Riv. Mat. Univ. Parma (2) 3 (1962), 1-75

DIONISIO GALLARATI (*)

Sulle V_4 di S_8 i cui S_4 tangenti si appoggiano a piani assegnati. (**)

1. - In una Memoria recente [2] mi sono occupato delle varietà differenziabili a quattro dimensioni immerse nello spazio lineare S_8, aventi gli spazi tangenti appoggiati a tre o più piani generici π_1, π_2, π_3, ... ma *non secanti secondo piani alcuno degli* S_5 $\pi_{ik} \equiv \pi_i \pi_k$. Quest'ipotesi, utile per non allungare eccessivamente la ricerca e per evitare certe difficoltà rilevanti, ritenevo intervenisse in modo essenziale per la validità di uno dei principali risultati raggiunti, cioè per la caratterizzazione della varietà di C. SEGRE che rappresenta le coppie di punti estratti da due piani come V_4 differenziabile di S_8, non conica, i cui S_4 tangenti, senza segare in piani un medesimo S_5, si appoggiano a quattro piani a tre a tre indipendenti su ciascuno dei quali sia due la dimensione dell'insieme dei punti di appoggio.

Tuttavia, il controesempio che ho indicato per provare la necessità dell'ipotesi in oggetto, non è utile a tale scopo, perchè i quattro piani che in esso intervengono, benchè congiunti dall'S_8 ed a due a due privi di punti comuni, non sono generici, appartenendo alla sestupla di piani determinati da quattro S_5 generici di S_8. Tre di quei quattro piani giacciono in un medesimo S_5.

Ciò mi ha indotto a ritornare sull'argomento, per svincolarmi dall'ipotesi di inesistenza di S_5 segati secondo piani da tutti gli S_4 tangenti di V_4; *ipotesi che risulta di fatto superflua.*

In una prima parte di questo lavoro dò la completa classificazione delle V_4 differenziabili di S_8 aventi gli S_4 tangenti tutti incidenti a tre piani indipendenti π_1, π_2, π_3.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Università, Genova, Italia.
(**) Ricevuto il 3-XI-1961.

Poichè in [2] ho provato l'esistenza di due diverse famiglie di V_4 differenziabili di S_8 con gli S_4 tangenti tutti appoggiati a tre piani π_i ma non seganti secondo piani nessuno degli $S_5\,\pi_{ik}$, mi limito qui al caso in cui uno almeno di questi S_5 abbia a comune un piano con ogni S_4 tangente di V_4; e trovo altre dieci famiglie di V_4 differenziabili, appartenenti allo spazio S_8 ma non a spazi inferiori, non coniche e non composte di spazi lineari S_4, con gli S_4 tangenti incidenti a π_1, π_2, π_3.

Passando poi alle varietà V_4 i cui S_4 tangenti incontrano quattro piani a tre a tre indipendenti, ottengo i seguenti teoremi:

Teorema I. *Le V_4 immerse $\mathcal{C}^{(2)}$ appartenenti allo spazio S_8 e non a spazi inferiori, le quali senza essere coni e senza esser composte di spazi lineari S_4, hanno tutti gli S_4 tangenti appoggiati a quattro piani a tre a tre indipendenti, sono:*

a) *la varietà V_4^6 di* C. Segre *che rappresenta le coppie di punti estratti da due piani;*

b) *le serie semplicemente infinite di spazi S_3 appoggiati ai quattro piani dati;*

c) *le varietà della forma:*

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_8 = A_0(\alpha) + B_0(\beta) : A_1(\alpha) + B_1(\beta) : A_2(\alpha) + B_2(\beta) :$$
$$: A_0(\alpha) + C_0(\gamma) : A_1(\alpha) + C_1(\gamma) : A_2(\alpha) + C_2(\gamma) :$$
$$: A_0(\alpha) + D_0(\delta) : A_1(\alpha) + D_1(\delta) : A_2(\alpha) + D_2(\delta)\,,$$

con $A_i(\alpha)$, $B_i(\beta)$, $C_i(\gamma)$, $D_i(\delta)$ funzioni arbitrarie delle variabili indicate;

d) *le varietà della forma:*

$$x_0 : x_1 : \ldots : x_8 = \beta : \alpha\beta : \beta\theta(\alpha) : 1 - \gamma\delta : \alpha(1 - \gamma\delta) + \delta H(\gamma) :$$
$$: \theta(\alpha)(1 - \gamma\delta) + \delta\xi(\alpha) H(\gamma) : 1 : \alpha + \delta : \delta\lambda(\alpha) + \theta(\alpha),$$

con $\theta(\alpha)$, $\lambda(\alpha)$, $\xi(\alpha)$ funzioni arbitrarie della sola variabile α ed $H(\gamma)$ funzione arbitraria di γ.

Teorema II. *La varietà di* C. Segre *prodotto di due piani può essere caratterizzata tra tutte le V_4 immerse $\mathcal{C}^{(2)}$ nello spazio S_8, dalla proprietà di avere tutti gli S_4 tangenti appoggiati a quattro piani a tre a tre indipendenti, su ciascuno dei quali sia due la dimensione dell'insieme dei punti di appoggio.*

PARTE I.

2. – Se π_1, π_2, π_3, π_4 sono quattro piani a tre a tre indipendenti dello spazio S_8, è lecito assumere i vertici A_i del 9-edro di riferimento per le coordinate proiettive ed omogenee x_i dei punti di S_8 ed il punto unità, in guisa che $\pi_1 \equiv A_0 A_1 A_2$, $\pi_2 \equiv A_3 A_4 A_5$, $\pi_3 \equiv A_6 A_7 A_8$, $\pi_4 \equiv M_0 M_1 M_2$, ove M_0 (100 100 100), M_1 (010 010 010), M_2 (001 001 001); [2].

Ciò premesso, *sia V_4 una varietà differenziabile, a quattro dimensioni, appartenente ad un S_8 ma non ad uno spazio inferiore, non conica e non composta di spazi lineari S_4*, rappresentata parametricamente mediante le equazioni:

$$\rho x_i = \varphi_i(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \qquad (i = 0, 1, \ldots, 8) \tag{1}$$

con $\varphi_i(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ funzioni continue insieme alle loro derivate prime in un campo assegnato.

È comodo per il seguito rappresentare V_4 con la matrice:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \varphi_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \varphi_1(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \varphi_2(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ \varphi_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \varphi_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \varphi_5(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ \varphi_6(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \varphi_7(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \varphi_8(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{bmatrix}.$$

Supponiamo che gli S_4 tangenti di V_4 seghino secondo piani l'S_5 $\pi_{23} \equiv \pi_2 \pi_3$: perciò è necessario e sufficiente che V_4 appartenga ad un cono W_7 avente come vertice π_{23} o, in altre parole, che V_4 sia luogo di ∞^1 V_3 situate in S_6 passanti per π_{23} [1,3]. Gli elementi della prima orizzontale di M devono allora essere proporzionali a funzioni di una sola variabile (ma non a tre costanti, per le ipotesi fatte); e pertanto, dividendo tutti gli elementi di M per una funzione opportuna e facendo una scelta conveniente dei parametri, si può supporre che:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \theta_3(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \theta_4(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \theta_5(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ \theta_6(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \theta_7(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \theta_8(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{bmatrix}.$$

Ora le funzioni θ_i devono dipendere essenzialmente da β, γ, δ perchè altrimenti M rappresenterebbe una varietà di dimensione $\leqslant 3$; inoltre non è possibile che gli elementi di una delle due ultime orizzontali di M dipendano soltanto dalla variabile α (perchè altrimenti V_4 sarebbe un cono); pertanto con una nuova scelta dei parametri ed eventualmente scambiando tra loro i piani π_2 e π_3 si può supporre:

$$(2) \qquad M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \xi_5(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \\ \delta & \xi_7(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \xi_8(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{bmatrix}.$$

3. – Ricerchiamo dapprima le V_4 differenziabili di S_8 i cui S_4 tangenti oltre a segare secondo piani l'S_5 π_{23} sono tutti appoggiati a π_1, π_2, π_3 *con l'ipotesi supplementare che nè π_{12} nè π_{13} seghino secondo piani tutti gli S_4 tangenti di V_4.*

Partiamo da una V_4 della forma (2), i cui S_4 tangenti tagliano secondo piani l'S_5 π_{23}; e per semplificare il discorso diremo che una V_4 soddisfa la condizione (π_i) per indicare che i suoi S_4 tangenti sono tutti incidenti al piano π_i e similmente che V_4 soddisfa la condizione (π_{ik}) per indicare che i suoi S_4 tangenti segano in piani l'S_5 π_{ik}.

Ciò premesso, la varietà (2) soddisfa la condizione (π_3) se e solo se, come subito visto, risulta $\xi_5^\delta = 0$ (dove ora e nel seguito con le scritture f^α, f^β, ... indicheremo le derivate prime di una funzione $f(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ rispetto α, rispetto a β, ... e similmente $f^{\alpha\beta}$ significherà, ad esempio, la derivata seconda di f rispetto ad α ed a β, etc.).

Operando il cambiamento di variabili espresso dalle: $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $\gamma = \beta^* \gamma^*$, $\delta = \beta^* \delta^*$ e seguitando a chiamare α, β, γ, δ le nuove variabili, si ha per V_4 la rappresentazione:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\gamma & \theta_5(\alpha, \beta, \gamma) \\ \beta\delta & \theta_7(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \theta_8(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{bmatrix};$$

od anche, ponendo $\theta_5 = \beta\omega_5(\alpha, \beta, \gamma)$, $\theta_7 = \beta\omega_7(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\theta_8 = \beta\omega_8(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$:

$$(3) \qquad M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\gamma & \beta\,\omega_5(\alpha, \beta, \gamma) \\ \beta\delta & \beta\,\omega_7(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \beta\,\omega_8(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{bmatrix};$$

e la condizione (π_1) equivale alla:

$$\left\| \begin{matrix} \omega_5^\alpha & \omega_7^\alpha & \omega_8^\alpha \\ \omega_5^\beta & \omega_7^\beta & \omega_8^\beta \end{matrix} \right\| = 0 . \tag{4}$$

Separiamo tre casi:

A) Supponiamo in primo luogo $\omega_5^\beta = \omega_7^\beta = \omega_8^\beta = 0$, ed imponiamo la condizione (π_2). Posto $\omega_7 = \delta\varepsilon_7(\alpha, \gamma, \delta)$, $\omega_8 = \delta\varepsilon_8(\alpha, \gamma, \delta)$ e quindi:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\gamma & \beta\omega_5(\alpha, \gamma) \\ \beta\delta & \beta\delta\varepsilon_7(\alpha, \gamma, \delta) & \beta\delta\varepsilon_8(\alpha, \gamma, \delta) \end{bmatrix},$$

si vede subito che condizione necessaria e sufficiente affinchè sia soddisfatta anche la condizione (π_2) è:

$$\frac{\partial(\varepsilon_7, \varepsilon_8)}{\partial(\gamma, \delta)} = 0;$$

poichè, per le ipotesi attuali ε_7 ed ε_8 non possono essere funzioni della sola α (se no sarebbe anche soddisfatta la condizione (π_{12})), possiamo dunque supporre, scambiando eventualmente ε_7 con ε_8 (il che significa un'omografia nel piano π_3) che ε_8 sia funzione di α e di ε_7. Ne segue:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\gamma & \beta\omega_5(\alpha, \gamma) \\ \beta\delta & \beta\delta\varepsilon_7(\alpha, \gamma, \delta) & \beta\delta\Phi(\alpha, \varepsilon_7) \end{bmatrix}.$$

Se $\varepsilon_7^\delta = 0$ si può, con opportuno cambiamento di parametri, ridurre M alla forma:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\gamma & \beta\omega_5(\alpha, \gamma) \\ \delta & \delta\theta_7(\alpha, \gamma) & \delta\theta_8(\alpha, \gamma) \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Se $\varepsilon_7^\delta \neq 0$ si potranno assumere come nuovi parametri α, β, γ, $\varepsilon_7(\alpha, \gamma, \delta)$ e ridurre M alla forma:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\gamma & \beta\omega_5(\alpha, \gamma) \\ \beta D(\alpha, \gamma, \delta) & \beta\delta D(\alpha, \gamma, \delta) & \beta\Phi(\alpha, \delta)\, D(\alpha, \gamma, \delta) \end{bmatrix},$$

od anche — con una nuova scelta di parametri —:

$$(6) \qquad M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \theta_2(\alpha)\,\beta \\ 1 & \gamma & \omega_5(\alpha, \gamma) \\ D(\alpha, \gamma, \delta) & \delta D(\alpha, \gamma, \delta) & \Phi(\alpha, \delta)\, D(\alpha, \gamma, \delta) \end{bmatrix}.$$

B) Se la (4) è soddisfatta in quanto $\omega_5^\alpha = \omega_7^\alpha = \omega_8^\alpha = 0$, e quindi M può scriversi — con opportuna scelta dei parametri — :

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \omega_5(\beta, \gamma) \\ \delta & \omega_7(\beta, \gamma, \delta) & \omega_8(\beta, \gamma, \delta) \end{bmatrix},$$

la condizione (π_2) equivale a $\dfrac{\partial(\omega_7, \omega_8)}{\partial(\beta, \gamma)} = 0$. Se una almeno delle due funzioni ω_7 ed ω_8, ad esempio ω_7 è funzione della sola δ si ha

$$(7) \qquad M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \omega_5(\beta, \gamma) \\ \delta & \omega_7(\delta) & \omega_8(\beta, \gamma, \delta) \end{bmatrix};$$

in caso contrario si può supporre $\omega_8 = \Phi(\delta, \omega_7)$ e quindi:

$$(8) \qquad M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \omega_5(\beta, \gamma) \\ \delta & \omega_7(\beta, \gamma, \delta) & \Phi[\delta, \omega_7(\beta, \gamma, \delta)] \end{bmatrix}.$$

C) Supponiamo ora che ω_5, ω_7, ω_8 siano tre integrali di un'equazione differenziale della forma:

$$\lambda X^\alpha + \mu X^\beta = 0 \tag{9}$$

con λ, μ funzioni (delle quattro variabili α, β, γ, δ) *entrambe non nulle.*

Risulta $\omega_5^\alpha\, \omega_5^\beta \neq 0$, perchè se fosse ad esempio $\omega_5^\alpha = 0$ la (9) darebbe $\mu\omega_5^\beta = 0$ ed ω_5, poichè $\mu \neq 0$, sarebbe funzione della sola variabile γ, onde V_4 soddisferebbe la condizione (π_{13}) contro le ipotesi attuali. Dalla: $\lambda\omega_5^\alpha + \mu\omega_5^\beta = 0$ segue allora che λ/μ è funzione delle sole variabili α, β, γ e se $g\,(\alpha, \beta, \gamma)$ è una funzione (non costante) delle tre variabili α, β, γ tale che $\lambda g^\alpha + \mu g^\beta = 0$, risulta:

$$\omega_5 = \Omega_5\,[\gamma, g\,(\alpha, \beta, \gamma)], \qquad \omega_7 = \Omega_7\,[\gamma, \delta, g\,(\alpha, \beta, \gamma)], \qquad \omega_8 = \Omega_8\,[\gamma, \delta, g\,(\alpha, \beta, \gamma)]\,.$$

Sarà certo $g^\beta \neq 0$ se no $\lambda g^\alpha = 0$ e quindi $g^\alpha = 0$, onde g sarebbe funzione soltanto di δ e si ricadrebbe nel caso ora escluso. Operando il cambiamento di variabili espresso dalle:

$$\alpha = \alpha^*, \qquad g\,(\alpha^*, \beta, \gamma^*) = \beta^*, \qquad \gamma = \gamma^*, \qquad \delta = \delta^*$$

che consentono di esprimere α, β, γ, δ nella forma seguente:

$$\alpha = \alpha^*, \qquad \beta = \varphi\,(\alpha^*, \beta^*, \gamma^*), \qquad \gamma = \gamma^*, \qquad \delta = \delta^*,$$

e seguitando a chiamare α, β, γ, δ i nuovi parametri, si ottiene per la V_4 (3) la rappresentazione:

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & \theta_2\,(\alpha) \\ \varphi\,(\alpha, \beta, \gamma) & \gamma\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma) & \Omega_5\,(\beta, \gamma)\,\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma) \\ \delta\varphi\,(\alpha, \beta, \gamma) & \Omega_7(\beta, \gamma, \delta)\varphi(\alpha, \beta, \gamma) & \Omega_8(\beta, \gamma, \delta)\varphi(\alpha, \beta, \gamma) \end{matrix} \right\|.$$

Affinchè V_4 soddisfi la condizione (π_2) è necessario e sufficiente che:

$$\begin{vmatrix} \delta\varphi^\beta & \Omega_7^\beta\,\varphi + \Omega_7\,\varphi^\beta & \Omega_8^\beta\,\varphi + \Omega_8\,\varphi^\beta \\ \delta\varphi^\gamma & \Omega_7^\gamma\,\varphi + \Omega_7\,\varphi^\gamma & \Omega_8^\gamma\,\varphi + \Omega_8\,\varphi^\gamma \\ 1 & \Omega_7^\delta & \Omega_8^\delta \end{vmatrix} = 0$$

ossia, con semplici trasformazioni,

$$\begin{vmatrix} \varphi^\beta & \Omega_7^\beta & \Omega_8^\beta \\ \varphi^\gamma & \Omega_7^\gamma & \Omega_8^\gamma \\ \varphi & \delta\Omega_7^\delta - \Omega_7 & \delta\Omega_8^\delta - \Omega_8 \end{vmatrix} = 0;$$

od anche, ponendo $\Omega_7 = \delta\varepsilon_7(\beta, \gamma, \delta)$, $\Omega_8 = \delta\varepsilon_8(\beta, \gamma, \delta)$,

$$\frac{\partial(\alpha, \delta\varphi, \varepsilon_7, \varepsilon_8)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} = 0.$$

Se fossero ε_7 ed ε_8 funzioni di un solo parametro, ad esempio se $\varepsilon_8 = f(\varepsilon_7)$, V_4 verificherebbe la condizione (π_{12}), contro le ipotesi attuali. Possiamo allora supporre che α, ε_7, ε_8 siano funzionalmente indipendenti, e pertanto: $\delta\varphi = \Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8)$. Ne segue:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \frac{1}{\delta}\Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \frac{\gamma}{\delta}\Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \frac{1}{\delta}\Omega_5(\beta, \gamma)\,\Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) \\ \Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \varepsilon_7\Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \varepsilon_8\Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) \end{Vmatrix}$$

od anche, ponendo $\Phi(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) = H^{-1}(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8)$ e scrivendo δ in luogo di $1/\delta$,

$$M \equiv \begin{Vmatrix} H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \alpha H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \theta_2(\alpha)\,H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) \\ \delta & \gamma\delta & \Omega_5(\beta, \gamma)\,\delta \\ 1 & \varepsilon_7 & \varepsilon_8 \end{Vmatrix}.$$

Poichè $\Omega_5^\beta \neq 0$, per l'ipotesi che V_4 non soddisfi la condizione (π_{13}), possiamo operare il cambiamento di variabili espresso dalle:

$$\Omega_5(\beta, \gamma) = \beta^*, \qquad \alpha = \alpha^*, \qquad \gamma = \gamma^*, \qquad \delta = \delta^*$$

che si invertono in formule del tipo:

$$\alpha = \alpha^*, \qquad \beta = \varphi(\beta^*, \gamma^*), \qquad \gamma = \gamma^*, \qquad \delta = \delta^*,$$

ottenendo per V_4 la rappresentazione:

$$(10) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \alpha H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) & \theta_2(\alpha) H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) \\ \delta & \gamma\delta & \beta\delta \\ 1 & \varepsilon_7 & \varepsilon_8 \end{Vmatrix},$$

ove la funzione H, in virtù della condizione (π_3) è tale che:

$$\begin{Vmatrix} H - \delta H^\delta & \alpha(H - \delta H^\delta) & \theta_2(\alpha)(H - \delta H^\delta) \\ H^\alpha & H + \alpha H^\alpha & \theta_2^\alpha H + \theta H^\alpha \end{Vmatrix} = 0$$

ossia

$$(11) \qquad H - \delta H^\delta = 0 .$$

Esaminiamo dapprima il caso speciale in cui $\frac{\partial(\varepsilon_7, \varepsilon_8)}{\partial(\gamma, \delta)} = 0$. In tal caso, poichè ε_7 ed ε_8 non possono essere entrambe funzioni della sola variabile β (per l'ipotesi che V_4 non soddisfi la condizione (π_{12})), si può supporre — scambiando eventualmente ε_7 con ε_8 — che ε_8 sia funzione di β e di ε_7 e cioè che M sia del tipo:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} H(\alpha, \beta, \varepsilon_7) & \alpha H(\alpha, \beta, \varepsilon_7) & \theta_2(\alpha) H(\alpha, \beta, \varepsilon_7) \\ \delta & \gamma\delta & \beta\delta \\ 1 & \varepsilon_7 & \varphi(\beta, \varepsilon_7) \end{Vmatrix};$$

d'altra parte risulta $\varepsilon_7^\gamma \neq 0$, per l'ipotesi che V_4 non sia un cono: con scelta opportuna dei parametri potremo allora ridurre M alla forma:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} H(\alpha, \beta, \gamma) & \alpha H(\alpha, \beta, \gamma) & \theta_2(\alpha) H(\alpha, \beta, \gamma) \\ \delta & \delta C(\beta, \gamma, \delta) & \beta\delta \\ 1 & \gamma & \varphi(\beta, \gamma) \end{Vmatrix}$$

ove $H(\alpha, \beta, \gamma)$ e $C(\beta, \gamma, \delta)$ — in forza della condizione (π_3) — sono vincolate dalla:

$$C^\gamma H + \delta C^\delta H^\gamma = 0. \tag{12}$$

Poichè $H \neq 0$ e poichè C non può essere funzione della sola β (perchè altrimenti V_4 verificherebbe (π_{13})), si hanno solamente due casi possibili: 1º) $C^\gamma = H^\gamma = 0$; 2º) $C^\gamma C^\delta H^\gamma \neq 0$.

