(x_k)[\omega_n(x_k-h)+\omega_n(x_k+h)]+\omega_n''(x_k)\,\omega_n(x_k-h)\,\omega_n(x_k+h)}{\omega_n'(x_k)\,\omega_n(x_k-h)\,\omega_n(x_k+h)}(x-x_k)-\right.$$

$$\left.-\frac{\omega_n(x_k-h)+h\,\omega_n'(x_k)}{\omega_n(x_k-h)}\right\} + h\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k^{(n)}(x)\,\omega_n'(x_k)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{\omega_n(x_k-h)}{x-x_k-h}\right)_{h\sim\theta h}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{\omega_n(x_k-h)+\omega_n(x_k+h)}{\omega_n(x_k-h)\,\omega_n(x_k+h)}-\frac{h}{\omega_n(x_k+h)}\right] \quad (4).$$

---

(3) Cfr. G. SANSONE, *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*, II, Zanichelli, Bologna 1952, pag. 254 e segg..

(4) Si osservi che, fissato n, facendo tendere h a zero con una legge qualsiasi, si ha $\lim_{h\to} P_n(x) = H_n(x)$.

Essendo:

$$\omega_n(x_k - h) = -h\,\omega_n'(x_k) + (h^2/2)\,\omega_n''(x_k - \theta_1 h) \qquad (0 < \theta_1 < 1),$$

$$\omega_n(x_k + h) = h\,\omega_n'(x_k) + (h^2/2)\,\omega_n''(x_k + \theta_2 h) \qquad (0 < \theta_2 < 1),$$

$$\omega_n(x_k - h) = -h\,\omega_n'(x_k) + (h^2/2)\,\omega_n''(x_k) + (h^3/6)\,\omega_n''(x_k - \theta_3 h) \qquad (0 < \theta_3 < 1),$$

$$\omega_n(x_k + h) = h\,\omega_n'(x_k) + (h^2/2)\,\omega_n''(x_k) + (h^3/6)\,\omega_n''(x_k + \theta_4 h) \qquad (0 < \theta_4 < 1),$$

si ha anche:

$$\omega_n(x_k - h)\,\omega_n(x_k + h) = -h^2\,\omega_n'^2(x_k) + h^3\,\Omega_1,$$

$$\omega_n(x_k - h) + \omega_n(x_k + h) = h^2\,\omega_n''(x_k) + h^3\,\Omega_2\,,$$

con

$$\Omega_1 = (1/2)\,\omega_n'(x_k)[\omega_n''(x_k + \theta_2 h) + \omega_n''(x_k - \theta_1 h)] + (h/4)\,\omega_n''(x_k - \theta_1 h)\,\omega_n''(x_k + \theta_2 h),$$

$$\Omega_2 = (1/6)[\omega_n''(x_k - \theta_3 h) + \omega_n''(x_k + \theta_4 h)]\,.$$

Si ha allora:

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & P_n(x) - H_n(x) = \\ & = h\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,l_k^{(n)}(x)\left\{\left[\frac{\omega_n'^2(x_k)\;\Omega_2 + \omega_n''(x_k)\;\Omega_1}{-\omega_n'^3(x_k) + h\,\omega_n'(x_k)\;\Omega_1}\,(x - x_k) - \frac{2\,\omega_n'(x_k - \theta_1 h)}{-2\,\omega_n'(x_k) + h\,\omega_n''(x_k - \theta_1 h)}\right] + \right. \\ & \left. + \omega_n'(x_k)\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}h}\left(\frac{\omega_n(x-h)}{x - x_k - h}\right)_{h\sim\theta h}\right]\left[\frac{\omega_n''(x_k) + h\,\Omega_2}{-\omega_n'(x_k) + h\,\Omega_1} - \frac{2}{2\,\omega_n'(x_k) + h\,\omega_n''(x_k + \theta_2 h)}\right]\right\}. \end{aligned}\right.$$

Supponiamo ora che esistano due costanti c e c_1 tali che risulti, qualunque sia n e per $a \leqslant x \leqslant b$,

$$(4)\qquad |\,\omega_n(x)\,| < c\,,$$

$$(5)\qquad |\,l_k^{(n)}(x)\,| < c_1\,.$$

Poniamo inoltre

$$(6)\qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\,\omega_n'^3(x_k)\,|} = A(n)\,.$$

Dalla (3), tenuto conto delle (4), (5) e (6), e ricordando che per il teorema MARKOFF [5] dalla (4) segue, per x interno all'intervallo (a, b), $|\omega_n'(x)| < c_2\, n$, con c_2 costante assoluta, indipendente da n,

$$(7) \qquad |P_n(x) - H_n(x)| < h\, M\, n^7 A(n),$$

con M costante assoluta.