Nel primo caso risulta:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} H(\alpha, \beta) & \alpha H(\alpha, \beta) & \theta_2(\alpha) H(\alpha, \beta) \\ \delta & \delta C(\beta, \delta) & \beta\delta \\ 1 & \gamma & \varphi(\beta, \gamma) \end{Vmatrix}. \tag{13}$$

Nel secondo caso la (12) implica che $\dfrac{H^\gamma}{H}$ e $-\dfrac{C^\gamma}{\delta C^\delta}$ siano uguali ad una medesima funzione delle sole variabili β, γ. Posto:

$$\frac{H^\gamma}{H} = \frac{\partial}{\partial\gamma} \log \theta(\beta, \gamma),$$

segue l'esistenza d'una funzione $\xi(\alpha)$, della sola variabile α, tale che: $H = \theta(\beta, \gamma)\, \xi(\alpha)$; sostituendo in (12) risulta allora:

$$C^\gamma \theta + \delta C^\delta \theta^\gamma = 0;$$

ne segue facilmente che C è funzione di β e di $\dfrac{\theta}{\delta}$. Si ha dunque:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \xi(\alpha)\, \theta(\beta, \gamma) & \alpha\xi(\alpha)\, \theta(\beta, \gamma) & \theta_2(\alpha)\, \xi(\alpha)\, \theta(\beta, \gamma) \\ \delta & \delta\Phi\left[\beta, \dfrac{\theta}{\delta}\right] & \beta\delta \\ 1 & \gamma & \varphi(\beta, \gamma) \end{Vmatrix}$$

ed assumendo α, β, γ, $\dfrac{\theta}{\delta}$ come nuovi parametri si ha una rappresentazione della forma:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \theta_0(\alpha)\, \theta(\beta, \gamma) & \theta_1(\alpha)\, \theta(\beta, \gamma) & \theta_2(\alpha)\, \theta(\beta, \gamma) \\ \dfrac{\theta}{\delta} & \dfrac{\theta}{\delta} f(\beta, \delta) & \beta\dfrac{\theta}{\delta} \\ 1 & \gamma & \varphi(\beta, \gamma) \end{Vmatrix}$$

od anche, assumendo come parametri $\theta_0(\alpha)$, β, γ, $\frac{1}{\delta}$ e ponendo $K(\beta, \gamma) = \theta^{-1}$:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \theta_1(\alpha) & \theta_2(\alpha) \\ \delta & \delta g(\beta, \delta) & \beta\delta \\ K(\beta, \gamma) & \gamma K(\beta, \gamma) & \varphi(\beta, \gamma) K(\beta, \gamma) \end{bmatrix}$$

e cioè — tenendo conto che uno almeno degli elementi dell'ultima riga deve dipendere effettivamente da γ — si ha una rappresentazione della forma:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \theta_1(\alpha) & \theta_2(\alpha) \\ \delta & \beta\delta & \theta_5(\beta, \delta) \\ \gamma & \theta_7(\beta, \gamma) & \theta_8(\beta, \gamma) \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Riprendiamo ora la (10) nell'ipotesi $\frac{\partial(\varepsilon_7, \varepsilon_8)}{\partial(\gamma, \delta)} \neq 0$. La (11), che può scriversi: $H - \delta(H^{\varepsilon_7} \varepsilon_7^{\delta} + H^{\varepsilon_8} \varepsilon_8^{\delta}) = 0$ esclude che $H^{\varepsilon_7} = H^{\varepsilon_8} = 0$. Scambiando eventualmente tra loro ε_7 ed ε_8 si può supporre $H^{\varepsilon_8} \neq 0$, ed è lecito il cambiamento di parametri espresso dalle:

$$\alpha = \alpha^*, \quad \beta = \beta^*, \quad \varepsilon_7(\beta, \gamma, \delta) = \gamma^*, \quad H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8) = \delta^* \tag{15}$$

Infatti:

$$\frac{\partial(\alpha, \beta, \varepsilon_7(\beta\gamma\delta), H(\alpha, \varepsilon_7, \varepsilon_8))}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta)} = \frac{\partial(\varepsilon_7, H)}{\partial(\gamma, \delta)} = H^{\varepsilon_8} \frac{\partial(\varepsilon_7, \varepsilon_8)}{\partial(\gamma, \delta)} \neq 0 .$$

Poichè $H^{\varepsilon_8} \neq 0$, l'ultima delle (15) lascia esprimere ε_8 come funzione di α, ε_7, δ^*. Posto $\varepsilon_8 = \varphi(\alpha, \varepsilon_7, \delta^*)$ le (15) possono scriversi:

$$\alpha = \alpha^*, \quad \beta = \beta^*, \quad \varepsilon_7(\beta^*, \gamma, \delta) = \gamma^*, \quad \varepsilon_8(\beta^*, \gamma, \delta) = \varphi(\alpha^*, \gamma^*, \delta^*)$$

e possono risolversi rispetto ad α, β, γ, δ che riescono della forma:

$$\alpha = \alpha^*, \beta = \beta^*, \quad \gamma = \eta[\beta^*, \gamma^*, \varphi(\alpha^*, \gamma^*, \delta^*)], \quad \delta = \xi[\beta^*, \gamma^*, \varphi(\alpha^*, \gamma^*, \delta^*)] .$$

Seguitando a scrivere α, β, γ, δ in luogo di α^*, β^*, γ^*, δ^* si ha per V_4 la rappresentazione:

$$(16) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \delta & \alpha\delta & \theta_2(\alpha)\,\delta \\ \xi\,[\beta, \gamma, \varphi(\alpha, \gamma, \delta)] & \eta\,[\beta, \gamma, \varphi]\;\xi\,[\beta, \gamma, \varphi] & \beta\xi\,[\beta, \gamma, \varphi] \\ 1 & \gamma & \varphi(\alpha, \gamma, \delta) \end{Vmatrix} .$$

Se $\varphi^\delta = 0$ si ha:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \delta & \alpha\delta & \theta_2(\alpha)\,\delta \\ \theta_3(\alpha, \beta, \gamma) & \theta_4(\alpha, \beta, \gamma) & \beta\theta_3(\alpha, \beta, \gamma) \\ 1 & \gamma & \varphi(\alpha, \gamma) \end{Vmatrix} ,$$

e la condizione (π_3) equivale — come si riconosce senza difficoltà — alla: $\frac{\partial}{\partial\gamma}\left[\frac{\theta_4}{\theta_3}\right] = 0$, cioè, $\theta_4 = \theta_3 f(\alpha, \beta)$. Si trova così:

$$(17) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \delta & \alpha\delta & \theta_2(\alpha)\,\delta \\ \theta_3(\alpha, \beta, \gamma) & f(\alpha, \beta)\,\theta_3(\alpha, \beta, \gamma) & \beta\theta_3(\alpha, \beta, \gamma) \\ 1 & \gamma & \varphi(\alpha, \gamma) \end{Vmatrix} .$$

Se invece $\varphi^\delta \neq 0$, possiamo assumere come nuovi parametri α, β, γ, $\varphi(\alpha, \gamma, \delta)$, riducendo la (16) alla forma:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \psi(\alpha, \gamma, \delta) & \alpha\psi(\alpha, \gamma, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\psi(\alpha, \gamma, \delta) \\ \xi(\beta, \gamma, \delta) & \theta(\beta, \gamma, \delta) & \beta\xi(\beta, \gamma, \delta) \\ 1 & \gamma & \delta \end{Vmatrix} ;$$

e l'ipotesi che V_4 soddisfi la condizione (π_3) si traduce nel fatto che le sei funzioni $\psi(\alpha, \gamma, \delta)$, $\alpha\psi(\alpha, \gamma, \delta)$, $\theta_2(\alpha)\,\psi(\alpha, \gamma, \delta)$, $\xi(\beta, \gamma, \delta)$, $\theta(\beta, \gamma, \delta)$, $\beta\xi(\beta, \gamma, \delta)$ siano sei integrali, tra loro linearmente indipendenti, di un'equazione differenziale del tipo:

$$(18) \qquad \lambda X + \mu X^\alpha + \nu X^\beta + \varrho X^\gamma + \sigma X^\delta = 0 .$$

Sostituendo nella (18) X una volta con ψ, una volta con $\alpha\psi$, si trova che deve essere $\mu = 0$ ed inoltre:

$$\lambda\psi + \varrho\psi^{\gamma} + \sigma\psi^{\delta} = 0; \tag{19}$$

similmente sostituendo nella (18) X una volta con ξ ed una volta con $\beta\xi$ e poi con θ, si trova $\nu = 0$ ed inoltre:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda\xi + \varrho\xi^{\gamma} + \sigma\xi^{\delta} = 0 \\ &\lambda\theta + \varrho\theta^{\gamma} + \sigma\theta^{\delta} = 0\,. \end{aligned}\right. \tag{20}$$

Risulta senz'altro:

$$\left\| \begin{matrix} \xi & \xi^{\gamma} & \xi^{\delta} \\ \theta & \theta^{\gamma} & \theta^{\delta} \end{matrix} \right\| \neq 0\,,$$

perchè altrimenti si avrebbe $\dfrac{\partial}{\partial\gamma}\left[\dfrac{\theta}{\xi}\right] = \dfrac{\partial}{\partial\delta}\left[\dfrac{\theta}{\xi}\right] = 0$, ossia $\dfrac{\theta}{\xi} = \varphi(\beta)$ e quindi:

$$M \equiv \left[\begin{matrix} \psi(\alpha,\gamma,\delta) & \alpha\psi(\alpha,\gamma,\delta) & \theta_2(\alpha)\,\psi(\alpha,\gamma,\delta) \\ \xi(\beta,\gamma,\delta) & \varphi(\beta)\,\xi(\beta,\gamma,\delta) & \beta\xi(\beta,\gamma,\delta) \\ 1 & \gamma & \delta \end{matrix}\right],$$

e V_4 soddisferebbe la condizione (π_{13}), contro le attuali ipotesi. Le (20) assicurano allora che i mutui rapporti di λ, ϱ, σ non dipendono dalla variabile α; ed è lecito supporre senz'altro che λ, ϱ, σ siano funzioni di β, γ, δ. Detti β_0, β_1 due valori di β, tra loro differenti e del resto generici, la (19) dà:

$$\left\{\begin{aligned} &\lambda(\beta_0,\gamma,\delta)\,\psi(\alpha,\gamma,\delta) + \varrho(\beta_0,\gamma,\delta)\,\psi^{\gamma}(\alpha,\gamma,\delta) + \sigma(\beta_0,\gamma,\delta)\,\psi^{\delta}(\alpha,\gamma,\delta) = 0 \\ &\lambda(\beta_1,\gamma,\delta)\,\psi(\alpha,\gamma,\delta) + \varrho(\beta_1,\gamma,\delta)\,\psi^{\gamma}(\alpha,\gamma,\delta) + \sigma(\beta_1,\gamma,\delta)\,\psi^{\delta}(\alpha,\gamma,\delta) = 0; \end{aligned}\right. \tag{21}$$

e due casi si presentano come possibili: 1°) λ, ϱ, σ *non* sono proporzionali a tre funzioni delle sole variabili γ, δ, ed in tal caso $\dfrac{\psi^{\gamma}}{\psi}$, $\dfrac{\psi^{\delta}}{\psi}$ sono funzioni delle sole variabili γ, δ; 2°) si può supporre che λ, ϱ, σ siano funzioni soltanto di γ e δ.

Nel primo caso si riconosce subito che $\psi(\alpha, \gamma, \delta)$ è prodotto di una funzione della sola α per una funzione di γ e δ, e quindi:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \xi_0(\alpha)\, H(\gamma, \delta) & \alpha\xi_0(\alpha)\, H(\gamma, \delta) & \theta_2(\alpha)\, \xi_0(\alpha)\, H(\gamma, \delta) \\ \xi(\beta, \gamma, \delta) & \theta(\beta, \gamma, \delta) & \beta\xi(\beta, \gamma, \delta) \\ 1 & \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

ed anche assumendo una delle due funzioni ξ e $\beta\xi$ (ad esempio ξ) come nuovo parametro β (il che è lecito perchè escludiamo che V_4 sia un cono):

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \xi_0(\alpha)\, H(\gamma, \delta) & \alpha\xi_0(\alpha)\, H(\gamma, \delta) & \xi_2(\alpha)\, H(\gamma, \delta) \\ \beta & \theta_4(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5(\beta, \gamma, \delta) \\ 1 & \gamma & \delta \end{Vmatrix};$$

ponendo poi $\xi_6(\gamma, \delta) = H^{-1}(\gamma, \delta)$ ed assumendo come nuovi parametri $\xi_0(\alpha)$, $\beta\xi_6(\gamma, \delta)$, γ, δ, si ottiene per V_4 una rappresentazione della forma:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \xi_4(\beta, \gamma, \delta) & \xi_5(\beta, \gamma, \delta) \\ \xi_6(\gamma, \delta) & \xi_7(\gamma, \delta) & \xi_8(\gamma, \delta) \end{Vmatrix}$$

con $\dfrac{\partial(\xi_4, \xi_5)}{\partial(\gamma, \delta)} = 0$ e cioè con ξ_4, ξ_5 funzioni di β e di una funzione $h(\beta, \gamma, \delta)$. Posto $\xi_4(\beta, \gamma, \delta) = \varphi(\beta, h)$ e $\xi_5(\beta, \gamma, \delta) = \psi(\beta, h)$, l'ipotesi che V_4 non verifichi la condizione (π_{13}) esclude che $\varphi^h = \psi^h = 0$. Supposto ad esempio $\varphi^h \neq 0$, dalla $\varphi(\beta, h) = \xi_4$ si può dedurre $h(\beta, \gamma, \delta)$ come funzione di β e di ξ_4, pervenendo così a rappresentare V_4 con una matrice della forma:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \xi_4(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5[\beta, \xi_4(\beta, \gamma, \delta)] \\ \xi_6(\gamma, \delta) & \xi_7(\gamma, \delta) & \xi_8(\gamma, \delta) \end{Vmatrix};$$

poichè, per le ipotesi attuali, le tre funzioni ξ_6, ξ_7, ξ_8 devono dipendere essenzialmente dalle due variabili γ, δ, due di esse potranno essere assunte come nuove variabili γ, δ, onde:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \xi_4(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5[\beta, \xi_4(\beta, \gamma, \delta)] \\ \gamma & \delta & \xi_8(\gamma, \delta) \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

La (22) contiene la (8) come caso speciale, riducendosi ad essa ponendo $\xi_1(\alpha) = 1$, scambiando tra loro β con δ ed operando un'opportuna omografia che lasci ferma la terna di piani π_1, π_2, π_3.

Esaminiamo ora il secondo caso, e cioè sussistano le (19), (20) con λ, ϱ, σ funzioni delle sole variabili γ, δ.

Se $h(\gamma, \delta)$ è un integrale, comunque fissato purchè $h \neq 0$, dell'equazione differenziale $\lambda X + \varrho X^\gamma + \sigma X^\delta = 0$, poniamo:

$$\psi = h(\gamma, \delta)\, \overline{\psi}(\alpha, \gamma, \delta), \qquad \xi = h(\gamma, \delta)\, \overline{\xi}(\beta, \gamma, \delta), \qquad \theta = h(\gamma, \delta)\, \overline{\theta}(\beta, \gamma, \delta);$$

sostituendo nelle (19), (20) si ottiene, tenendo conto che $\lambda h + \varrho h^\gamma + \sigma h^\delta = 0$ e che $h \neq 0$:

$$\varrho \overline{\psi}^\gamma + \sigma \overline{\psi}^\delta = \varrho \overline{\xi}^\gamma + \sigma \overline{\xi}^\delta = \varrho \overline{\theta}^\gamma + \sigma \overline{\theta}^\delta = 0$$

e se $g(\gamma, \delta)$ è un integrale, dipendente dalle sole variabili γ, δ, dell'equazione differenziale: $\varrho X^\gamma + \sigma X^\delta = 0$, risulta:

$$\overline{\psi} = \Psi[\alpha, g(\gamma, \delta)], \qquad \overline{\xi} = \Xi[\beta, g(\gamma, \delta)], \qquad \theta = \Theta[\beta, g(\gamma, \delta)],$$

e pertanto:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} h(\gamma, \delta)\, \Psi[\alpha, g(\gamma, \delta)] & \alpha h(\gamma, \delta)\, \Psi[\alpha, g(\gamma, \delta)] & \theta_2(\alpha)\, h(\gamma, \delta)\, \Psi[\alpha, g(\gamma, \delta)] \\ h(\gamma, \delta)\, \Xi[\beta, g(\gamma, \delta)] & h(\gamma, \delta)\, \Theta[\beta, g(\gamma, \delta)] & \beta h(\gamma, \delta)\, \Xi[\beta, g(\gamma, \delta)] \\ 1 & \gamma & \delta \end{Vmatrix}$$

od anche, posto $k(\gamma, \delta) = [h(\gamma, \delta)]^{-1}$:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \psi(\alpha, g) & \alpha \Psi(\alpha, g) & \theta_2(\alpha)\, \Psi(\alpha, g) \\ \Xi(\beta, g) & \Theta(\beta, g) & \beta\, \Xi(\beta, g) \\ k(\gamma, \delta) & \gamma k(\gamma, \delta) & \delta k(\gamma, \delta) \end{Vmatrix}.$$

Si presentano due possibilità:

A) $\dfrac{\partial (g, k)}{\partial (\gamma, \delta)} = 0$; in questo caso, poichè g non può essere costante (perchè altrimenti V_4 verificherebbe la condizione (π_{13})), sarà k una funzione di g, sicchè:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \psi_0(\alpha, g) & \alpha\psi_0(\alpha, g) & \theta_2(\alpha)\,\psi_0(\alpha, g) \\ \Xi(\beta, g) & \Theta(\beta, g) & \beta\,\Xi(\beta, g) \\ K(g) & \gamma\,K(g) & \delta K(g) \end{vmatrix}$$

od anche, posto $L(g) = [K(g)]^{-1}$, $\psi_0(\alpha, g)\,L(g) = \xi_0(\alpha, g)$, $\Xi(\beta, g)\,L(g) = \xi_3(\beta, g)$, $\Theta(\beta, g)\,L(g) = \xi_4(\beta, g)$:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \xi_0(\alpha, g) & \alpha\xi_0(\alpha, g) & \theta_2(\alpha)\,\xi_0(\alpha, g) \\ \xi_3(\beta, g) & \xi_4(\beta, g) & \beta\xi_3(\beta, g) \\ 1 & \gamma & \delta \end{vmatrix}.$$

Scambiando eventualmente tra loro le variabili γ e δ si può supporre $g^\delta \neq 0$ e si possono assumere come nuovi parametri α, β, γ, g ottenendo una matrice M della forma:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \xi_0(\alpha, \delta) & \alpha\xi_0(\alpha, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\xi_0(\alpha, \delta) \\ \xi_3(\beta, \delta) & \xi_4(\beta, \delta) & \beta\xi_3(\beta, \delta) \\ 1 & \gamma & \xi_8(\gamma, \delta) \end{vmatrix} \tag{23}$$

B) Si possono assumere come nuovi parametri α, β, k, g e quindi M si può assumere della forma:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \psi(\alpha, \delta) & \alpha\psi(\alpha, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\psi(\alpha, \delta) \\ \Xi(\beta, \delta) & \theta(\beta, \delta) & \beta\,\Xi(\beta, \delta) \\ \gamma & \gamma C(\gamma, \delta) & \gamma D(\gamma, \delta) \end{vmatrix} \tag{24}$$

che contiene come caso speciale la (23). La (24) può scriversi:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \theta_0(\alpha,\ \delta) & \alpha\theta_0(\alpha,\ \delta) & \theta_2(\alpha)\,\theta_0(\alpha,\ \delta) \\ \theta_3(\beta,\ \delta) & \theta_4(\beta,\ \delta) & \theta_5(\beta,\ \delta) \\ \gamma & \theta_7(\gamma,\ \delta) & \theta_8(\gamma,\ \delta) \end{Vmatrix}$$

e poichè le tre funzioni θ_3, θ_4, θ_5 non possono dipendere dalla sola variabile δ, si può disporre dei parametri in guisa che $\theta_3(\beta,\ \delta) \equiv \beta$ (eventualmente operando un'omografia nel piano π_2); e pertanto:

$$(25) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \theta_0(\alpha,\ \delta) & \alpha\theta_0(\alpha,\ \delta) & \theta_2(\alpha)\,\theta_0(\alpha,\ \delta) \\ \beta & \theta_4(\beta,\ \delta) & \theta_5(\beta,\ \delta) \\ \gamma & \theta_7(\gamma,\ \delta) & \theta_8(\gamma,\ \delta) \end{Vmatrix}.$$

4. – Osserviamo ora che:

1°) la (7) se $\omega_8^\gamma \neq 0$ rientra nella (22), come subito si riconosce ponendo $\omega_8(\beta,\ \gamma,\ \delta) = \gamma^*$; e se $\omega_8^\gamma \neq 0$ è del tipo (25): basta permutare circolarmente le tre variabili β, γ, δ e scambiare tra loro i piani π_2, π_3.