Scegliendo ora, per ogni n,

$$(8) \qquad h = o\left(\frac{1}{n^7 A(n)}\right),$$

si avrà:

$$(9) \qquad \lim_{n\to\infty} [P_n(x) - H_n(x)] = 0,$$

uniformemente in (a, b).

Si ha allora il

Teorema. *Se*

$$(10) \qquad \lim_{n\to\infty} [f(x) - H_n(x)] = 0,$$

uniformemente in (a, b), *per ascisse* $x_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ *soddisfacenti le* (4) *e* (5), *qualunque sia* $f(x)$ *continua, si ha anche*

$$(11) \qquad \lim_{n\to\infty} [f(x) - P_n(x)] = 0,$$

uniformemente in (a, b).

È infatti:

$$|f(x) - P_n(x)| \leqslant |f(x) - H_n(x)| + |H_n(x) - P_n(x)|,$$

e il teorema segue immediatamente dalle (10) e (11).

([5]) Cfr. M. RIESZ, *Eine trigonometrische Interpolationsformel und einige Ungleichungen für Polynome*, Jahr. Math. Ver. **23** (1914), 354-368.

4. - Il caso delle ascisse di Tchebycheff di prima specie.

I polinomi di TCHEBYCHEFF di prima specie sono dati da

$$\omega_n(x) = \cos n\theta, \qquad x = \cos\theta, \qquad -1 \leqslant x \leqslant 1\,,$$

ed hanno gli zeri nei punti

$$x_k = \cos\theta_k, \qquad \theta_k = (2k-1)(\pi/(2n)), \qquad (k = 1,\, 2,\, \ldots,\, n;\; n = 1,\, 2,\, \ldots)$$ (6).

Tenuto conto che, in questo caso, $\omega'_n(x_k) = (-1)^{k+1}n/\text{sen}\,\theta_k$, si ha

(12) $$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{|\,\omega'^3_n(x_k)\,|} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\text{sen}^3\,\theta_k}{n^3} \leqslant \frac{1}{n^2}\,.$$

D'altra parte, essendo $|\cos n\theta| \leqslant c = 1$ e $|\,l_k^{(n)}(x)\,| < c_1$, le (4) e (5) sono verificate ed inoltre si ha, per la (6), tenuto conto della (12),

$$A(n) \leqslant 1/n^2.$$

Ma per le ascisse di TCHEBYCHEFF, come è noto, vale la (10); quindi se scegliamo $h = n^{-(5+\alpha)}$ $(\alpha > 0)$ si ha anche che i polinomi $P_n(x)$ dati dalla (1), sempre per tale scelta di ascisse, convergono uniformemente, in ogni intervallo interno a $(-1,\, 1)$, qualunque sia la $f(x)$ continua, verso la $f(x)$ stessa (7).

Summary.

A new interpolation formula is established.

(6) Cfr., per esempio, L. MERLI, *Sulla contemporanea approssimazione di una funzione e della sua derivata con la formula di interpolazione di Lagrange*, Boll. Un. Mat. Ital. (2) **3** (1941), 116-125.

(7) Per una approfondita trattazione dei problemi dell'interpolazione e per una ampia bibliografia sull'argomento, cfr.: G. SZEGÖ, *Orthogonal Polynomials*, An. Math. Soc. Colloquium Publ. **23**, New York 1955; E. FELDHEIM, *Theorie de la convergence des procédés d'interpolation et de quadrature mécanique*, Memorial Sciences Math., vol. VII, Gauthier-Villars, Paris 1939. Per un'altra formula di interpolazione, convergente per tutte le funzioni continue, nel solo caso delle ascisse di TCHEBYCHEFF di 1ª specie, ottenuta mediante innalzamento del grado, come nel presente lavoro, cfr.: L. MERLI, *Sulla rappresentazione delle funzioni continue con una classe di polinomi di interpolazione del tipo di Lagrange*, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8) **7** (1949), 212-216.