2°) la (8) rientra nella (22): basta scambiare β con δ e π_2 con π_3.

3°) la (13) rientra nella (25): basta scambiare β con δ.

4°) la (14) rientra nella (25): basta scambiare β con δ.

5°) la (17) rientra nella (6): basta scambiare β con δ e π_2 con π_3.

6°) la (23) può ridursi alla (25).

Si ha dunque che: *le V_4 differenziabili di S_8 le quali verificano le condizioni (π_1) (π_2) (π_3) (π_{23}) (ma non (π_{12}) e (π_{13})) si possono rappresentare in uno dei quattro modi seguenti*:

$$(\mathrm{I}) \qquad \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \beta\gamma & \gamma\theta_5(\alpha,\ \beta) \\ \delta & \delta\theta_7(\alpha,\beta) & \delta\theta_8(\alpha,\ \beta) \end{Vmatrix};$$

$$\text{(II)} \qquad \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \theta_2(\alpha)\,\beta \\ 1 & \gamma & \theta_5(\alpha,\gamma) \\ \theta_6(\alpha,\gamma,\delta) & \delta\theta_6(\alpha,\gamma,\delta) & \varphi(\alpha,\delta)\,\theta_6(\alpha,\gamma,\delta) \end{bmatrix};$$

$$\text{(III)} \qquad \begin{bmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \theta_5(\beta,\delta) \\ \delta & \theta_7(\beta,\gamma,\delta) & \Phi[\delta, \theta_7(\beta,\gamma,\delta)] \end{bmatrix};$$

$$\text{(IV)} \qquad \begin{bmatrix} \theta_0(\alpha,\beta) & \alpha\theta_0(\alpha,\beta) & \theta_2(\alpha)\,\theta_0(\alpha,\beta) \\ \gamma & \theta_4(\beta,\gamma) & \theta_5(\beta,\gamma) \\ \delta & \theta_7(\beta,\delta) & \theta_8(\beta,\delta) \end{bmatrix}.$$

5. – Determiniamo ora le V_4 differenziabili di S_8 le quali verificano le condizioni (π_1), (π_2), (π_3), (π_{23}), (π_{13}), ma non la condizione (π_{12}).

Esse rientrano intanto in uno dei tipi seguenti:

$$(26) \qquad M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\theta_3(\alpha) & \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\theta_4(\alpha) & \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\theta_5(\alpha) \\ \theta_6(\alpha,\beta,\gamma,\delta) & \theta_7(\alpha,\beta,\gamma,\delta) & \theta_8(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \end{bmatrix},$$

$$(27) \qquad M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\theta_3(\beta) & \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\theta_4(\beta) & \lambda(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\,\theta_5(\beta) \\ \theta_6(\alpha,\beta,\gamma,\delta) & \theta_7(\alpha,\beta,\gamma,\delta) & \theta_8(\alpha,\beta,\gamma,\delta) \end{bmatrix}.$$

Occupiamoci dapprima di varietà del tipo (26). Non può essere $\dfrac{\partial(\theta_6,\ \theta_7,\ \theta_8)}{\partial(\beta,\ \gamma,\ \delta)} \neq 0$, perchè altrimenti si potrebbe supporre $\theta_6 = \beta$, $\theta_7 = \gamma$, $\theta_8 = \delta$ e la condizione (π_2) esigerebbe:

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ 0 & 1 & \theta_2^\alpha \end{matrix} \right\| = 0$$

contro l'ipotesi che V_4 non appartenga ad alcun S_7. Pertanto, poichè λ, θ_6, θ_7, θ_8 devono dipendere essenzialmente da β, γ, δ, si può assumere:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta\theta_3(\alpha) & \beta\theta_4(\alpha) & \beta\theta_5(\alpha) \\ \gamma & \gamma\delta & \theta_8(\alpha, \beta, \gamma, \delta) \end{vmatrix}$$

con $\theta_8^\beta = 0$, in forza della condizione (π_2). La condizione (π_1) esige poi che $\theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma = 0$, ossia che θ_8 sia prodotto di γ per una funzione di α e δ. Dunque:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta\theta_3(\alpha) & \beta\theta_4(\alpha) & \beta\theta_5(\alpha) \\ \gamma & \gamma\delta & \gamma\theta_8(\alpha, \delta) \end{vmatrix};$$

e questa può ridursi — con scelta conveniente dei parametri — alla forma:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\theta_4(\alpha) & \beta\theta_5(\alpha) \\ \gamma & \gamma\delta & \gamma\theta_8(\alpha, \delta) \end{vmatrix}. \tag{28}$$

Per ciò che concerne le varietà di tipo (27), è utile distinguere due casi.

1º) Se $\lambda^\gamma = \lambda^\delta = 0$ si può assumere:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \lambda\theta_3(\beta) & \lambda\theta_4(\beta) & \lambda\theta_5(\beta) \\ \gamma & \delta & \theta_8(\alpha, \gamma, \delta) \end{vmatrix},$$

con

$$\begin{vmatrix} \lambda\theta_i & \lambda\theta_j & \theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta \\ \lambda^\alpha\theta_i & \lambda^\alpha\theta_j & \theta_8^\alpha \\ \lambda^\beta\theta_i + \lambda\theta_i^\beta & \lambda^\beta\theta_j + \lambda\theta_j^\beta & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (i, j = 3, 4, 5),$$

ossia:

$$\lambda\,(\theta_i\,\theta_j^\beta - \theta_i^\beta\,\theta_j)\,[\lambda^\alpha\,(\theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta) - \lambda\theta_8^\alpha] = 0\,;$$

e cioè, per l'ipotesi che V_4 non appartenga a spazi S_7:

$$\lambda^\alpha\,(\theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta) - \lambda\theta_8^\alpha = 0.$$

Si può subito escludere che $\theta_8^\alpha = \theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta = 0$, e cioè che $\theta_8 = \gamma f\left[\frac{\delta}{\gamma}\right]$, il che condurrebbe a varietà verificanti la condizione (π_{12}). Ne segue che $\lambda^\alpha\,\lambda^{-1}$ è funzione della sola variabile α sicchè λ è della forma $\lambda = H\,(\alpha)\,K\,(\beta)$ ed inoltre:

$$H^\alpha\,(\theta_8 - \gamma\,\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta) - H\theta_8^\alpha = 0\,;$$

ciò implica: $\theta_8 = \delta\Phi\left[\frac{\gamma}{\delta},\,\frac{H}{\delta}\right]$; ed M risulta della forma:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2\,(\alpha) \\ H\,(\alpha)\,K\,(\beta)\,\theta_3\,(\beta) & H\,(\alpha)\,K\,(\beta)\,\theta_4\,(\beta) & H\,(\alpha)\,K\,(\beta)\,\theta_5\,(\beta) \\ \gamma & \delta & \delta\Phi\left[\frac{\gamma}{\delta},\,\frac{\delta}{H}\right] \end{Vmatrix}$$

che con scelta opportuna dei parametri diviene:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \alpha & \theta_1\,(\alpha) & \theta_2\,(\alpha) \\ \beta & \theta_4\,(\beta) & \theta_5\,(\beta) \\ \gamma & \delta & \theta_8\,(\gamma,\,\delta) \end{Vmatrix}. \tag{29}$$

2°) Supponiamo ora che λ^γ e λ^δ non siano entrambe nulle, e separiamo due sottocasi.

A) $\dfrac{\partial\,(\theta_6,\,\theta_7,\,\theta_8)}{\partial\,(\gamma,\,\delta)} = 0$, sicchè θ_6, θ_7, θ_8 sono funzioni di α, β e di una funzione di α, β, γ, δ ed

$$M \equiv \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2\,(\alpha) \\ \lambda\theta_3\,(\beta) & \lambda\theta_4\,(\beta) & \lambda\theta_5\,(\beta) \\ \theta_6\,[\alpha,\beta,\varphi\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)] & \theta_7\,[\alpha,\beta,\varphi] & \theta_8\,[\alpha,\beta,\varphi] \end{Vmatrix}.$$

È lecito assumere λ e φ come nuove variabili γ e δ e cioè:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma\theta_3(\beta) & \gamma\theta_4(\beta) & \gamma\theta_5(\beta) \\ \theta_6(\alpha, \beta, \delta) & \theta_7(\alpha, \beta, \delta) & \theta_8(\alpha, \beta, \delta) \end{vmatrix}$$

od anche, con opportuna scelta dei parametri:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \gamma\beta & \gamma\omega_5(\beta) \\ \delta & \delta\omega_7(\alpha, \beta, \delta) & \delta\omega_8(\alpha, \beta, \delta) \end{vmatrix}$$

ove $\dfrac{\partial(\omega_7, \omega_8)}{\partial(\alpha, \delta)} = 0$ in forza della condizione (π_1). Si ottiene così la rappresentazione:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \gamma\beta & \gamma\omega_5(\beta) \\ \delta & \delta\Omega_7[\beta, \varphi(\alpha, \beta, \delta)] & \delta\Omega_8[\beta, \varphi(\alpha, \beta, \delta)] \end{vmatrix}.$$

Se $\varphi^\delta = 0$, si ha:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \gamma\beta & \gamma\omega_5(\beta) \\ \delta & \delta\omega_7(\alpha, \beta) & \delta\omega_8(\alpha, \beta) \end{vmatrix}; \tag{30}$$

se $\varphi^\delta \neq 0$, si può porre: $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $\gamma = \gamma^*$, $\varphi(\alpha, \beta, \delta) = \delta^*$ ed ottenere una rappresentazione della forma:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \gamma\beta & \gamma\omega_5(\beta) \\ \varrho(\alpha, \beta, \delta) & \varrho(\alpha, \beta, \delta)\,\Omega_7(\beta, \delta) & \varrho(\alpha, \beta, \delta)\,\Omega_8(\beta, \delta) \end{vmatrix},$$

od anche, dividendo per ϱ e ponendo $\frac{\gamma}{\varrho} = \gamma^*$, $\frac{1}{\varrho} = \psi$,

$$\begin{bmatrix} \psi(\alpha, \beta, \delta) & \alpha\psi(\alpha, \beta, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\psi(\alpha, \beta, \delta) \\ \gamma & \gamma\beta & \gamma\omega_5(\beta) \\ 1 & \Omega_7(\beta, \delta) & \Omega_8(\beta, \delta) \end{bmatrix};$$

ed anzi l'ipotesi che non sia soddisfatta la condizione (π_{12}) consente di supporre $\Omega_7(\beta, \delta) \equiv \delta$, e pertanto:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \theta(\alpha, \beta, \delta) & \alpha\theta(\alpha, \beta, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\theta(\alpha, \beta, \delta) \\ \gamma & \gamma\beta & \gamma\omega_5(\beta) \\ 1 & \delta & \theta_8(\beta, \delta) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

B) $\frac{\partial(\theta_6, \theta_7, \theta_8)}{\partial(\gamma, \delta)} \neq 0$. In tal caso si può supporre, tenendo conto della (π_2):

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \lambda\theta_3(\beta) & \lambda\theta_4(\beta) & \lambda\theta_5(\beta) \\ \gamma & \delta & \theta_8(\alpha, \gamma, \delta) \end{bmatrix},$$

e la condizione (π_1) significa che è nulla la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \theta_3(\lambda - \gamma\lambda^\gamma - \delta\lambda^\delta) & \theta_4(\lambda - \gamma\lambda^\gamma - \delta\lambda^\delta) & \theta_5(\lambda - \gamma\lambda^\gamma - \delta\lambda^\delta) & \theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta \\ \lambda^\alpha\,\theta_3 & \lambda^\alpha\,\theta_4 & \lambda^\alpha\,\theta_5 & \theta_8^\alpha \\ \lambda\theta_3^\beta + \lambda^\beta\,\theta_3 & \lambda\theta_4^\beta + \lambda^\beta\,\theta_4 & \lambda\theta_5^\beta + \lambda^\beta\,\theta_5 & 0 \end{Vmatrix},$$

e cioè:

$$\begin{vmatrix} \theta_i & \theta_j & \lambda^\alpha(\theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta) \\ \theta_i & \theta_j & (\lambda - \gamma\lambda^\gamma - \delta\lambda^\delta)\,\theta_8^\alpha \\ \lambda\theta_i^\beta + \lambda^\beta\,\theta_i & \lambda\theta_j^\beta + \lambda^\beta\,\theta_j & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (i, j = 3, 4, 5),$$

ossia:

$$\lambda\,(\theta_i\,\theta_j^\beta - \theta_i^\beta\,\theta_j)\,[\lambda^\alpha\,(\theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta) - (\lambda - \gamma\lambda^\gamma - \delta\lambda^\delta)\,\theta_8^\alpha] = 0\,.$$

Per le ipotesi fatte deve dunque essere:

$$\lambda^\alpha\,(\theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta) - (\lambda - \gamma\lambda^\gamma - \delta\lambda^\delta)\,\theta_8^\alpha = 0\,. \tag{32}$$

Se $\lambda^\alpha\,\theta_8^\alpha \neq 0$, la (32) implica che $\lambda\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ e $\theta_8\,(\alpha, \gamma, \delta)$ siano integrali di un'equazione differenziale della forma:

$$X - \gamma X^\gamma - \delta X^\delta - \varphi\,(\alpha, \gamma, \delta)\,X^\alpha = 0,$$

la quale, posto $X = \gamma Y$ dà:

$$\gamma Y^\gamma + \delta Y^\delta + \varphi\,(\alpha, \gamma, \delta)\,Y^\alpha = 0\,. \tag{33}$$

Posto $\lambda = \gamma\mu\,(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, $\theta_8 = \gamma\omega\,(\alpha, \gamma, \delta)$ risulta allora:

$$\lambda = \gamma\Phi\left[\beta, \frac{\delta}{\gamma}, \omega\right]$$

e quindi:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2\,(\alpha) \\ \gamma\Phi\left[\beta, \frac{\delta}{\gamma}, \omega\right]\theta_3\,(\beta) & \gamma\Phi\left[\beta, \frac{\delta}{\gamma}, \omega\right]\theta_4\,(\beta) & \gamma\Phi\left[\beta, \frac{\delta}{\gamma}, \omega\right]\theta_5\,(\beta) \\ \gamma & \delta & \gamma\omega\,(\alpha, \gamma, \delta) \end{vmatrix}.$$

Col cambiamento di variabili espresso dalle: $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $\frac{1}{\gamma} = \gamma^*$, $\frac{\delta}{\gamma} = \delta^*$ si ha, ponendo $\Phi\,(\beta^*, \delta^*, \omega^*)\,\theta_3\,(\beta^*) = \Lambda\,(\beta^*, \delta^*, g\,(\alpha^*, \gamma^*, \delta^*))$ e $\frac{\theta_i\,(\beta^*)}{\theta_3\,(\beta^*)} = \xi_i\,(\beta^*)$ $(i = 4, 5)$ e seguitando a scrivere $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in luogo di $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*$:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \gamma & \alpha\gamma & \theta_2\,(\alpha)\,\gamma \\ \Lambda\,(\beta, \delta, g) & \Lambda\,(\beta, \delta, g)\,\xi_4\,(\beta) & \Lambda\,(\beta, \delta, g)\,\xi_5\,(\beta) \\ 1 & \delta & g\,(\alpha, \gamma, \delta) \end{vmatrix},$$

od anche con un nuovo cambiamento di parametri:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \gamma & \alpha\gamma & \theta_2(\alpha) \\ \Lambda(\beta, \delta, g) & \Lambda(\beta, \delta, g)\,\beta & \Lambda(\beta, \delta, g)\,\theta_5(\beta) \\ 1 & \delta & g(\alpha, \gamma, \delta) \end{vmatrix}.$$

Se $g^\gamma = 0$ si trova:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \gamma & \alpha\gamma & \theta_2(\alpha)\,\gamma \\ \lambda(\alpha, \beta, \delta) & \lambda(\alpha, \beta, \delta)\,\beta & \lambda(\alpha, \beta, \delta)\,\theta_5(\beta) \\ 1 & \delta & g(\alpha, \delta) \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Se $g^\gamma \neq 0$ poniamo $g(\alpha, \gamma, \delta) = \gamma^*$ ed otteniamo una rappresentazione della forma:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \mu(\alpha, \gamma, \delta) & \alpha\mu(\alpha, \gamma, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\mu(\alpha, \gamma, \delta) \\ \lambda(\beta, \gamma, \delta) & \beta\lambda(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5(\beta)\,\lambda(\beta, \gamma, \delta) \\ 1 & \gamma & \delta \end{vmatrix}. \tag{35}$$

Riprendiamo la (32) nell'ipotesi $\lambda^\alpha\,\theta_8^\alpha = 0$.

Se $\lambda^a = \theta_8^\alpha = 0$, si perviene subito — con semplice cambiamento di parametri — alla rappresentazione:

$$M \equiv \begin{vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \lambda(\beta, \gamma, \delta) & \beta\lambda(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5(\beta)\,\lambda(\beta, \gamma, \delta) \\ \gamma & \delta & \theta_8(\gamma, \delta) \end{vmatrix}$$

che si riduce facilmente alla (35): basta porre $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $\gamma = \dfrac{1}{\gamma^*}$, $\delta = \dfrac{\delta^*}{\gamma^*}$, $\gamma^*\,\theta_8\left[\dfrac{1}{\gamma^*}, \dfrac{\delta^*}{\gamma^*}\right] = \varphi_8(\gamma^*, \delta^*)$, $\gamma^*\,\lambda\left[\beta^*, \dfrac{1}{\gamma^*}, \dfrac{\delta^*}{\gamma^*}\right] = \varrho(\beta^*, \gamma^*, \delta^*)$ per ottenere, scrivendo nuovamente $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ in luogo di $\alpha^*, \beta^*, \gamma^*, \delta^*$:

$$\begin{vmatrix} \gamma & \alpha\gamma & \theta_2(\alpha)\,\gamma \\ \varrho(\beta, \gamma, \delta) & \beta\varrho(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5(\beta)\,\varrho(\beta, \gamma, \delta) \\ 1 & \delta & \varphi_8(\gamma, \delta) \end{vmatrix};$$

e poichè non è verificata la condizione (π_{12}), riesce certamente $\varphi_8^\delta \neq 0$ e quindi, posto $\varphi_8(\gamma, \delta) = \delta^*$ si ha una rappresentazione del tipo:

$$\begin{Vmatrix} \mu(\gamma, \delta) & \alpha\mu(\gamma, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\mu(\gamma, \delta) \\ \xi(\beta, \gamma, \delta) & \beta\xi(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5(\beta)\,\xi(\beta, \gamma, \delta) \\ 1 & \delta & \gamma \end{Vmatrix}$$

che è caso speciale della (35).

Se $\lambda^\alpha = \lambda - \gamma\lambda^\gamma - \delta\lambda^\delta = 0$ si trova:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma\varphi\left[\beta, \dfrac{\delta}{\gamma}\right]\theta_3(\beta) & \gamma\varphi\left[\beta, \dfrac{\delta}{\gamma}\right]\theta_4(\beta) & \gamma\varphi\left[\beta, \dfrac{\delta}{\gamma}\right]\theta_5(\beta) \\ \gamma & \delta & \theta_8(\alpha, \gamma, \delta) \end{Vmatrix},$$

od anche, ponendo $\varphi\left[\beta, \dfrac{\delta}{\gamma}\right]\theta_3(\beta) = \lambda\left[\beta, \dfrac{\delta}{\gamma}\right]$, $\dfrac{\theta_i(\beta)}{\theta_3(\beta)} = \xi_i(\beta)$ $(i = 4, 5)$ e scrivendo $\delta\gamma$ in luogo di δ e poi β in luogo di $\xi_4(\beta)$ ed $\dfrac{1}{\gamma}$ in luogo di γ:

$$(36) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \gamma & \alpha\gamma & \theta_2(\alpha)\,\gamma \\ \lambda(\beta, \delta) & \beta\lambda(\beta, \delta) & \theta_5(\beta)\,\lambda(\beta, \delta) \\ 1 & \delta & \omega_8(\alpha, \gamma, \delta) \end{Vmatrix}.$$

Il caso $\theta_8^\alpha = \theta_8 - \gamma\theta_8^\gamma - \delta\theta_8^\delta = 0$ va escluso perchè condurrebbe a $\theta_8 = \delta\Phi\left[\dfrac{\gamma}{\delta}\right]$ e quindi ad una varietà per la quale è soddisfatta anche la condizione (π_{12}).

6. – Notiamo ora che la (29) è caso speciale della (35). Per ciò che riguarda la (36) essa è della forma (34) se $\omega_8^\gamma = 0$; se $\omega_8^\gamma \neq 0$ si può porre $\omega_8(\alpha, \gamma, \delta) = \gamma^*$, sicchè $\gamma = C(\alpha, \gamma^*, \delta)$ e si ha un caso speciale della (35). Inoltre la (31) si riduce alla (34) scambiando α con β e π_1 con π_2.

Si ottiene pertanto il seguente risultato: *le V_4 differenziabili di S_8 per le quali* *sono verificate le condizioni* (π_1), (π_2), (π_3), (π_{23}), (π_{13}), *ma non la* (π_{12}) *rientrano in uno dei quattro tipi seguenti:*

$$\text{(V)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\theta_4(\alpha) & \beta\theta_5(\alpha) \\ \gamma & \gamma\delta & \gamma\theta_8(\alpha, \delta) \end{bmatrix},$$

$$\text{(VI)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \gamma\beta & \gamma\omega_5(\beta) \\ \delta & \delta\omega_7(\alpha, \beta) & \delta\omega_8(\alpha, \beta) \end{bmatrix},$$

$$\text{(VII)} \qquad \begin{bmatrix} \gamma & \alpha\gamma & \theta_2(\alpha)\,\gamma \\ \lambda(\alpha, \beta, \delta) & \beta\lambda(\alpha, \beta, \delta) & \theta_5(\beta)\,\lambda(\alpha, \beta, \delta) \\ 1 & \delta & \theta_8(\alpha, \delta) \end{bmatrix},$$

$$\text{(VIII)} \qquad \begin{bmatrix} \lambda(\alpha, \gamma, \delta) & \alpha\lambda(\alpha, \gamma, \delta) & \theta_2(\alpha)\,\lambda(\alpha, \gamma, \delta) \\ \mu(\beta, \gamma, \delta) & \beta\mu(\beta, \gamma, \delta) & \theta_5(\beta)\,\mu(\beta, \gamma, \delta) \\ 1 & \gamma & \delta \end{bmatrix}.$$

7. – Conviene per il seguito riportare qui un risultato già ottenuto in [2]: *le* V_4 *differenziabili di* S_8 *per le quali sono verificate le tre condizioni* (π_{23}), (π_{31}), (π_{12}) — *e di conseguenza anche le tre condizioni* (π_1), (π_2), (π_3) — *rientrano in uno dei due tipi seguenti:*

$$\text{(IX)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \delta & \delta\beta & \delta\theta_5(\beta) \\ \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta) & \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\,\gamma & \lambda(\alpha, \beta, \gamma, \delta)\,\theta_8(\gamma) \end{bmatrix},$$

$$\text{(X)} \qquad \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \delta & \delta\beta & \delta\theta_5(\beta) \\ \gamma & \gamma g(\alpha, \beta) & \gamma\Phi_8[g(\alpha, \beta)] \end{bmatrix}.$$

PARTE II.

8. – Entro le dieci famiglie elencate nei nn. 4, 6, 7, determineremo ora le varietà i cui spazi tangenti sono tutti appoggiati anche al piano π_4, con l'ipotesi ulteriore che tutti gli elementi della matrice M siano anche dotati di derivate seconde continue. È presumibile che questa ipotesi non sia essenziale per la validità dei risultati che otterremo; essa tuttavia, oltre ad abbreviare notevolmente la ricerca, consente di superare alcune difficoltà che non sono riuscito a dominare ammettendo soltanto l'esistenza di derivate prime continue.

9. – Cominciamo con varietà della Iª famiglia, cioè:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \beta\gamma & \gamma\theta_5(\alpha, \beta) \\ \delta & \delta\theta_7(\alpha, \beta) & \delta\theta_8(\alpha, \beta) \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Si riconosce senza difficoltà che, per una varietà come la (37), la condizione necessaria e sufficiente affinchè sia soddisfatta la condizione (π_4) è che sia nulla la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \beta-\alpha & \theta_5-\theta_2 & \theta_7-\alpha & \theta_8-\theta_2 \\ -1 & \gamma\theta_5^\alpha-\theta_2^\alpha & \delta\theta_7^\alpha-1 & \delta\theta_8^\alpha-\theta_2^\alpha \\ \gamma & \gamma\theta_5^\beta & \delta\theta_7^\beta & \delta\theta_8^\beta \end{matrix} \right\| ;$$

i minori di terz'ordine di questa matrice sono polinomi di secondo grado in γ e δ che devono aver nulli tutti i coefficienti. In particolare, nel minore che si ottiene sopprimendo la seconda colonna, il coefficiente di δ^2 è $(\beta-\alpha)\dfrac{\partial(\theta_7, \theta_8)}{\partial(\alpha, \beta)}$, ed è quindi nullo soltanto se V_4 soddisfa anche la condizione (π_{12}).

Possiamo dunque tralasciare questo caso perchè esso rientrerà in uno dei casi seguenti.

10. – Esaminiamo insieme le varietà delle famiglia II e VII, e cioè:

$$(38)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \theta_2(\alpha)\,\beta \\ 1 & \gamma & \theta_5(\alpha, \gamma) \\ \theta_6(\alpha, \gamma, \delta) & \delta\theta_6(\alpha, \gamma, \delta) & \varphi(\alpha, \delta)\,\theta_6(\alpha, \gamma, \delta) \end{bmatrix},$$

$$(39)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} \gamma & \alpha\gamma & \theta_2(\alpha)\,\gamma \\ \lambda(\alpha, \beta, \delta) & \beta\lambda(\alpha, \beta, \delta) & \theta_5(\beta)\,\lambda(\alpha, \beta, \delta) \\ 1 & \delta & \theta_8(\alpha, \delta) \end{bmatrix}.$$

La (39) è caso speciale della (38); essa infatti, scrivendo δ, β, γ in luogo di β, γ, δ e scambiando tra loro π_2 con π_3, diviene:

$$(40)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \theta_2(\alpha)\,\beta \\ 1 & \gamma & \theta_8(\alpha, \gamma) \\ \lambda(\alpha, \gamma, \delta) & \delta\lambda(\alpha, \gamma, \delta) & \theta_5(\delta)\,\lambda(\alpha, \gamma, \delta) \end{bmatrix};$$

e di questa forma è la (38) se $\varphi^{\alpha} = 0$.

Ciò premesso, notiamo che per una varietà della forma (38), la condizione (π_4) equivale all'annullarsi della matrice:

$$\begin{Vmatrix} 1-\beta & \gamma-\alpha\beta & \theta_5(\alpha,\gamma)-\beta\theta_2(\alpha) & \theta_6(\alpha,\gamma,\delta)-\beta & \delta\theta_6-\alpha\beta & \varphi(\alpha,\delta)\theta_6-\beta\theta_2(\alpha) \\ 0 & -\beta & \theta_5^{\alpha}-\beta\theta_2^{\alpha} & \theta_6^{\alpha} & \delta\theta_6^{\alpha}-\beta & \varphi^{\alpha}\theta_6+\varphi\theta_6^{\alpha}-\beta\theta_2^{\alpha} \\ 1 & \alpha & \theta_2 & 1 & \alpha & \theta_2 \\ 0 & 1 & \theta_5^{\gamma} & \theta_6^{\gamma} & \delta\theta_6^{\gamma} & \varphi\theta_6^{\gamma} \\ 0 & 0 & 0 & \theta_6^{\delta} & \theta_6+\delta\theta_6^{\delta} & \varphi^{\delta}\,\theta_6+\varphi\theta_6^{\delta} \end{Vmatrix}.$$

Poichè gli elementi dell'ultima riga di questa matrice non possono essere tutti nulli, esisteranno intanto quattro funzioni A, B, C, D, non tutte nulle, delle quattro variabili α, β, γ, δ, per le quali risulti:

$$\begin{cases} A\,(1-\beta)+C=0 \\ A\,(\gamma-\alpha\beta)-B\beta+C\alpha+D=0 \\ A\,(\theta_5-\beta\theta_2)+B\,(\theta_5^x-\beta\theta_2^x)+C\theta_2+D\theta_5^\gamma=0\,, \end{cases}$$

ossia:

$$C=A\,(\beta-1), \tag{41}$$

$$\begin{cases} A\,(\gamma-\alpha)-B\beta+D=0 \\ A\,(\theta_5-\theta_2)+B\,(\theta_5^x-\beta\theta_2^x)+D\theta_5^\gamma=0\,. \end{cases} \tag{42}$$

Le (42) costituiscono un sistema lineare ed omogeneo nelle tre variabili A, B, D, avente non nulla la matrice dei coefficienti, perchè se fosse ad esempio:

$$\begin{vmatrix} -\beta & 1 \\ \theta_5^x-\beta\theta_2^x & \theta_5^\gamma \end{vmatrix}=0\,,$$

ossia:

$$\beta\left\{\theta_5^\gamma(\alpha,\gamma)-\theta_2^x(\alpha)\right\}-\theta_5^x(\alpha,\gamma)\equiv 0,$$

risulterebbe addirittura $\theta_5^x=0$, $\theta_5^\gamma-\theta_2^x=0$; θ_5 sarebbe funzione della sola variabile γ e θ_5^γ, θ_2^x sarebbero uguali ad una medesima costante: V_4 apparterebbe allora a spazi di dimensione $\leqslant 6$.

Dalle (41), (42) si deduce allora:

$$A=\sigma A_0,\qquad B=\sigma B_0,\qquad C=\sigma C_0,\qquad D=\sigma D_0$$

con σ funzione non nulla ed:

$$\begin{cases} A_0=\beta\,(\theta_5^\gamma-\theta_2^x)-\theta_5^x, & B_0=\theta_5-\theta_2-(\gamma-\alpha)\,\theta_5^\gamma \\ C_0=(\beta-1)\,[\beta\,(\theta_5^\gamma-\theta_2^x)-\theta_5^x], & D_0=(\gamma-\alpha)\,(\theta_5^x-\beta\theta_2^x)-\beta\,(\theta_5-\theta_2). \end{cases} \tag{43}$$

Deve inoltre esistere una funzione $E_0(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tale che:

$$\begin{cases} A_0(\theta_6 - \beta) + B_0\,\theta_6^\alpha + C_0 + D_0\,\theta_6^\gamma + E_0\,\theta_6^\delta = 0 \\ A_0(\delta\theta_6 - \alpha\beta) + B_0(\delta\theta_6^\alpha - \beta) + C_0\,\alpha + D_0\,\delta\theta_6^\gamma + E_0(\theta_6 + \delta\theta_6^\delta) = 0 \\ A_0(\varphi\theta_6 - \alpha\theta_2) + B_0(\varphi^\alpha\,\theta_6 + \varphi\theta_6^\alpha - \beta\theta_2^\alpha) + C_0\,\theta_2 + D_0\,\varphi\theta_6^\gamma + E_0(\varphi^\delta\,\theta_6 + \varphi\theta_6^\delta) = 0, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} A_0(\theta_6 - \beta) + B_0\,\theta_6^\alpha + C_0 + D_0\,\theta_6^\gamma + E_0\,\theta_6^\delta = 0 \\ (A_0\,\beta - C_0)(\delta - \alpha) - B_0\,\beta + E_0\,\theta_6 = 0 \\ (A_0\,\beta - C_0)(\varphi - \theta_2) - B_0(\varphi^\alpha\,\theta_6 - \beta\theta_2^\alpha) + E_0\,\theta_6\,\varphi^\delta = 0\,. \end{cases}$$

Poichè $C_0 = A_0(\beta - 1)$, si ha $A_0\,\beta - C_0 = A_0$ e quindi:

$$(44) \qquad \begin{cases} A_0(\delta - \alpha) - B_0\,\beta + E_0\,\theta_6 = 0 \\ A_0(\varphi - \theta_2) - B_0(\varphi^\alpha\,\theta_6 - \beta\theta_2^\alpha) + E_0\,\theta_6\,\varphi^\delta = 0\,; \end{cases}$$

eliminando dalle (44) $E_0\,\theta_6$ e tenendo conto delle (43) si ottiene:

$$(45) \qquad \beta\left\{(\theta_5^\gamma - \theta_2^\alpha)\,[\varphi - \theta_2 + (\alpha - \delta)\,\varphi^\delta] + (\varphi^\delta + \theta_2^\alpha)\,[\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\,\theta_5^\gamma]\right\} -$$
$$- \left\{\theta_5^\alpha\,[\varphi - \theta_2 + (\alpha - \delta)\,\varphi^\delta] + \varphi^\alpha\,\theta_6\,[\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\,\theta_5^\gamma]\right\} = 0.$$

Poichè il primo membro della (45) è un polinomio di primo grado in β, risulterà:

$$(46) \qquad (\theta_5^\gamma - \theta_2^\alpha)\,[\varphi - \theta_2 + (\alpha - \delta)\,\varphi^\delta] + (\varphi^\delta + \theta_2^\alpha)\,[\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\,\theta_5^\gamma] = 0,$$

$$(47) \qquad \theta_5^\alpha\,[\varphi - \theta_2 + (\alpha - \delta)\,\varphi^\delta] + \varphi^\alpha\,\theta_6\,[\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\,\theta_5^\gamma] = 0\,.$$

Derivando i due membri della (46) rispetto a δ si ottiene:

$$\varphi^{\delta\delta}\,[(\alpha - \delta)(\theta_5^\gamma - \theta_2^\alpha) + \theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\,\theta_5^\gamma] = 0\,,$$

e si vede facilmente che deve essere $\varphi^{\delta\delta} = 0$, perchè in caso contrario avremmo:

$$(\alpha - \delta)(\theta_5^\gamma - \theta_2^\alpha) + \theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\,\theta_5^\gamma = 0$$

e quindi — tenendo conto che il primo membro è lineare rispetto a δ —:

$$\theta_5^\gamma - \theta_2^\alpha = 0, \tag{48}$$

$$\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma = 0; \tag{49}$$

dalle (48), (49) segue $\theta_5 = \theta_2 + (\gamma - \alpha)\, \theta_2^\alpha$ e quindi $\theta_5^\alpha = (\gamma - \alpha)\, \theta_2^{\alpha\alpha}$.

La (47), tenendo conto della (49) diventa:

$$\theta_5^\alpha\, [\varphi - \theta_2 + (\alpha - \delta)\, \varphi^\delta] = 0;$$

ma $\theta_5^\alpha \neq 0$, perchè altrimenti avremmo $\theta_2^{\alpha\alpha} = 0$ e θ_2 sarebbe della forma $m\alpha + n$ e V_4 apparterrebbe a qualche S_7. Dunque: $\varphi - \theta_2 + (\alpha - \delta)\, \varphi^\delta = 0$, e di qui, derivando i due membri rispetto a δ: $(\alpha - \delta)\, \varphi^{\delta\delta} = 0$.

Sarà dunque $\varphi^{\delta\delta} = 0$ ossia $\varphi = \lambda(\alpha)\, \delta + \mu(\alpha)$. Ciò consente subito di escludere le varietà di tipo (40) (famiglia (VII)), perchè se $\varphi^\alpha = 0$ si avrebbe $\varphi = m\delta + n$ con m, n costanti, e V_4 apparterrebbe a qualche S_7.

Le (46), (47), posto $\varphi = \lambda(\alpha)\, \delta + \mu(\alpha)$, divengono:

$$(\theta_5^\gamma - \theta_2^\alpha) \left\{ \mu(\alpha) - \theta_2 + \alpha\, \lambda(\alpha) \right\} + \left\{ \lambda(\alpha) + \theta_2^\alpha \right\} \left\{ \theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma \right\} = 0, \tag{50}$$

$$\theta_5^\alpha \left\{ \mu(\alpha) - \theta_2 + \alpha\lambda(\alpha) \right\} + \theta_6\, (\delta\lambda^\alpha + \mu^\alpha) \left\{ \theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma \right\} = 0. \tag{51}$$

Derivando rispetto a γ i due membri della (50) si ha inoltre:

$$\theta_5^{\gamma\gamma}\, [\mu - \theta_2 + \alpha\lambda - \lambda(\gamma - \alpha)\, \theta_2^\alpha] = 0,$$

e si vede senza difficoltà che deve essere $\theta_5^{\gamma\gamma} = 0$; infatti dall'identità: $\mu - \theta_2 + \alpha\lambda - \lambda(\gamma - \alpha)\, \theta_2^\alpha \equiv 0$, tenendo conto che il primo membro è un polinomio di primo grado rispetto a γ, si deduce: $\lambda\theta_2^\alpha = \mu - \theta_2 + \alpha\lambda = 0$. L'ipotesi $\theta_2^\alpha = 0$ conduce a varietà di S_7; se poi $\lambda = \mu - \theta_2 = 0$ la (51) diviene: $\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma = 0$ e di qui, derivando i due membri rispetto a γ: $\theta_5^{\gamma\gamma} = 0$.

Dovrà allora essere $\theta_5^\alpha \neq 0$, perchè altrimenti $\theta_5 = m\gamma + n$, con m, n costanti, e V_4 apparterrebbe a qualche S_7; quindi la (51), poichè $\theta_5^\alpha\, \theta_6\, (\delta\lambda^\alpha + \mu^\alpha) \neq 0$, assicura che $\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma$ e $\mu - \theta_2 + \alpha\lambda$ *sono entrambi uguali a zero od entrambi differenti da zero.*

11. – Supponiamo dapprima:

$$[\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma]\, [\mu - \theta_2 + \alpha\lambda] \neq 0\,.$$

Dalla (51), derivando i due membri rispetto a γ e tenendo conto che $\theta_5^{\gamma\gamma} = 0$, si ha:

$$\theta_5^{\alpha\gamma} \{ \mu - \theta_2 + \alpha\lambda \} + \theta_6^\gamma\, (\delta\lambda^\alpha + \mu^\alpha) \{ \theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma \} = 0\,; \tag{52}$$

e le (51), (52) implicano che $\theta_5^\alpha\, \theta_6^\gamma - \theta_5^{\alpha\gamma}\, \theta_6 = 0$, ossia $\dfrac{\partial}{\partial\gamma} \left[\dfrac{\theta_6}{\theta_5^\alpha} \right] = 0$, onde $\theta_6 = \theta_5^\alpha\, \omega\, (\gamma, \delta)$. La (51) fornisce allora:

$$\mu - \theta_2 + \alpha\lambda + (\delta\lambda^\alpha + \mu^\alpha) \{ \theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma \}\, \omega_6\, (\gamma, \delta) = 0, \tag{53}$$

e di qui, derivando rispetto a γ e sempre ricordando che $\theta_5^{\gamma\gamma} = 0$:

$$\omega_6^\gamma \{ \theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\, \theta_5^\gamma \} = 0,$$

eppertanto $\omega_6^\gamma = 0$ e quindi $\theta_6 = \theta_5^\alpha\, \omega\, (\delta)$.

Posto: $\theta_5 = \xi\, (\alpha)\, \gamma + \eta\, (\alpha)$, risulta $\theta_6 = (\xi^\alpha \gamma + \eta^\alpha)\, \omega\, (\delta)$.

Derivando due volte rispetto a δ i due membri della (53) si ottiene:

$$\lambda^\alpha\, \omega_6 + (\delta\lambda^\alpha + \mu^\alpha)\, \omega_6^\delta = 0, \tag{54}$$

$$2\lambda^\alpha\, \omega_6^\delta + (\delta\lambda^\alpha + \mu^\alpha)\, \omega_6^{\delta\delta} = 0 \tag{55}$$

e ciò assicura che:

$$\omega_6\, \omega_6^{\delta\delta} - 2\, (\omega_6^\delta)^2 = 0. \tag{56}$$

La (56) conduce a due casi: 1°) $\omega_6^\delta = 0$; 2°) $\omega_6^\delta \neq 0$. Se $\omega_6^\delta = 0$ e quindi $\lambda^\alpha = 0$, poniamo $\omega_6 = k$, $\lambda = l$ (k, l costanti); si ottiene:

$$\theta_5 = \xi\, (\alpha)\, \gamma + \eta\, (\alpha), \qquad \varphi = l\delta + \mu\, (\alpha), \qquad \theta_6 = k\, (\xi^\alpha \gamma + \eta^\alpha)$$

e quindi

$$M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \beta\alpha & \beta\theta_2(\alpha) \\ 1 & \gamma & \xi(\alpha)\gamma + \eta(\alpha) \\ k(\xi^\alpha \gamma + \eta^\alpha) & k(\xi^\alpha \gamma + \eta^\alpha)\delta & k(\xi^\alpha \gamma + \eta^\alpha)[l\delta + \mu(\alpha)] \end{bmatrix}$$

con $\mu(\alpha) \not\equiv 0$, perchè altrimenti V_4 apparterrebbe a qualche S_7.

Poichè ξ ed η non possono essere due costanti, per l'ipotesi che V_7 non appartenga a spazi di dimensione < 8, possiamo dividere tutti gli elementi di M per $\xi^\alpha \gamma + \eta^\alpha$, sicchè — assumendo, com'è lecito, $k = 1$ —:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\beta}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} & \dfrac{\alpha\beta}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} & \dfrac{\theta_2(\alpha)\beta}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} \\ \dfrac{1}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} & \dfrac{\gamma}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} & \dfrac{\gamma\xi + \eta}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} \\ 1 & \delta & l\delta + \mu(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Se $\xi^\alpha = 0$ (e quindi $\eta^\alpha \neq 0$), possiamo porre

$$\alpha = \alpha^*, \quad \frac{\beta}{\eta^\alpha} = \beta^*, \quad \frac{\gamma}{\eta^\alpha} = \gamma^*, \quad \delta = \delta^*, \quad \frac{1}{\eta^\alpha} = A(\alpha), \quad \frac{\eta}{\eta^\alpha} = B(\alpha)$$

e scrivere M nella forma:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ A(\alpha) & \gamma & m\gamma + B(\alpha) \\ 1 & \delta & l\delta + \mu \end{bmatrix};$$

e sarà $m \neq 0$, per l'ipotesi che V_4 non sia un cono, sicchè si può supporre $m = 1$. Poichè V_4 verifichi la condizione (π_4), la matrice

$$\begin{Vmatrix} A - \beta & \gamma - \alpha\beta & \gamma + B - \beta\theta_2 & 1 - \beta & \delta - \alpha\beta & l\delta + \mu - \beta\theta_2 \\ A^\alpha & -\beta & B^\alpha - \beta\theta_2^\alpha & 0 & -\beta & \mu^\alpha - \beta\theta_2^\alpha \\ 1 & \alpha & \theta_2 & 1 & \alpha & \theta_2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l \end{Vmatrix}$$

deve avere caratteristica quattro; deve esser dunque nulla la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} A-1 & B+\alpha-\theta_2 & \mu-\theta_2+l\alpha \\ A^x & B^a-\beta\theta_2^x+\beta & \mu^x-\beta\theta_2^x+l\beta \end{matrix} \right\| ;$$

d'altra parte il minore che si ottiene da quest'ultima matrice escludendo l'ultima colonna è:

$$(A-1)\,[B^x-\beta\,(\theta_2^x-1)]-A^x\,[B+\alpha-\theta_2]$$

ed è lineare rispetto a β. Se esso è nullo identicamente risulta $(A-1)\,(\theta_2^x-1)=0$ e quindi V_4 appartiene a qualche S_7.

Si deve supporre $\xi^x \neq 0$, e si può effettuare il cambiamento di parametri espresso dalle:

$$\alpha=\alpha^*, \quad \frac{\beta}{\gamma\xi^\alpha+\eta^\alpha}=\beta^*, \quad \frac{1}{\gamma\xi^\alpha+\eta^a}=\gamma^*, \quad \delta=\delta^*,$$

e quindi, seguitando a scrivere α, β, γ, δ in luogo di α^*, β^*, γ^*, δ^*, ed assumendo $l=1$ (il che è lecito per l'ipotesi che V_4 non sia un cono), si può scrivere:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ \gamma & \dfrac{1-\eta^x\gamma}{\xi^x} & \xi\,\dfrac{1-\eta^x\gamma}{\xi^a}+\eta\gamma \\ 1 & \delta & \delta+\mu \end{bmatrix};$$

Si tratta dunque di una rappresentazione della forma:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ \gamma & A+B\gamma & C+D\gamma \\ 1 & \delta & \delta+\mu \end{bmatrix}$$

ove θ_2, A, B, C, D, μ sono funzioni della sola variabile α, con $\mu^{\alpha} \neq 0$, tali che sia quattro il rango della matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \gamma - \beta & A + B\gamma - \alpha\beta & C + D\gamma - \beta\theta_2 & 1 - \beta & \delta - \alpha\beta & \delta + \mu - \beta\theta_2 \\ 0 & A^{\alpha} + B^{\alpha}\gamma - \beta & C^{\alpha} + D^{\alpha}\gamma - \beta\theta_2^{\alpha} & 0 & -\beta & \mu^{\alpha} - \beta\theta_2^{\alpha} \\ 1 & \alpha & \theta_2 & 1 & \alpha & \theta_2 \\ 1 & B & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\|$$

e cioè tali che abbia rango due la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} A + B - \alpha & C + D - \theta_2 & -\alpha & \mu - \theta_2 \\ A^{\alpha} + \gamma B^{\alpha} - \beta & C^{\alpha} + \gamma D^{\alpha} - \beta\theta_2^{\alpha} & -\beta & \mu^{\alpha} - \beta\theta_2^{\alpha} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right\| .$$

Poichè $A^{\alpha} + \gamma B^{\alpha} - \beta \neq 0$, ciò equivale alle:

$$(56^*) \qquad \left| \begin{matrix} A+B-\alpha & C+D-\theta_2 \\ A^{\alpha}+\gamma B^{\alpha}-\beta & C^{\alpha}+\gamma D^{\alpha}-\beta\theta_2^{\alpha} \end{matrix} \right| = \left| \begin{matrix} A+B-\alpha & -\alpha & \mu-\theta_2 \\ A^{\alpha}+\gamma B^{\alpha}-\beta & -\beta & \mu^{\alpha}-\beta\theta_2^{\alpha} \\ 0 & 1 & 1 \end{matrix} \right| = 0 .$$

Poichè i due determinanti che compaiono nelle (56*) sono polinomi di primo grado in β e γ e poichè, per le attuali ipotesi, risulta $\mu - \theta_2 + \alpha = \mu - \theta_2 + \alpha\lambda \neq 0$, deve intanto essere $B^{\alpha} = 0$: ciò risulta annullando il coefficiente di γ nel secondo dei due determinanti (56*). Il coefficiente di γ nel primo determinante riesce allora: $D^{\alpha}(A + B - \alpha)$. Ma $A + B - \alpha \neq 0$ perchè altrimenti risulterebbe: $(A^{\alpha} + \gamma B^{\alpha} - \beta)(\alpha + \mu - \theta_2) = 0$, contro le ipotesi ammesse. Ne segue: $D^{\alpha} = 0$; pertanto M rappresenta il cono che si ottiene proiettando dal punto $(0, 0, 0, 1, B, D, 0, 0, 0)$ la V_3 luogo del punto $(\beta, \alpha\beta, \beta\theta_2, 0, A, C, 1, \delta, \delta + \mu)$.

Si conclude così che il caso in cui la (56) sia soddisfatta in quanto $\omega_6^{\delta} = 0$, va escluso.

Riprendiamo allora le (54), (56) supponendo $\omega_6^\delta \neq 0$. La (54) assicura che $\lambda^\alpha \neq 0$; essa può scriversi:

$$\frac{\omega_6^\delta}{\omega_6} = -\frac{1}{\delta + (\mu^\alpha/\lambda^\alpha)}$$

e mostra che $\mu^\alpha/\lambda^\alpha$ deve essere una costante. Posto $\mu^\alpha/\lambda^\alpha = m$, si ha: $\omega_6 = n/(\delta + m)$, $\mu = m\lambda + p$ (ove n, p sono due costanti) e quindi:

$$\theta_5 = \gamma\xi(\alpha) + \eta(\alpha),$$

$$\theta_6 = (\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha)\, n/(\delta + m),$$

$$\varphi(\alpha\delta) = \lambda\delta + \mu = (m + \delta)\,\lambda(\alpha) + p\,.$$

Assumendo com'è lecito $n = 1$, si ha per V_4 la rappresentazione:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ 1 & \gamma & \gamma\xi(\alpha) + \eta(\alpha) \\ \dfrac{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha}{\delta + m} & \delta\,\dfrac{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha}{\delta + m} & [\lambda(\alpha)\,\delta + \mu(\alpha)]\,\dfrac{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha}{\delta + m} \end{bmatrix},$$

od anche, ponendo $\dfrac{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha}{\delta + m} = \delta^*$ e scrivendo nuovamente δ in luogo di δ^*:

$$(57)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ 1 & \gamma & \gamma\xi + \eta \\ \delta & \gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha - m\delta & \lambda(\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha) - (m\lambda - \mu)\,\delta \end{bmatrix};$$

Se $\xi^\alpha = 0$ si ha una rappresentazione della forma:

$$(58)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ 1 & \gamma & K\gamma + \eta(\alpha) \\ \delta & A(\alpha) - m\delta & B(\alpha) + C(\alpha)\,\delta \end{bmatrix};$$

Se $\xi^\alpha \neq 0$, dividiamo tutti gli elementi della matrice (57) per $\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha$ e poniamo: $\dfrac{\beta}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} = \beta^*$, $\dfrac{\delta}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} = \delta^*$, $\dfrac{1}{\gamma\xi^\alpha + \eta^\alpha} = \gamma^*$; seguitando a scrivere β, γ, δ in luogo di β^*, γ^*, δ^*, si ottiene:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \theta_2(\alpha)\,\beta \\ \gamma & \dfrac{1-\eta^\alpha\gamma}{\xi^\alpha} & \xi\,\dfrac{1-\eta^\alpha\gamma}{\xi^\alpha} + \eta\gamma \\ \delta & 1 - m\delta & \lambda - (m\lambda - \mu)\,\delta \end{vmatrix}$$

che è del tipo:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \theta_2(\alpha)\,\beta \\ \gamma & A(\alpha) + \gamma B(\alpha) & C(\alpha) + \gamma D(\alpha) \\ \delta & 1 - m\delta & E(\alpha) + F(\alpha)\,\delta \end{vmatrix}. \tag{59}$$

Le (58), (59) rientrano entrambe nella:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ \gamma & A(\alpha) + \gamma B(\alpha) & C(\alpha) + \gamma D(\alpha) \\ \delta & E(\alpha) + \delta F(\alpha) & G(\alpha) + \delta H(\alpha) \end{vmatrix}; \tag{60}$$

ed affinchè una varietà come la (60) soddisfi alla condizione (π_4) è necessario e sufficiente, come si riconosce senza difficoltà, che sia nulla la matrice:

$$\begin{Vmatrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ A^\alpha + \gamma B^\alpha - \beta & E^\alpha + \delta F^\alpha - \beta & C^\alpha + \gamma D^\alpha - \beta\theta_2^\alpha & G^\alpha + \delta H^\alpha - \beta\theta_2^\alpha \end{Vmatrix}$$

i cui minori di terz'ordine sono polinomi di primo grado nelle variabili β, γ, δ. Ciò implica l'annullarsi delle quattro matrici:

$$(61)\qquad \left\|\begin{matrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ A^\alpha & E^\alpha & C^\alpha & G^\alpha \end{matrix}\right\|,$$

$$(62)\qquad \left\|\begin{matrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ 1 & 1 & \theta_2^\alpha & \theta_2^\alpha \end{matrix}\right\|,$$

$$(63)\qquad \left\|\begin{matrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ B^\alpha & 0 & D^\alpha & 0 \end{matrix}\right\|,$$

$$(64)\qquad \left\|\begin{matrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ 0 & F^\alpha & 0 & H^\alpha \end{matrix}\right\|.$$

Un primo caso possibile è quello in cui sia nulla la matrice:

$$(65)\qquad \left\|\begin{matrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \end{matrix}\right\|.$$

Ora gli elementi della prima orizzontale della (65) non possono essere tutti uguali a zero, perchè altrimenti la matrice (60) rappresenterebbe una varietà di dimensione $\leqslant 3$; possono invece esser tutti nulli gli elementi della seconda orizzontale, e quindi:

$$(66)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ \gamma & A + \alpha\gamma & C + \gamma\theta_2(\alpha) \\ \delta & E + \alpha\delta & G + \delta\theta_2(\alpha) \end{bmatrix}.$$

Escluso questo caso, supponiamo che sia nulla la matrice (65) e che sia ad esempio: $\alpha - B \neq 0$; risulta:

$$E = (\alpha - F)\, K(\alpha), \qquad C = (\theta_2 - D)\, K(\alpha), \qquad G = (\theta_2 - H)\, K(\alpha)$$

con $K = A/(\alpha - B)$, e pertanto:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \beta & \alpha\beta & \theta_2\,\beta \\ \gamma & A + \gamma B & (\theta_2 - D)\, K + \gamma D \\ \delta & (\alpha - F)\, K + \delta F & (\theta_2 - H)\, K + \delta H \end{Vmatrix};$$

e ponendo $\delta - K = \delta^*$, $\gamma - K = \gamma^*$:

$$(67) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ \gamma + K & \gamma B + \alpha K & \gamma D + \theta_2\, K \\ \delta + K & \delta F + \alpha K & \delta H + \theta_2\, K \end{Vmatrix};$$

ponendo infine $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^* K(\alpha^*)$, $\gamma = \gamma^* K(\alpha^*)$, $\delta = \delta^* K(\alpha^*)$ (il che è lecito in quanto $K \neq 0$ perchè altrimenti M rappresenterebbe una varietà di dimensione < 4) si ha:

$$(68) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ 1 + \gamma & \alpha + B\gamma & \theta_2 + D\gamma \\ 1 + \delta & \alpha + F\delta & \theta_2 + H\delta \end{Vmatrix}.$$

Abbiamo così due prime famiglie di V_4 di S_8 soddisfacenti alle quattro condizioni (π_i) ed inoltre alla (π_{23}): le varietà rappresentabili nella forma (66) *e quelle del tipo* (68). *Si tratta di V_4 costituite da ∞^1 spazi lineari S_3 appoggiati ai quattro piani π_i.* Una varietà (66) presenta inoltre la particolarità che ciascuno dei suoi S_4 tangenti sega π_1, π_2, π_3, π_4 in quattro punti complanari.

Supponiamo ora che non sia nulla la matrice (65).

Poichè B e D non possono essere entrambe costanti, chè altrimenti la matrice (60) rappresenterebbe un cono, e similmente F, H non possono essere due costanti, l'annullarsi delle matrici (63) (64) implica intanto che:

$$
(69) \qquad \begin{vmatrix} E & G \\ \alpha - F & \theta_2 - H \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & C \\ \alpha - B & \theta_2 - D \end{vmatrix} = 0
$$

Detti allora p_{ik} i minori della matrice (65), sicchè $p_{13} = p_{24} = 0$, l'annullarsi delle matrici (61), (62), (64) assicura che:

$$
\begin{cases} E^\alpha p_{14} - G^x p_{12} = 0 \\ p_{14} - \theta_2^x p_{12} = 0 \\ F^\alpha p_{14} - H^x p_{12} = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} E^x p_{34} + G^x p_{23} = 0 \\ p_{34} + \theta_2^\alpha p_{23} = 0 \\ F^x p_{34} + H^x p_{23} = 0 \end{cases}
$$

e quindi, poichè i minori p_{ik} non sono tutti nulli:

$$
\left\| \begin{matrix} 1 & E^x & F^\alpha \\ \theta_2^x & G^x & H^x \end{matrix} \right\| = 0 .
$$

Similmente, poichè sono nulle le matrici (61), (62), (63):

$$
\left\| \begin{matrix} 1 & A^\alpha & B^x \\ \theta_2^x & C^x & D^x \end{matrix} \right\| = 0 .
$$

Risulta dunque:

$$
(70) \qquad C^x = A^\alpha \theta_2^x, \quad D^\alpha = B^x \theta_2^\alpha, \quad G^x = E^x \theta_2^x. \quad H^x = F^x \theta_2^x
$$

e quindi $B^x D^x F^x H^x \neq 0$. L'annullarsi delle (63), (64) equivale allora alle:

$$
(71) \qquad \left\| \begin{matrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ 1 & 0 & \theta_2^\alpha & 0 \end{matrix} \right\| = 0,
$$

$$(72)\qquad \left\| \begin{matrix} A & E & C & G \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ 0 & 1 & 0 & \theta_2^x \end{matrix} \right\| = 0.$$

La (62) è nulla in virtù delle (71), (72), in quanto ogni minore di terz'ordine di (62) è somma dei due corrispondenti di (71), (72); e si riconosce facilmente che anche la (61) è nulla in quanto sussistono le (69), (70), (71), (72).

Supponiamo dapprima $(\alpha - B)(\alpha - F) \neq 0$. Le (69) dànno:

$$C = K(\theta_2 - D), \qquad G = L(\theta_2 - H)$$

con $K = A/(\alpha - B)$, $L = E/(\alpha - F)$. La (71) diviene allora:

$$(73)\qquad \left\| \begin{matrix} (K-L)(\alpha - B) & 0 & (K-L)(\theta_2 - D) & 0 \\ \alpha - B & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ 1 & 0 & \theta_2^x & 0 \end{matrix} \right\| = 0.$$

Se $K = L$ risulta, sostituendo nella (60):

$$M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ \gamma & K(\alpha - B) + \gamma B & K(\theta_2 - D) + \gamma D \\ \delta & K(\alpha - F) + \delta F & K(\theta_2 - H) + \gamma H \end{bmatrix};$$

e questa col cambiamento di parametri espresso dalle: $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $\gamma = \gamma^* + K(\alpha^*)$, $\delta = \delta^* + K(\alpha^*)$, si riduce alla (67).

Supposto allora $K - L \neq 0$, la (73) implica:

$$D = \theta_2 - (\alpha - B)\,\theta_2^x;$$

e di qui, derivando rispetto ad α e tenendo conto della seconda delle (70): $(B - \alpha)\,\theta_2^{\alpha\alpha} = 0$, e quindi $\theta_2^{x\alpha} = 0$; ma ciò è contrario all'ipotesi che V_4 non appartenga ad alcun S_7.

Deve dunque supporsi $(\alpha - B)(\alpha - F) = 0$; se ad esempio è $B - \alpha = 0$, la seconda delle (69) dà $A(\theta_2 - D) = 0$; e non può essere $A = 0$, perchè altrimenti l'annullarsi della matrice (71), che ora diventa:

$$\left\|\begin{matrix} 0 & E & C & G \\ 0 & \alpha - F & \theta_2 - D & \theta_2 - H \\ 1 & 0 & \theta_2^\alpha & 0 \end{matrix}\right\|,$$

implicherebbe l'annullarsi della matrice (65), contro le ipotesi attuali.

Pertanto: $D = \theta_2$ e la (72) implica $H = \theta_2 - (\alpha - F)\,\theta_2^\alpha$; e di qui derivando rispetto ad α e tenendo conto dell'ultima delle (70): $\theta_2^{\alpha\alpha}(\alpha - F) = 0$, e cioè anche $F = \alpha$, $H = \theta_2$; e quindi ancora è nulla la matrice (65), contro le ipotesi.

12. – Riprendiamo la (38), supponendo:

$$\theta_5 - \theta_2 - (\gamma - \alpha)\,\theta_5^\gamma = 0, \tag{74}$$

$$\mu(\alpha) - \theta_2 + \alpha\lambda(\alpha) = 0, \tag{75}$$

$$\varphi = \lambda(\alpha)\,\delta + \mu(\alpha)\,. \tag{76}$$

Con le notazioni del n. **10** si ha: $\theta_5 = \gamma\xi(\alpha) + \eta(\alpha)$ onde le (74), (75) dànno: $\theta_2 = \mu + \lambda\alpha = \eta + \alpha\xi$; inoltre:

$$\theta_5 = (\gamma - \alpha)\,\xi + \mu + \lambda\alpha = (\gamma - \alpha)\,\xi + \theta_2\,.$$

La (38) diviene dunque:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ 1 & \gamma & (\gamma - \alpha)\,\xi + \theta_2 \\ \theta_6(\alpha, \gamma, \delta) & \delta\theta_6 & (\lambda\delta + \mu)\,\theta_6 \end{bmatrix}. \tag{77}$$

Posto $\gamma - \alpha = \gamma^*$, $\delta - \alpha = \delta^*$, $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, la (77) si riduce a:

$$(78) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ 1 & \alpha + \gamma & \gamma\xi + \theta_2 \\ \theta_6 & (\alpha + \delta)\,\theta_6 & (\lambda\delta + \theta_2)\,\theta_6 \end{Vmatrix};$$

e la condizione (π_4) si traduce nel fatto che le funzioni $1 - \beta$, $\gamma + \alpha - \alpha\beta$, $\gamma\xi + \theta_2 - \beta\theta_2$, $\theta_6 - \beta$, $(\alpha + \delta)\,\theta_6 - \alpha\beta$, $(\lambda\delta + \theta_2)\,\theta_6 - \beta\theta_2$ devono essere sei integrali di un'equazione differenziale della forma (18), e cioè anche — come si riconosce con facili calcoli — che le funzioni $\theta_6 - \beta$, $(\alpha + \delta)\theta_6 - \alpha\beta$, $(\lambda\delta + \theta_2)\,\theta_6 - \beta\theta_2$ devono essere integrali di un'equazione differenziale della forma:

$$A\,[X + (1 - \beta)\,X^\beta - \gamma X^\gamma] + EX^\delta = 0\,.$$

Affinchè ciò avvenga è necessario e sufficiente che la funzione θ_6 sia integrale dell'equazione differenziale:

$$\theta_6\,(\theta_6 - 1) = \gamma\theta_6\,\theta_6^\gamma + \delta\theta_6^\delta$$

e cioè che θ_6 si possa ottenere risolvendo un'equazione del tipo:

$$(79) \qquad H\left[\frac{\theta_6 - 1}{\delta\theta_6}\,,\ \frac{\theta_6 - 1}{\gamma}\right] = 0.$$

La (79) consente di esprimere γ nella forma:

$$\gamma = (\theta_6 - 1)\,\Phi\left[\frac{\theta_6 - 1}{\delta\theta_6}\right];$$

sostituendo nella (78) si ha:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ 1 & \alpha + (\theta_6 - 1)\,\Phi\left[\frac{\theta_6 - 1}{\delta\theta_6}\right] & \xi\,(\theta_6 - 1)\,\Phi\left[\frac{\theta_6 - 1}{\delta\theta_6}\right] + \theta_2 \\ \theta_6 & (\delta + \alpha)\,\theta_6 & (\delta\lambda + \theta_2)\,\theta_6 \end{Vmatrix};$$

e questa, col cambiamento di parametri:

$$\alpha = \alpha^*, \qquad \beta = \beta^*, \qquad \frac{\theta_6 - 1}{\delta\theta_6} = \gamma^*, \qquad \delta = \delta^*$$

e seguitando a scrivere α, β, γ, δ in luogo di α^*, β^*, γ^*, δ^*, diventa:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ 1 & \alpha + \dfrac{\gamma\delta}{1-\gamma\delta}\Phi(\gamma) & \xi\dfrac{\gamma\delta}{1-\gamma\delta}\Phi(\gamma) + \theta_2 \\ \dfrac{1}{1-\gamma\delta} & \dfrac{\alpha+\delta}{1-\gamma\delta} & \dfrac{\delta\lambda+\theta_2}{1-\gamma\delta} \end{vmatrix}.$$

Cambiando nuovamente parametri, con la posizione: $\beta(1-\gamma\delta) = \beta^*$, si ha (scrivendo sempre β in luogo di β^*):

$$M \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ 1-\gamma\delta & \alpha(1-\gamma\delta) + \gamma\delta\Phi(\gamma) & \theta_2(1-\gamma\delta) + \gamma\delta\xi\Phi(\gamma) \\ 1 & \alpha+\delta & \delta\lambda+\theta_2 \end{vmatrix}$$

ed infine, ponendo $H(\gamma) = \gamma\Phi(\gamma)$:

$$(80) \qquad M \equiv \begin{vmatrix} \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2 \\ 1-\gamma\delta & \alpha(1-\gamma\delta) + \delta H(\gamma) & \theta_2(1-\gamma\delta) + \xi\delta H(\gamma) \\ 1 & \alpha+\delta & \delta\lambda+\theta_2 \end{vmatrix}.$$

Abbiamo così una terza famiglia di V_4 di S_8 soddisfacenti alle condizioni (π_1), (π_2), (π_3), (π_4), (π_{23}). *Si tratta di varietà luoghi di ∞^2 piani incidenti a π_1 ed a π_4, e seganti π_{23} secondo rette.*

13. – Difficoltà più elevate presenta l'esame delle varietà del tipo (III) e cioè:

$$(81) \qquad M \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \theta_5(\beta,\gamma) \\ \delta & \theta_7(\beta,\gamma,\delta) & \Phi(\delta,\theta_7) \end{vmatrix}.$$

Per una varietà siffatta, il verificarsi della condizione (π_4) equivale al fatto che le sei funzioni: $\beta-\alpha$, $\delta-\alpha$, $\gamma-\xi_1(\alpha)$, $\theta_7(\beta,\gamma,\delta)-\xi_1(\alpha)$, $\theta_5(\beta,\gamma)-\xi_2(\alpha)$, $\Phi[\delta,\theta_7(\beta,\gamma,\delta)]-\xi_2(\alpha)$ siano integrali di una medesima equazione differenziale della forma (18), od anche — come si riconosce senza difficoltà —, che le tre funzioni $\theta_5(\beta,\gamma)-\xi_2(\alpha)$, $\theta_7(\beta,\gamma,\delta)-\xi_1(\alpha)$, $\Phi[\delta,\theta_7(\beta,\gamma,\delta)]-\xi_2(\alpha)$ siano integrali di un'equazione del tipo:

$$\lambda\,[X+(\alpha-\beta)\,X^{\beta}+(\xi_1-\gamma)\,X^{\gamma}+(\alpha-\delta)\,X^{\delta}]+ \tag{82}$$

$$+\mu\,[X^{\alpha}+X^{\beta}+\xi_1^{\alpha}\,X^{\gamma}+X^{\delta}]=0$$

con λ, μ funzioni delle quattro variabili α, β, γ, δ.

Dovrà essere in particolare:

$$\begin{vmatrix} \theta_5-\xi_2+(\alpha-\beta)\,\theta_5^{\beta}+(\xi_1-\gamma)\,\theta_5^{\gamma} & -\xi_2^{\alpha}+\theta_5^{\beta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_5^{\gamma} \\ \theta_7-\xi_1+(\alpha-\beta)\,\theta_7^{\beta}+(\xi_1-\gamma)\,\theta_7^{\gamma}+(\alpha-\delta)\,\theta_7^{\delta} & -\xi_1^{\alpha}+\theta_7^{\beta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_7^{\gamma}+\theta_7^{\delta} \end{vmatrix}=0 \tag{83}$$

e di qui, derivando rispetto a δ,

$$\begin{vmatrix} \theta_5-\xi_2+(\alpha-\beta)\,\theta_5^{\beta}+(\xi_1-\gamma)\,\theta_5^{\gamma} & -\xi_2^{\alpha}+\theta_5^{\beta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_5^{\gamma} \\ (\alpha-\beta)\,\theta_7^{\beta\delta}+(\xi_1-\gamma)\,\theta_7^{\gamma\delta}+(\alpha-\delta)\,\theta_7^{\delta\delta} & \theta_7^{\beta\delta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_7^{\gamma\delta}+\theta_7^{\delta\delta} \end{vmatrix}=0. \tag{84}$$

Le (83), (84) possono essere verificate in quanto:

$$\begin{cases} \theta_5-\xi_2+(\alpha-\beta)\,\theta_5^{\beta}+(\xi_1-\gamma)\,\theta_5^{\gamma}=0 \\ -\xi_2^{\alpha}+\theta_5^{\beta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_5^{\gamma}=0, \end{cases} \tag{85}$$

per il che è sufficiente che valga la prima delle (85), che derivata rispetto ad α fornisce la seconda. Esamineremo in seguito questo caso speciale (cfr. n. 17).

Se non sussistono le (85), una delle (83), (84) può essere sostituita con la:

$$\begin{vmatrix} \theta_7-\xi_1+(\alpha-\beta)\,\theta_7^{\beta}+(\xi_1-\gamma)\,\theta_7^{\gamma}+(\alpha-\delta)\,\theta_7^{\delta} & -\xi_1^{\alpha}+\theta_7^{\beta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_7^{\gamma}+\theta_7^{\delta} \\ (\alpha-\beta)\,\theta_7^{\beta\delta}+(\xi_1-\gamma)\,\theta_7^{\gamma\delta}+(\alpha-\delta)\,\theta_7^{\delta\delta} & \theta_7^{\beta\delta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_7^{\gamma\delta}+\theta_7^{\delta\delta} \end{vmatrix}=0, \tag{86}$$

che, derivandone i due membri rispetto ad α, fornisce:

$$\begin{vmatrix} \theta_7 - \xi_1 + (\alpha-\beta)\,\theta_7^\beta + (\xi_1-\gamma)\,\theta_7^\gamma + (\alpha-\delta)\,\theta_7^\delta & -\xi_1^{\alpha\alpha}\,(1-\theta_7^\gamma) \\ (\alpha-\beta)\,\theta_7^{\beta\delta} + (\xi_1-\gamma)\,\theta_7^{\;\delta} + (\alpha-\delta)\,\theta_7^{\delta\delta} & \xi_1^{\alpha\alpha}\,\theta_7^{\gamma\delta} \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$\begin{aligned} (87)\qquad & \xi_1^{\alpha\alpha}\,[\theta_7^{\gamma\delta}\{\,\theta_7 - \xi_1 + (\alpha-\beta)\,\theta_7^\beta + (\xi_1-\gamma)\,\theta_7^\gamma + (\alpha-\delta)\,\theta_7^\delta\,\} + \\ & + (1-\theta_7^\gamma)\{\,(\alpha-\beta)\,\theta_7^{\beta\delta} + (\xi_1-\gamma)\,\theta_7^{\gamma\delta} + (\alpha-\delta)\,\theta_7^{\delta\delta}\,\}] = 0\,. \end{aligned}$$

14. – *Sia dapprima* $\xi_1^{\alpha\alpha} \neq 0$ e quindi:

$$\begin{aligned} (88)\qquad & \theta_7^{\gamma\delta}\{\,\theta_7 - \xi_1 + (\alpha-\beta)\,\theta_7^\beta + (\xi_1-\gamma)\,\theta_7^\gamma + (\alpha-\delta)\,\theta_7^\delta\,\} + \\ & + (1-\theta_7^\gamma)\{\,(\alpha-\beta)\,\theta_7^{\beta\delta} + (\xi_1-\gamma)\,\theta_7^{\gamma\delta} + (\alpha-\delta)\,\theta_7^{\delta\delta}\,\} = 0\,. \end{aligned}$$

Derivando rispetto ad α i due membri della (88), si trova che la funzione θ_7 deve essere integrale dell'equazione differenziale alle derivate parziali, del secondo ordine e non lineare:

$$(89)\qquad (\theta_7^\gamma - 1)\,(\theta_7^{\beta\delta} + \theta_7^{\delta\delta}) - \theta_7^{\gamma\delta}\,(\theta_7^\beta + \theta_7^\delta) = 0,$$

la quale conduce a due possibilità:

1°) $\theta_7 = \gamma + \omega_7\,[\delta-\beta,\, g\,(\beta,\gamma)]$ con ω_7 e g funzioni arbitrarie;

2°) $\theta_7 = \gamma + \omega_7\,(\beta,\delta)$ con ω_7 funzione arbitraria.

1° *caso*: La matrice M diviene:

$$(90)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \theta_5(\beta,\gamma) \\ \delta & \gamma + \omega_7\,[\delta-\beta,\, g\,(\beta,\gamma)] & \Phi\{\,\delta,\gamma + \omega_7\,[\delta-\beta,\, g\,(\beta,\gamma)]\,\} \end{bmatrix}$$

e si può, in questo caso, supporre $g^\gamma \neq 0$, perchè altrimenti si ricadrebbe nel 2° caso (che esamineremo in seguito). Posto allora $\alpha = \alpha^*$, $\beta = \beta^*$, $g\,(\beta,\gamma) = \gamma^*$,

$\delta - \beta = \delta^*$ e seguitando a scrivere α, β, γ, δ in luogo di α^*, β^*, γ^*, δ^*, la (90) si trasforma nella:

$$(91) \qquad M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \theta_4(\beta, \gamma) & \theta_5(\beta, \gamma) \\ \beta + \delta & \theta_4(\beta, \gamma) + \omega_7(\beta, \delta) & \Phi[\beta + \delta,\, \theta_4(\beta, \gamma) + \omega_7(\beta, \delta)] \end{bmatrix}.$$

Devono essere integrali di un'equazione come la (18) le sei funzioni $\beta - \alpha$, $\beta + \delta - \alpha$, $\theta_4 - \xi_1$, $\theta_4 - \xi_1 + \omega_7$, $\theta_5 - \xi_2$, $\Phi[\beta + \delta, \theta_4 + \omega_7] - \xi_2$, ossia anche le sei funzioni: $\beta - \alpha$, δ, $\theta_4 - \xi_1$, ω_7, $\theta_5 - \xi_2$, $\Phi[\beta + \delta, \theta_4 + \omega_7] - \xi_2$; e ciò significa che le tre funzioni $\theta_4 - \xi_1$, $\theta_5 - \xi_2$, ed ω_7 devono essere tre integrali d'un'equazione della forma:

$$(92) \qquad \lambda[X + (\alpha - \beta) X^\beta - \delta X^\gamma] + \mu[X^\alpha + X^\beta] + \varrho X^\gamma = 0,$$

con λ, μ, ϱ funzioni, non tutte nulle, delle quattro variabili α, β, γ, δ. Pertanto:

$$\begin{vmatrix} \theta_4 - \xi_1 + (\alpha - \beta)\theta_4^\beta & -\xi_1^\alpha + \theta_4^\beta & \theta_4^\gamma \\ \theta_5 - \xi_2 + (\alpha - \beta)\theta_5^\beta & -\xi_2^\alpha + \theta_5^\beta & \theta_5^\gamma \\ \omega_7 + (\alpha - \beta)\omega_7^\beta - \delta\omega_7^\delta & \omega_7^\beta & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

e di qui, derivando rispetto ad α:

$$(93) \qquad [\omega_7 + (\alpha - \beta)\omega_7^\beta - \delta\omega_7^\delta]\,[\theta_5^\gamma \xi_1^{\alpha\alpha} - \theta_4^\gamma \xi_2^{\alpha\alpha}] = 0.$$

Se è nullo il primo fattore del primo membro, risulta: $\omega_7^\beta = \omega_7 - \delta\omega_7^\delta = 0$ e quindi $\omega_7 = m\delta$ (con m costante); ed M:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \theta_4(\beta, \gamma) & \theta_5(\beta, \gamma) \\ \beta + \delta & m\delta + \theta_4(\beta, \delta) & \Phi[\beta + \delta,\, m\delta + \omega_7(\beta, \delta)] \end{bmatrix}$$

rappresenta una varietà dell'S_7: $x_7 - x_4 = m(x_6 - x_3)$; caso escluso.

Deve dunque essere:

$$(94) \qquad \theta_5^\gamma \xi_1^{\alpha\alpha} - \theta_4^\gamma \xi_2^{\alpha\alpha} = 0.$$

Ora θ_4^γ e θ_5^γ non possono essere entrambe nulle, perchè altrimenti V_4 verificherebbe la condizione (π_{13}); poichè abbiamo supposto $\xi_1^{\alpha\alpha} \neq 0$ risulta allora $\theta_4^\gamma \neq 0$ e la (94) implica allora che $\theta_5^\gamma/\theta_4^\gamma$ e $\xi_2^{\alpha\alpha}/\xi_1^{\alpha\alpha}$ siano uguali ad una medesima costante m, sicchè:

$$\theta_5 = m\theta_4 + \varphi_5(\beta), \qquad \xi_2 = m\xi_1 + n\alpha + p \qquad (m,\ n,\ p \text{ costanti}).$$

Ne segue:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & m\xi_1(\alpha) + n\alpha + p \\ \beta & \theta_4(\beta,\gamma) & m\theta_4(\beta,\gamma) + \varphi_5(\beta) \\ \beta+\delta & \theta_4(\beta,\gamma)+\omega_7(\beta,\delta) & \Phi[\beta+\delta,\ \theta_4(\beta,\gamma)+\omega_7(\beta,\delta)] \end{bmatrix},$$

e poichè la variabile γ compare solo in θ_4, si può supporre $\theta_4 \equiv \gamma$; cioè:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & m\xi_1(\alpha) + n\alpha + p \\ \beta & \gamma & m\gamma + \varphi_5(\beta) \\ \beta+\delta & \gamma+\omega_7(\beta,\delta) & \Phi[\beta+\delta,\ \gamma+\omega_7(\beta,\delta)] \end{bmatrix};$$

ed il fatto che le quattro funzioni $\gamma - \xi_1$, ω_7, $\varphi_5(\beta) - n\alpha - p$, $\Phi[\beta+\delta, \gamma+\omega_7] - m\xi_1 - n\alpha - p$ siano integrali di un'equazione come la (92), implica tra l'altro che:

$$\begin{vmatrix} \omega_7 + (\alpha-\beta)\,\omega_7^\beta - \delta\omega_7^\delta & \omega_7^\beta \\ \varphi_5 - n\alpha - p + (\alpha-\beta)\,\varphi_5^\beta & \varphi_5^\beta - n \end{vmatrix} = 0$$

ossia:

$$\begin{vmatrix} \omega_7 - \delta\omega_7^\delta & \omega_7^\beta \\ \varphi_5(\beta) - \eta\beta - p & \varphi_5^\beta - n \end{vmatrix} = 0. \tag{95}$$

Gli elementi della prima orizzontale non sono nulli entrambi (perchè altrimenti sarebbe nullo il primo fattore del primo membro della (93), il che, come abbiamo già visto, è da escludersi); e neppure possono essere nulli entrambi gli elementi della seconda orizzontale, perchè se fosse $\varphi_5 = \eta\beta + p$ V_4 apparterrebbe all'S_7 di equazione: $x_5 - x_2 = m(x_4 - x_1) + n(x_3 - x_0)$.

È anche facile provare che non possono essere entrambi nulli gli elementi della seconda verticale del determinante (95). Se così fosse avremmo $\omega_7 = \omega_7(\delta)$ e $\varphi_5 = n\beta + q$ con q costante e $q \neq p$ (perchè altrimenti l'S_7: $x_5 - x_2 = m(x_4 - x_1) + n(x_3 - x_0)$ conterrebbe V_4); pertanto, essendo $\varphi_5 - n\alpha - p$ $(= n(\beta - \alpha) + q - p)$ un integrale della (92), che già possiede l'integrale $\beta - \alpha$, anche la costante $q - p \neq 0$ sarebbe integrale della (92); e quindi $\lambda = 0$. Ponendo poi nella (92) $X \equiv \gamma - \xi_1$ si ricaverebbe $\varrho = \mu\xi_1^\alpha$; la (92), posto $\mu = 1$, diverrebbe: $X^\alpha + X^\beta + \xi_1^\alpha X^\gamma = 0$; e dovendo essa possedere l'integrale $\Phi(\beta + \delta, \gamma + \omega_7(\delta)) - m\gamma - n\beta - q$ si avrebbe:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial(\beta + \delta)} - n + \xi_1^\alpha \left[\frac{\partial \Phi}{\partial(\gamma + \omega)} - m\right] = 0 .$$

Ora ξ_1^α non può essere una costante perchè se fosse $\xi_1 = k\alpha + h$ (h, k costanti) l'S_7: $(mh + p)\,x_1 - hx_2 = (kp - hn)\,x_0$ conterrebbe V_4; avremmo dunque: $\dfrac{\partial \Phi}{\partial(\beta + \delta)} = n$, $\dfrac{\partial \Phi}{\partial(\gamma + \omega)} = m$ e cioè $\Phi = n(\beta + \delta) + m[\gamma + \omega(\delta)] + r$, r essendo una nuova costante. Ma ciò è contrario alle nostre ipotesi perchè V_4 apparterrebbe all'S_7 di equazione:

$$(q - r)(nx_0 + mx_1 - x_2) + (r - p)(nx_3 + mx_4 - x_5) + \\ + (p - q)(nx_6 + mx_7 - x_8) = 0 .$$

Si vede ora che deve essere addirittura $\omega_7^\beta(\varphi_5^\beta - n) \neq 0$. Perchè se fosse $\omega_7^\beta = 0$ la (95) darebbe $\omega_7 - \delta\omega_7^\delta = 0$, e se fosse $\varphi_5^\beta - n = 0$ la (95) darebbe $\varphi_5(\beta) - n\beta - p = 0$, mentre abbiamo provato poc'anzi che non possono essere nulli entrambi gli elementi di una delle orizzontali di (95).

La (95) può scriversi:

$$\frac{\omega_7 - \delta\omega_7^\delta}{\omega_7^\beta} = \frac{\varphi_5(\beta) - n\beta - p}{\varphi_5^\beta - n}$$

od anche, posto $\varphi_5(\beta) - n\beta - p = \varepsilon(\beta)$:

$$\frac{\omega_7 - \delta\omega_7^\delta}{\omega_7^\beta} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon^\beta} .$$

Ne segue facilmente:

$$\omega_7 = \delta\, H(\varepsilon/\delta)$$

con H simbolo di funzione arbitraria; eppertanto:

$$M \equiv \begin{vmatrix} \alpha & \xi_1(\alpha) & m\xi_1(\alpha) + n\alpha + p \\ \beta & \gamma & m\gamma + n\beta + p + \varepsilon(\beta) \\ \beta + \delta & \gamma + \delta\, H(\varepsilon/\delta) & \Phi[\beta + \delta,\ \gamma + \delta\, H(\varepsilon/\delta)] \end{vmatrix} .$$

Notiamo che $\varepsilon(\beta) \neq 0$, perchè altrimenti V_4 apparterrebbe all'S_7: $x_5 - x_2 = m(x_4 - x_1) + n(x_3 - x_0)$.

Tenendo conto che $\gamma - \xi_1$, $m(\gamma - \xi_1) + n(\beta - \alpha) + \varepsilon(\beta)$, e $\Phi[\beta + \delta, \gamma + \delta H(\varepsilon/\delta)] - m\gamma - n\beta - p - \varepsilon(\beta)$ devono essere integrali dell'equazione (92), che già possiede l'integrale $\beta - \alpha$, e tenendo conto della linearità della (92), si vede che anche $\varepsilon(\beta)$ e $\Phi[\beta + \delta, \gamma + \delta H(\varepsilon/\delta)] - m\gamma - n\beta - p$ devono essere integrali della (92). Un semplice calcolo mostra allora che posto:

$$\Xi(\beta, \gamma, \delta) = \Phi[\beta + \delta,\ \gamma + \delta H(\varepsilon/\delta)] - m\gamma - n\beta - p \tag{96}$$

deve risultare:

$$\varepsilon^\beta \{ \Xi + [\xi_1 - \gamma - \xi_1^\alpha(\alpha - \beta)]\, \Xi^\gamma - \delta \Xi^\delta \} - \varepsilon \{ \Xi^\beta + \xi_1^\alpha\, \Xi^\gamma \} = 0 , \tag{97}$$

e di qui, derivando rispetto ad α:

$$\xi_1^{\alpha\alpha} [\varepsilon^\beta (\alpha - \beta) + \varepsilon]\, \Xi^\gamma = 0 . \tag{98}$$

Ora è $\xi_1^{\alpha\alpha} [\varepsilon^\beta(\alpha - \beta) + \varepsilon] \neq 0$: infatti se fosse $\varepsilon^\beta(\alpha - \beta) + \varepsilon = 0$ dovrebbe essere $\varepsilon = 0$, contrariamente a quanto notato dianzi; dalle (97), (98) discende pertanto:

$$\begin{cases} \Xi^\gamma = 0 \\ \varepsilon^\beta [\Xi - \delta \Xi^\delta] - \varepsilon \Xi^\beta = 0 . \end{cases} \tag{99}$$

La (96), tenuto conto che $\Xi^\gamma = 0$, dà $\dfrac{\partial \Phi}{\partial(\gamma + \delta H)} = m$ e quindi $\Phi = m\gamma + m\delta H(\varepsilon/\delta) + \varphi(\beta + \delta)$, $\Xi = m\delta H(\varepsilon/\delta) + \varphi(\beta + \delta) - n\beta - p$: sostituendo nella seconda delle (99) si trova:

$$\varepsilon^\beta (\varphi - n\beta - p - \delta\varphi') - \varepsilon(\varphi' - n) = 0; \tag{100}$$

ne segue, derivando i due membri rispetto a δ:

$$(\delta\varepsilon^{\beta} + \varepsilon)\,\varphi'' = 0.$$

Ma $\delta\varepsilon^{\beta} + \varepsilon \neq 0$; quindi $\varphi = h\,(\beta + \delta) + k$ con h e k costanti; la (100) fornisce allora: $\varepsilon^{\beta}\,(h\beta - n\beta + k - p) = \varepsilon\,(h - n)$, eppertanto: $\varepsilon = q\,[(h - n)\,\beta + k - p]$, ove q è una nuova costante. Ma ciò è contrario alle ipotesi ammesse, perchè conduce a varietà immerse nell'S_7: $(p + kq - hq)\,(x_2 - mx_1 - nx_0) + p\,(n + hq - nq)\,x_3 - p\,(x_5 - mx_4) = 0$.

15. – 2° *Caso.* Supponiamo ora (che $\xi_1^{\chi\alpha} \neq 0$ ed inoltre) che la (89) sia soddisfatta in quanto $\xi_7 = \gamma + \omega_7\,(\beta, \delta)$, sicchè:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & \xi_1\,(\alpha) & \xi_2\,(\alpha) \\ \beta & \gamma & \theta_5\,(\beta, \gamma) \\ \delta & \gamma + \omega_7\,(\beta, \delta) & \Phi\,(\delta, \gamma + \omega_7) \end{bmatrix}. \tag{101}$$

Notiamo subito che risulta:

$$\omega_7 + (\alpha - \beta)\,\omega_7^{\beta} + (\alpha - \delta)\,\omega_7^{\delta} \neq 0\,. \tag{102}$$

In caso contrario, infatti, poichè il secondo membro della (102) è un polinomio di primo grado rispetto ad α, avremmo: $\omega_7^{\beta} + \omega_7^{\delta} = \omega_7 - \beta\omega_7^{\beta} - \delta\omega_7^{\delta} = 0$ e quindi $\omega_7 = k\,(\delta - \beta)$ con k costante, e l'S_7 $x_7 - x_4 = k\,(x_6 - x_3)$ conterrebbe V_4.

Ciò premesso la (83) diventa ora:

$$\begin{vmatrix} \theta_5 - \xi_2 + (\alpha - \beta)\,\theta_5^{\beta} + (\xi_1 - \gamma)\,\theta_5^{\gamma} & -\xi_2^{\alpha} + \theta_5^{\beta} + \xi_1^{\alpha}\,\theta_5^{\gamma} \\ \omega_7 + (\alpha - \beta)\,\omega_7^{\beta} + (\alpha - \delta)\,\omega_7^{\delta} & \omega_7^{\beta} + \omega_7^{\delta} \end{vmatrix} = 0; \tag{103}$$

derivando i due membri rispetto a γ si ha:

$$\begin{vmatrix} (\alpha - \beta)\,\theta_5^{\beta\gamma} + (\xi_1 - \gamma)\,\theta_5^{\gamma\gamma} & \theta_5^{\beta\gamma} + \xi_1^{\alpha}\,\theta_5^{\gamma\gamma} \\ \omega_7 + (\alpha - \beta)\,\omega_7^{\beta} + (\alpha - \delta)\,\omega_7^{\delta} & \omega_7^{\beta} + \omega_7^{\delta} \end{vmatrix} = 0; \tag{104}$$

derivando rispetto ad α i due membri della (104) e tenendo conto della (102), si ha: $\xi_1^{\alpha\alpha}\,\theta_5^{\gamma\gamma} = 0$, e quindi $\theta_5^{\gamma\gamma} = 0$; cioè: $\theta_5 = A\,(\beta)\,\gamma + B\,(\beta)$. La (104) diventa allora:

$$A^{\beta}\left\{\,(\delta-\beta)\,\omega_7^{\delta}-\omega_7\,\right\}=0$$

Se fosse $(\delta-\beta)\,\omega_7^{\delta}-\omega_7 = 0$, e cioè se ω_7 avesse la forma: $\omega_7 = (\delta-\beta)\,\varphi\,(\beta)$, la (103), che sottraendo alla prima colonna la seconda moltiplicata per $(\alpha-\beta)$ può scriversi:

$$\begin{vmatrix} \theta_5-\xi_2+(\alpha-\beta)\,\xi_2^{\alpha}+\theta_5^{\gamma}\,[\xi_1-\gamma-\xi_1^{\alpha}\,(\alpha-\beta)] & -\xi_2^{\alpha}+\theta_5^{\beta}+\xi_1^{\alpha}\,\theta_5^{\gamma} \\ \omega_7+(\beta-\delta)\,\omega_7^{\delta} & \omega_7^{\beta}+\omega_7^{\delta} \end{vmatrix}=0,$$

darebbe: $(\omega_7^{\beta}+\omega_7^{\delta})\left\{\theta_5-\xi_2+(\alpha-\beta)\xi_2^{\alpha}+\theta_5^{\gamma}\,[\xi_1-\gamma-\xi_1^{\alpha}\,(\alpha-\beta)]\right\}=0$; ma $\omega_7^{\beta}+\omega_7^{\delta} = (\delta-\beta)\,\varphi^{\beta} \neq 0$, perchè se fosse $\varphi = k$ (k costante) l'S_7: $x_7 - x_1 = = k\,(x_6 - x_3)$ conterrebbe V_4; dovrebbe dunque essere:

$$\theta_5-\xi_2+(\alpha-\beta)\xi_2^{\alpha}+\theta_5^{\gamma}\,[\xi_1-\gamma-(\alpha-\beta)\,\xi_1^{\alpha}]=0$$

e di qui, derivando i due membri rispetto ad α:

$$\xi_2^{\alpha\alpha}-\xi_1^{\alpha\alpha}\,\theta_5^{\gamma}=0$$

e derivando rispetto a β: $\theta_5^{\beta\gamma} = A^{\beta} = 0$.

Risulta allora in ogni caso $A^{\beta} = 0$ e quindi $\theta_5 = m\gamma + B\,(\beta)$ (m costante).

Dalla (103) che ora si riscrive:

$$(105)\qquad \begin{vmatrix} m\xi_1-\xi_2+B\,(\beta)+(\alpha-\beta)\,B^{\beta} & -\xi_2^{\alpha}+B^{\beta}+m\xi_1^{\alpha} \\ \omega_7+(\alpha-\beta)\,\omega_7^{\beta}+(\alpha-\delta)\,\omega_7^{\delta} & \omega_7^{\beta}+\omega_7^{\delta} \end{vmatrix}=0,$$

si ottiene, derivando i due membri rispetto ad α:

$$\begin{vmatrix} m\xi_1-\xi_2+B\,(\beta)+(\alpha-\beta)\,B^{\beta} & -\xi_2^{\alpha\alpha}+m\xi_1^{\alpha\alpha} \\ \omega_7+(\alpha-\beta)\,\omega_7^{\beta}+(\alpha-\delta)\,\omega_7^{\delta} & 0 \end{vmatrix}=0$$

ossia, tenendo conto della (102): $\xi_2^{\alpha\alpha} = m\xi_1^{\alpha\alpha}$, da cui $\xi_2 - m\xi_1 = k\alpha + h$, con h, k costanti. La (105) diviene allora:

$$\begin{vmatrix} B - \beta B^\beta - h & B^\beta - k \\ \omega_7 - \beta\omega_7^\beta - \delta\omega_7^\delta & \omega_7^\beta + \omega_7^\delta \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$\begin{vmatrix} B - k\beta - h & B^\beta - k \\ \omega_7 + (\beta - \delta)\,\omega_7^\delta & \omega_7^\beta + \omega_7^\delta \end{vmatrix} = 0 \tag{106}$$

Ora $B(\beta)$ non può essere lineare perchè se $B = r\beta + s$ (con r, s costanti) si avrebbe $\theta_5 = m\gamma + r\beta + s$ e V_4 apparterrebbe all'S_7 di equazione: $hx_5 - sx_2 = hmx_4 + hrx_3 - smx_1 - skx_0$.

Posto $B(\beta) - k\beta - h = H(\beta)$, la (106) dà:

$$\begin{vmatrix} H & H^\beta \\ \omega_7 + (\beta - \delta)\,\omega_7^\delta & \omega_7^\beta + \omega_7^\delta \end{vmatrix} = 0,$$

e l'integrale generale di questa equazione nella funzione incognita ω_7 è:

$$\omega_7 = H\,\Phi\left[\frac{\beta - \delta}{H}\right];$$

M è dunque della forma:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \alpha & \xi_1 & m\xi_1 + k\alpha + h \\ \beta & \gamma & m\gamma + k\beta + h + H(\beta) \\ \delta & \gamma + H\varphi_7\left[\dfrac{\beta - \delta}{H}\right] & \Phi_8\left\{\delta,\ \gamma + H\varphi_7\left[\dfrac{\beta - \delta}{H}\right]\right\} \end{Vmatrix}$$

Ora, affinchè un'equazione come la (18) possegga i sei integrali $\beta - \alpha$, $\delta - \alpha$, $\gamma - \xi_1$, $H\varphi_7\left[\frac{\beta - \delta}{H}\right]$, $m(\gamma - \xi_1) + k(\beta - \alpha) + H(\beta)$, $\Phi\left\{\delta,\ \gamma + H\varphi_7\left[\frac{\beta - \delta}{H}\right]\right\} - m\gamma - k\beta - h - H(\beta)$ e quindi (data la linearità della (18)) anche i due integrali

$H(\beta)$ e $K(\beta, \gamma, \delta) = \Phi_8(\delta, \gamma + H\varphi_7) - m\gamma - k\beta - h$, è necessario — come si vede con un semplice calcolo — che:

$$(107)\qquad \begin{vmatrix} H + (\alpha - \beta) H^\beta & H^\beta \\ K + (\alpha - \beta) K^\beta + (\xi_1 - \gamma) K^\gamma + (\alpha - \delta) K^\delta & K^\beta + \xi_1^\alpha K^\gamma + K^\delta \end{vmatrix} = 0;$$

e di qui, derivando rispetto ad α:

$$\xi_1^{\alpha\alpha} K^\gamma [H + (\alpha - \beta) H^\beta] = 0$$

Se fosse $H + (\alpha - \beta) H^\beta = 0$ dovrebbe essere addirittura $H = H^\beta = 0$ e quindi l'S_7: $x_5 - x_2 = m(x_4 - x_1) + k(x_3 - x_0)$ conterrebbe V_4; deve essere pertanto $K^\gamma = 0$, ossia $\dfrac{\partial \Phi_8}{\partial(\gamma + H\varphi_7)} - m = 0$, eppertanto:

$$\Phi_8 = m(\gamma + H\varphi_7) + \varphi_8(\delta)$$

$$K = mH\varphi_7 + \varphi_8(\delta) - k\beta - h\,.$$

Sostituendo nella (107), che ora può scriversi:

$$\begin{vmatrix} H & H^\beta \\ K + (\beta - \delta) K^\delta & K^\beta + K^\delta \end{vmatrix} = 0$$

si ottiene:

$$\begin{vmatrix} H & H^\beta \\ mH\varphi_7 + \varphi_8 - k\beta - h + (\beta - \delta)(\varphi_8^\delta - m\varphi_7') & \varphi_8^\delta - k - mH^\beta[\varphi_7 - (\beta - \delta)\varphi_7'/H] \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$H(\varphi_8^\delta - k) - H^\beta[\varphi_8 - k\beta - h + (\beta - \delta)\varphi_8^\delta] = 0;$$

di qui, derivando i due membri rispetto a δ:

$$\varphi_8^{\delta\delta}[H - H^\beta(\beta - \delta)] = 0;$$

pertanto, poichè $H - H^\beta(\beta - \delta) \neq 0$ (altrimenti sarebbe $H = 0$, e V_4 apparterrebbe a qualche S_7): $\varphi_8^{\delta\delta} = 0$; ma anche questo è da esludersi, perchè se fosse: $\varphi_8(\delta) = r\delta + s$ (r, s costanti), e quindi: $\Phi_8 = m(\gamma + H\varphi_7) + r\delta + s$, l'$S_7$ di equazione: $h(x_8 - mx_7 - rx_6) - s(x_2 - mx_1 - kx_0) = 0$ conterrebbe V_4.

16. – Riprendiamo la (81), con l'ipotesi $\xi_1^{\alpha\alpha} = 0$, cioè:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \alpha & k\alpha + h & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \theta_5(\beta, \gamma) \\ \delta & \theta_7(\beta, \gamma, \delta) & \Phi(\delta, \theta_7) \end{bmatrix}, \tag{108}$$

con k, h costanti ($h \neq 0$).

Le tre funzioni $\theta_5 - \xi_2$, $\theta_7 - \gamma$, $\Phi(\delta, \theta_7) - \theta_5$ devono essere integrali di un'equazione della forma:

$$\begin{aligned} \lambda[X + (\alpha - \beta)X^\beta + (\xi_1 - \gamma)X^\gamma + (\alpha - \delta)X^\delta] + \\ + \mu[X^\alpha + X^\beta + \xi_1^\alpha X^\gamma + X^\delta] = 0 \end{aligned} \tag{109}$$

($\xi_1 = k\alpha + h$). Se X è un integrale della (109) *che non dipenda dalla variabile* α, risulta:

$$\begin{vmatrix} \theta_5 - \xi_2 + (\alpha - \beta)\theta_5^\beta + (k\alpha + h - \gamma)\theta_5^\gamma & -\xi_2^\alpha + \theta_5^\beta + k\,\theta_5^\gamma \\ X + (\alpha - \beta)X^\beta + (k\alpha + h - \gamma)X^\gamma + (\alpha - \delta)X^\delta & X^\beta + kX^\gamma + X^\delta \end{vmatrix} = 0,$$

ossia:

$$\begin{vmatrix} \theta_5 - \xi_2 + \alpha\xi_2^\alpha - \beta\theta_5^\beta + (h - \gamma)\theta_5^\gamma & -\xi_2^\alpha + \theta_5^\beta + k\theta_5^\gamma \\ X - \beta X^\beta + (h - \gamma)X^\gamma - \delta X^\delta & X^\beta + kX^\gamma + X^\delta \end{vmatrix} = 0.$$

Derivando rispetto ad α si ha:

$$\xi_2^{\alpha\alpha} \begin{vmatrix} \alpha & -1 \\ X - \beta X^\beta + (h - \gamma)X^\gamma - \delta X^\delta & X^\beta + kX^\gamma + X^\delta \end{vmatrix} = 0; \tag{110}$$

poichè $\xi_2^{\alpha\alpha} \neq 0$, in forza dell'ipotesi che V_4 non sia contenuta in alcun S_7, e poichè il determinante che compare nel primo membro della (110) è lineare rispetto ad α, si conclude che ogni integrale della (109) che non dipenda da α, è integrale del sistema di equazioni differenziali:

$$\begin{cases} X - \beta X^\beta + (h - \gamma) X^\gamma - \delta X^\delta = 0 \\ X^\beta + k X^\gamma + X^\delta = 0 \end{cases}$$

e quindi è della forma: $X = (\beta - \delta)\, \Phi \left[\dfrac{k\beta - \gamma + h}{\beta - \delta}\right]$.

Si ha pertanto, posto $\theta_8 = \Phi(\delta,\ \theta_7)$:

$$\theta_7 = \gamma + (\beta - \delta)\, \varphi_7 \left[\frac{k\beta - \gamma + h}{\beta - \delta}\right]$$

$$\theta_8 = \theta_5 + (\beta - \delta) \varphi_8 \left[\frac{k\beta - \gamma + h}{\beta - \delta}\right].$$

Col cambiamento di variabili:

$$\alpha = \alpha^*, \qquad \beta = \beta^*, \qquad \gamma = \gamma^*, \qquad \delta = \beta^* - \frac{k\beta^* - \gamma^* + h}{\delta^*},$$

e seguitando a scrivere α, β, γ, δ in luogo di α^*, β^*, γ^* δ^*, la (108) si trasforma nella:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} \alpha & k\alpha + h & \xi_2(\alpha) \\ \beta & \gamma & \theta_5(\beta, \gamma) \\ \beta - \dfrac{k\beta - \gamma + h}{\delta} & \gamma + \dfrac{k\beta - \gamma + h}{\delta} \varphi_7(\delta) & \theta_5 + \dfrac{k\beta - \gamma + h}{\delta} \varphi_8(\delta) \end{Vmatrix}.$$

Ogni varietà rappresentabile con una matrice siffatta soddisfa oltre alla condizione (π_{23}) anche la (π_{14}). Passiamo allora tralasciare questo caso che conduce a varietà del tipo (VII), già considerato nel n. 10, oppure di uno dei tipi (V), (VI), (VIII), (IX), (X) che esamineremo nel seguito. Infatti se gli S_4 tangenti di una V_4 segano secondo piani ciascuno dei due S_5 π_{23}, π_{14}, essi si appoggiano tutti al piano π_5 intersezione di questi due S_5. Invero i due piani che un S_4

tangente di V_4 ha a comune con π_{23} e con π_{14}, in quanto situati nello stesso S_4, hanno a comune un punto necessariamente situato su π_5. Se V_4 soddisfa inoltre le condizioni (π_1), (π_2), essa soddisfa le condizioni (π_1), (π_2), (π_5), (π_{25}), (π_{15}): si cade nei casi suddetti scambiando tra loro i piani π_3 e π_5.

17. – Per ciò che concerne le varietà (81) non resta che l'esame del caso in cui sussistano le (85); e per ciò basta che sussista la prima delle (85). Inoltre, poichè nel n. 16 il caso $\xi_1^{aa} = 0$ è stato esaminato senza nulla supporre circa la validità o la non validità delle (85), possiamo anche supporre $\xi_1^{aa} \neq 0$. Questo caso si esaurisce allora in poche parole.

Sussistano dunque le:

$$\theta_5 - \xi_2 + (\alpha - \beta)\, \theta_5^\beta + (\xi_1 - \gamma)\, \theta_5^\gamma = 0 \tag{111}$$

$$-\xi_2^\alpha + \theta_5^\beta + \xi_1^\alpha\, \theta_5^\gamma = 0\,. \tag{112}$$

Derivando rispetto ad α i due membri della (112) si ha: $-\xi_2^{\alpha\alpha} + \xi_1^{\alpha\alpha}\, \theta_5^\gamma = 0$; e di qui, per le attuali ipotesi, segue che θ_5^γ è una costante. Posto $\theta_5 = c\gamma + \omega_5(\beta)$ (con c costante), la (112) fornisce $-\xi_2^\alpha + \omega_5^\beta + c\xi_1^\alpha = 0$, e da ciò segue che anche ω_5^β è costante, sicchè $\theta_5 = c\gamma + b\beta + d$ con b, c, d costanti.

La (111) dà allora: $\xi_2(\alpha) = c\xi_1 + b\alpha + d$, onde l'$S_7$ di equazione $x_5 - x_2 = c(x_4 - x_1) + b(x_3 - x_0)$ contiene V_4.

18. – Passiamo ora alla considerazione di varietà del (IV) tipo, e cioè:

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} \theta_0(\alpha, \beta) & \alpha\theta_0(\alpha, \beta) & \theta_2(\alpha)\,\theta_0(\alpha, \beta) \\ \gamma & \theta_4(\beta, \gamma) & \theta_5(\beta, \gamma) \\ \delta & \theta_7(\beta, \delta) & \theta_8(\beta, \delta) \end{matrix} \right\|, \tag{113}$$

e supponiamo che le sei funzioni $\gamma - \delta$, $\theta_4 - \theta_7$, $\theta_5 - \theta_8$, $\gamma - \theta_0$, $\theta_4 - \alpha\theta_0$, $\theta_5 - \theta_2\,\theta_0$, e quindi anche le tre funzioni $\delta - \theta_0$, $\theta_7 - \alpha\theta_0$, $\theta_8 - \theta_2\,\theta_0$, siano integrali di un'equazione differenziale del tipo (18), sicchè:

$$\begin{cases} \lambda(\gamma - \delta) + \varrho - \sigma = 0 \\ \lambda(\theta_4 - \theta_7) + \nu(\theta_4^\beta - \theta_7^\beta) + \varrho\theta_4^\gamma - \sigma\theta_7^\delta = 0 \\ \lambda(\theta_5 - \theta_8) + \nu(\theta_5^\beta - \theta_8^\beta) + \varrho\theta_5^\gamma - \sigma\theta_8^\delta = 0 \end{cases} \tag{114}$$

$$(115)\qquad \begin{cases} \lambda(\gamma-\theta_0)-\mu\theta_0^\alpha-\nu\theta_0^\beta+\varrho=0\\ \lambda(\theta_4-\alpha\theta_0)-\mu(\alpha\theta_0^\alpha+\theta_0)+\nu(\theta_4^\beta-\alpha\theta_0^\beta)+\varrho\theta_4^\gamma=0\\ \lambda(\theta_5-\theta_2\,\theta_0)-\mu(\theta_2\,\theta_0^\alpha+\theta_2^\alpha\,\theta_0)+\nu(\theta_5^\beta-\theta_2\,\theta_0^\beta)+\varrho\theta_5^\gamma=0 \end{cases}$$

$$(116)\qquad \begin{cases} \lambda(\delta-\theta_0)-\mu\theta_0^\alpha-\nu\theta_0^\beta+\sigma=0\\ \lambda(\theta_7-\alpha\theta_0)-\mu(\alpha\theta_0^\alpha+\theta_0)+\nu(\theta_7^\beta-\alpha\theta_0^\beta)+\sigma\theta_7^\delta=0\\ \lambda(\theta_8-\theta_2\,\theta_0)-\mu(\theta_2\,\theta_0^\alpha+\theta_2^\alpha\,\theta_0)+\nu(\theta_8^\beta-\theta_2\,\theta_0^\beta)+\sigma\theta_8^\delta=0\,. \end{cases}$$

Notiamo che, per le ipotesi ammesse, le tre matrici:

$$(117)\qquad \begin{Vmatrix} \gamma-\delta & 0 & 1 & 1\\ \theta_4-\theta_7 & \theta_4^\beta-\theta_7^\beta & \theta_4^\gamma & \theta_7^\delta\\ \theta_5-\theta_8 & \theta_5^\beta-\theta_8^\beta & \theta_5^\gamma & \theta_8^\delta \end{Vmatrix},$$

$$(118)\qquad \begin{Vmatrix} \gamma-\theta_0 & \theta_0^\alpha & -\theta_0^\beta & 1\\ \theta_4-\alpha\theta_0 & \alpha\theta_0^\alpha+\theta_0 & \theta_4^\beta-\alpha\theta_0^\beta & \theta_4^\gamma\\ \theta_5-\theta_2\,\theta_0 & \theta_2\,\theta_0^\alpha+\theta_2^\alpha\,\theta_0 & \theta_5^\beta-\theta_2\,\theta_0^\beta & \theta_5^\gamma \end{Vmatrix},$$

$$(119)\qquad \begin{Vmatrix} \delta-\theta_0 & \theta_0^\alpha & -\theta_0^\beta & 1\\ \theta_7-\alpha\theta_0 & \alpha\theta_0^\alpha+\theta_0 & \theta_7^\beta-\alpha\theta_0^\beta & \theta_7^\delta\\ \theta_8-\theta_2\,\theta_0 & \theta_2\,\theta_0^\alpha+\theta_2^\alpha\,\theta_0 & \theta_8^\beta-\theta_2\,\theta_0^\beta & \theta_8^\delta \end{Vmatrix}$$

hanno caratteristica *tre*. Infatti, posto $\theta_4-\theta_7=(\gamma-\delta)\,\omega_{47}$, $\theta_5-\theta_8=(\gamma-\delta)\,\omega_{58}$, la (117) diviene:

$$\begin{Vmatrix} \gamma-\delta & 0 & 1 & 1\\ (\gamma-\delta)\omega_{47} & (\gamma-\delta)\omega_{47}^\beta & (\gamma-\delta)\omega_{47}^\gamma+\omega_{47} & -(\gamma-\delta)\omega_{47}^\delta+\omega_{47}\\ (\gamma-\delta)\omega_{58} & (\gamma-\delta)\omega_{58}^\beta & (\gamma-\delta)\omega_{58}^\gamma+\omega_{58} & -(\gamma-\delta)\omega_{58}^\delta+\omega_{58} \end{Vmatrix},$$

e se questa matrice fosse nulla sarebbe nulla anche quella che se ne deduce sottraendo agli elementi della seconda orizzontale quelli della prima moltiplicati per ω_{47} ed agli elementi della terza orizzontale quelli della prima moltiplicati per ω_{58}. Si avrebbe dunque:

$$\left\| \begin{matrix} \omega_{47}^{\beta} & \omega_{47}^{\gamma} & \omega_{47}^{\delta} \\ \omega_{58}^{\beta} & \omega_{58}^{\gamma} & \omega_{58}^{\delta} \end{matrix} \right\| = 0$$

e quindi le tre funzioni $\gamma - \delta$, $\theta_4 - \theta_7$, $\theta_5 - \theta_8$ sarebbero proporzionali a funzioni di una sola variabile, e l'S_5 di equazioni $x_6 - x_3 = x_7 - x_4 = x_8 - x_5 = 0$ (cioè l'S_5 π_{14}) segherebbe in piani ogni S_4 tangente di V_4. Per l'osservazione finale del n. 16, possiamo escludere questa circostanza.

Similmente la (118), posto $\theta_4 - \alpha\theta_0 = (\gamma - \theta_0)\,\omega_{14}$, $\theta_5 - \theta_2\,\theta_0 = (\gamma - \theta_0)\,\omega_{25}$, può scriversi:

$$\left\| \begin{matrix} \gamma - \theta_0 & \theta_0^{\alpha} & -\theta_0^{\beta} & 1 \\ (\gamma - \theta_0)\,\omega_{14} & -(\gamma - \theta_0)\,\omega_{14}^{\alpha} + \theta_0^{\alpha}\,\omega_{14} & (\gamma - \theta_0)\,\omega_{14}^{\beta} - \theta_0^{\beta}\,\omega_{14} & (\gamma - \theta_0)\,\omega_{14}^{\gamma} + \omega_{14} \\ (\gamma - \theta_0)\,\omega_{25} & -(\gamma - \theta_0)\,\omega_{25}^{\alpha} + \theta_0^{\alpha}\,\omega_{25} & (\gamma - \theta_0)\,\omega_{25}^{\beta} - \theta_0^{\beta}\,\omega_{25} & (\gamma - \theta_0)\,\omega_{25}^{\gamma} + \omega_{25} \end{matrix} \right\|$$

e questa matrice sarebbe nulla se e soltanto se fosse:

$$\left\| \begin{matrix} \omega_{14}^{\alpha} & \omega_{14}^{\beta} & \omega_{14}^{\gamma} \\ \omega_{25}^{\alpha} & \omega_{25}^{\beta} & \omega_{25}^{\gamma} \end{matrix} \right\| = 0,$$

e cioè se e solo se V_4 verificasse anche la condizione (π_{34}), ciò che ora possiamo escludere.

In modo analogo, se fosse nulla la matrice (119), V_4 verificherebbe la condizione (π_{24}).

Le (114) implicano allora che i rapporti $\lambda : \nu : \varrho : \sigma$ non dipendano dalla variabile α; le (115) implicano che i rapporti $\lambda : \mu : \nu : \varrho$ non dipendano dalla variabile δ, e le (116) che i rapporti $\lambda : \mu : \nu : \sigma$ non dipendano dalla variabile γ. Si può dunque supporre che λ e ν siano funzioni della sola β, che μ sia funzione di α e β, ϱ di β e γ, σ di β e δ, sicchè la (18) sia della forma:

$$(120) \quad \lambda(\beta)\,X + \mu(\alpha, \beta)\,X^{\alpha} + \nu(\beta)\,X^{\beta} + \varrho(\beta, \gamma)\,X^{\gamma} + \sigma(\beta\delta)\,X^{\delta} = 0 .$$

La prima delle (114), che ora può scriversi:

$$\lambda(\beta)\gamma + \varrho(\beta, \gamma) = \lambda(\beta)\delta + \sigma(\beta, \delta),$$

assicura l'esistenza di una funzione $m(\beta)$, della sola variabile β, tale che:

$$\varrho(\beta, \gamma) = m(\beta) - \gamma\lambda(\beta), \qquad \sigma(\beta, \delta) = m(\beta) - \delta\lambda(\beta);$$

la (120) diviene allora:

$$\lambda(\beta)[X - \gamma X^\gamma - \delta X^\delta] + \mu(\alpha, \beta) X^\alpha + \nu(\beta) X^\beta + m(\beta)(X^\gamma + X^\delta) = 0;$$

e poichè questa equazione deve possedere gli integrali $\theta_7 - \theta_4$ e $\theta_5 - \theta_8$, risulta:

$$(121) \quad \lambda(\beta)[\theta_7 - \theta_4 + \gamma\theta_4^\gamma - \delta\theta_7^\delta] + \nu(\beta)(\theta_7^\beta - \theta_4^\beta) + m(\beta)(\theta_7^\delta - \theta_4^\gamma) = 0$$

$$(122) \quad \lambda(\beta)[\theta_8 - \theta_5 + \gamma\theta_5^\gamma - \delta\theta_8^\delta] + \nu(\beta)(\theta_8^\beta - \theta_5^\beta) + m(\beta)(\theta_8^\delta - \theta_5^\gamma) = 0 .$$

Derivando rispetto a γ i due membri delle (121), (122) si ha:

$$(123) \quad \begin{cases} [\gamma\lambda(\beta) - m(\beta)]\,\theta_4^{\gamma\gamma} - \nu(\beta)\,\theta_4^{\beta\gamma} = 0 \\ [\gamma\lambda(\beta) - m(\beta)]\,\theta_5^{\gamma\gamma} - \nu(\beta)\,\theta_5^{\beta\gamma} = 0 , \end{cases}$$

e similmente, derivando rispetto a δ i due membri delle (121), (122)

$$(124) \quad \begin{cases} [\delta\lambda(\beta) - m(\beta)]\,\theta_7^{\delta\delta} - \nu(\beta)\,\theta_7^{\beta\delta} = 0 \\ [\delta\lambda(\beta) - m(\beta)]\,\theta_8^{\delta\delta} - \nu(\beta)\,\theta_8^{\beta\delta} = 0 . \end{cases}$$

Le (123), (124) esprimono che le quattro funzioni $\theta_i^x(\beta, x)$ $(i = 4, 5, 7, 8)$ sono integrali dell'equazione differenziale:

$$(125) \quad [x\lambda(\beta) - m(\beta)]\,\theta^x - \nu(\beta)\,\theta^\beta = 0;$$

e cioè, se $\nu(\beta) \neq 0$, esse sono della forma:

$$\theta = \Phi[xA(\beta) + B(\beta)]$$

ove $A(\beta) = \exp \int \frac{\lambda(\beta)}{\nu(\beta)} d\beta , \qquad B(\beta) = -\int \frac{m(\beta)\,A(\beta)}{\nu(\beta)} d\beta .$

Pertanto se $\nu(\beta) \neq 0$:

$$\theta_i^x(\beta, x) = \Phi_i[xA(\beta) + B(\beta)]$$

e quindi

$$\theta_i(\beta, x) = [1/A(\beta)]\, H_i[xA(\beta) + B(\beta)] + \omega_i(\beta) \qquad (i = 4, 5, 7, 8).$$

Sostituendo nella (121) e tenendo conto che $A^\beta = (\lambda/\nu)\, A$, si ha:

$$\lambda(\beta)[\omega_7 - \omega_4] + \nu(\beta)[\omega_7^\beta - \omega_4^\beta] + m(\beta)[H_7' - H_4'] = 0; \tag{126}$$

e di qui, derivando i due membri rispetto a γ e rispetto a δ e tenendo conto che $A(\beta) \neq 0$ si ha:

$$m(\beta)\, H_4'' = m(\beta)\, H_7'' = 0$$

e similmente:

$$m(\beta)\, H_5'' = m(\beta)\, H_8'' = 0 .$$

Se $m(\beta) \neq 0$ si ha $H_i'' = 0$ $(i = 4, 5, 7, 8)$ e quindi:

$$\theta_i(\beta, x) = [1/A(\beta)]\,[a_i(xA + B) + b_i] + \omega_i(\beta) \qquad (a_i,\ b_i \text{ costanti}),$$

e cioè $\theta_i(\beta, x)$ è della forma:

$$\theta_i(\beta, x) = a_i x + \eta_i(\beta)$$

e quindi:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \xi_0(\alpha\beta) & \alpha\xi_0(\alpha\beta) & \theta_2(\alpha)\, \xi_0(\alpha\beta) \\ \gamma & a_4\gamma + \eta_4(\beta) & a_5\gamma + \eta_5(\beta) \\ \delta & a_7\delta + \eta_7(\beta) & a_8\delta + \eta_8(\beta) \end{bmatrix}$$

rappresenta un cono.

Sia ora $m(\beta) = 0$, e quindi $B(\beta) = b$ (costante),

$$\varrho = -\gamma\lambda(\beta), \qquad \sigma = -\delta\lambda(\beta)$$

ed inoltre:

$$\theta_i(\beta,\, x) = [1/A(\beta)]\, H_i\,[\gamma A\,(\beta) + b] + \omega_i\,(\beta) \qquad (i = 4,\ 5,\ 7,\ 8)\,.$$

Sostituendo nelle (115), (116), e ricordando che $A^\beta/A = \lambda/\nu$, si ottiene:

$$\lambda\theta_0 + \mu\theta_0^\alpha + \nu\theta_0^\beta = 0 \tag{127}$$

$$\begin{cases} \lambda\omega_4 - \mu\theta_0 + \nu\omega_4^\beta = 0 \\ \lambda\omega_5 - \mu\theta_2^\alpha\,\theta_0 + \nu\omega_5^\beta = 0 \end{cases} \tag{128}$$

$$\begin{cases} \lambda\omega_7 - \mu\theta_0 + \nu\omega_7^\beta = 0 \\ \lambda\omega_8 - \mu\theta_2^\alpha\,\theta_0 + \nu\omega_8^\beta = 0\,, \end{cases} \tag{129}$$

ed eliminando μ dalle (128) si ha:

$$\theta_2^\alpha\,(\lambda\omega_4 + \theta\omega_4^\beta) = \lambda\omega_5 + \nu\omega_5^\beta\,.$$

Di qui, poichè θ_2^α non può essere una costante, perchè altrimenti V_4 apparterrebbe a qualche S_7, segue che deve essere: $\lambda\omega_4 + \nu\omega_4^\beta = \lambda\omega_5 + \nu\omega_5^\beta = 0$. Poichè $\theta_0 \neq 0$ le (128) assicurano allora che $\mu = 0$, e le (127), (128), (129) possono scriversi:

$$\lambda\theta_0 + \nu\theta_0^\beta = 0$$

$$\lambda\omega_i + \nu\omega_i^\beta = 0 \qquad (i = 4,\ 5,\ 7,\ 8).$$

Si ha inoltre:

$$\lambda A - \nu A^\beta = 0;$$

eppertanto:

$$(A\theta_0)^\beta = (A\omega_i)^\beta = 0.$$

Ne segue:

$$\theta_0 = \frac{\varepsilon\,(\alpha)}{A\,(\beta)}\,, \qquad \omega_i = \frac{k_i}{A\,(\beta)} \qquad (k_i \text{ costanti})$$

La matrice M diviene allora:

$$M \equiv \begin{bmatrix} \dfrac{\varepsilon(\alpha)}{A(\beta)} & \dfrac{\alpha\varepsilon(\alpha)}{A(\beta)} & \dfrac{\theta_2(\alpha)\,\varepsilon(\alpha)}{A(\beta)} \\ \gamma & \dfrac{1}{A(\beta)}\left\{ H_4[\gamma A(\beta) + b] + k_4 \right\} & \dfrac{1}{A(\beta)}\left\{ H_5[\gamma A(\beta) + b] + k_5 \right\} \\ \delta & \dfrac{1}{A(\beta)}\left\{ H_7[\delta A(\beta) + b] + k_7 \right\} & \dfrac{1}{A(\beta)}\left\{ H_8[\delta A(\beta) + b] + k_8 \right\} \end{bmatrix}$$

e moltiplicando tutti i suoi elementi per $A(\beta)$ si vede che questi risultano funzioni solamente di α, $\gamma A(\beta)$, $\delta A(\beta)$. Anche questo caso, dunque, va escluso.

Non resta ormai che il caso in cui valgano le (123), (124) con $\nu(\beta) = 0$, sicchè in luogo della (125) si abbia:

$$[x\lambda(\beta) - m(\beta)]\,\theta^x = 0.$$

Ora è escluso che $\lambda(\beta) = m(\beta) = 0$, perchè altrimenti si avrebbe anche $\varrho(\beta, \gamma) = \sigma(\beta, \delta) = 0$ e la (120) si ridurrebbe alla: $X^a = 0$ e risulterebbe $\theta_0^a = (\alpha\theta_0)^a = (\theta_2\,\theta_0)^a = 0$, il che non può essere. Si ha pertanto:

$$\theta_i^x = \varphi_i(\beta)$$

e quindi

$$\theta_i(\beta, x) = \omega_i(\beta) + x\varphi_i(\beta) \qquad (i = 4, 5, 7, 8).$$

Le (115) forniscono allora:

$$\lambda\theta_0 + \mu\theta_0^a - m(\beta) = 0 \tag{130}$$

$$\lambda\omega_4 - \mu\theta_0 + m(\beta)(\varphi_4 - \alpha) = 0 \tag{131}$$

$$\lambda\omega_5 - \mu\theta_0\,\theta_2^a + m(\beta)(\varphi_5 - \theta_2) = 0 \tag{132}$$

Eliminando μ dalle (131), (132) si ha:

$$\theta_2^a[\lambda\omega_4 + m(\varphi_4 - \alpha)] - [\lambda\omega_5 + m(\varphi_5 - \theta_2)] = 0\,, \tag{133}$$

e di qui, derivando i due membri rispetto ad α, tenendo conto che $\theta_2^{aa} \neq 0$:

$$\lambda(\beta)\,\omega_4(\beta) + m(\beta)[\varphi_4(\beta) - \alpha] = 0\,.$$

Ne segue: $m(\beta) = \lambda(\beta)\,\omega_4(\beta) = 0$; e la (133) dà: $\lambda\omega_5 = 0$. Non può essere $\omega_4(\beta) = \omega_5(\beta) = 0$, per l'ipotesi che V_4 non verifichi la condizione (π_{13}); quindi $\lambda(\beta) = m(\beta) = \varrho(\beta\gamma) = \sigma(\beta\delta) = 0$; ma ciò è escluso perchè altrimenti, come poc'anzi, la matrice (113) rappresenterebbe una V_3.

19. – Consideriamo ora varietà del V tipo, cioè:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \beta\theta_4(\alpha) & \beta\theta_5(\alpha) \\ \gamma & \gamma\delta & \gamma\theta_8(\beta,\ \delta) \end{Vmatrix}, \tag{134}$$

supponendo che le sei funzioni $\beta - 1$, $\gamma - 1$, $\beta\theta_4(\alpha) - \alpha$, $\beta\theta_5(\alpha) - \theta_2(\alpha)$, $\gamma\delta - \alpha$, $\gamma\theta_8(\alpha,\ \delta) - \theta_2(\alpha)$ siano integrali di un'equazione della forma (18). Sostituendo nella (18) in luogo di X successivamente $\beta - 1$, $\gamma - 1$, $\beta\theta_4 - \alpha$, $\beta\theta_5 - \theta_2$ si ha:

$$\nu = \lambda(1 - \beta), \qquad \varrho = \lambda(1 - \gamma)$$

$$\left\{ \begin{aligned} &\lambda(\theta_4 - \alpha) + \mu(\beta\theta_4^\alpha - 1) = 0 \\ &\lambda(\theta_5 - \theta_2) + \mu(\beta\theta_5^\alpha - \theta_2^\alpha) = 0\,. \end{aligned} \right. \tag{135}$$

Non può essere $\lambda = \mu = 0$ perchè altrimenti la (18) sarebbe $X^\delta = 0$ e non potrebbe possedere l'integrale $\gamma\delta - \alpha$; dunque:

$$\begin{vmatrix} \theta_4 - \alpha & \beta\theta_4^\alpha - 1 \\ \theta_5 - \theta_2 & \beta\theta_5^\alpha - \theta_2^\alpha \end{vmatrix} = 0 \tag{135}$$

ed anzi, poichè il primo membro della (136) è lineare rispetto a β:

$$\left\{ \begin{aligned} &(\theta_4 - \alpha)\,\theta_2^\alpha - (\theta_5 - \theta_2) = 0 \\ &(\theta_4 - \alpha)\,\theta_5^\alpha - (\theta_5 - \theta_2)\,\theta_4^\alpha = 0\,. \end{aligned} \right. \tag{137}$$

Le (137) sono intanto verificate se $\theta_4 = \alpha$, $\theta_5 = \theta_2$; ed ora mostriamo che non vi sono altre possibilità. Invero, poichè $\theta_2^\alpha \neq 0$, la prima delle (137) dà:

$$\theta_4 = \alpha + \frac{\theta_5 - \theta_2}{\theta_2^\alpha}$$

e quindi:

$$\theta_4^\alpha = \frac{\theta_5^\alpha \theta_2^\alpha - (\theta_5 - \theta_2)\, \theta_2^{\alpha\alpha}}{(\theta_2^\alpha)^2}$$

e sostituendo nella seconda delle (137):

$$(\theta_5 - \theta_2)^2\, \theta_2^{\alpha\alpha} = 0 .$$

Poichè $\theta_2^{\alpha\alpha} \neq 0$, risulta allora $\theta_5 = \theta_2$ e quindi anche $\theta_4 = \alpha$.

Le (135) implicano allora che $\mu = 0$, e quindi le funzioni $\gamma\delta - \alpha$ e $\gamma\theta_8(\alpha, \delta) - \theta_2(\alpha)$ devono essere integrali di un'equazione della forma:

$$\lambda\,[X + (1-\beta)\, X^\beta + (1-\gamma)\, X^\gamma] + \sigma X^\delta = 0,$$

sicchè: $(\delta - \alpha)\, \theta_8^\delta = \theta_8 - \theta_2$. E ciò implica l'esistenza di una funzione $\omega(\alpha)$, della sola variabile α, tale che: $\theta_8(\alpha, \delta) = \theta_2(\alpha) + (\delta - \alpha)\, \omega(\alpha)$.

La matrice (134) deve dunque essere della forma:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ \gamma & \gamma\delta & \gamma\,[\theta_2(\alpha) + (\delta - \alpha)\, \omega(\alpha)] \end{bmatrix},$$

od anche, con un semplice cambiamento di parametri:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \beta & \alpha\beta & \beta\theta_2(\alpha) \\ \gamma & \alpha\gamma + \delta & \gamma\theta_2(\alpha) + \delta\omega(\alpha) \end{bmatrix}. \tag{138}$$

Viceversa, si verifica in modo immediato che *tutti gli* S_4 *tangenti di una* V_4 *della forma* (138) *sono incidenti ai quattro piani* π_i, *ed anzi hanno a comune una retta col piano* π_3; *essi inoltre segano secondo piani ciascuno dei tre* S_5 π_{13}, π_{23}, π_{34}. *Una* V_4 *della forma*(138) *è composta di* ∞^1 S_3 *aventi a comune un punto con ciascuno dei tre piani* π_1, π_2, π_4 *ed una retta con il piano* π_3.

20. – Sia ora V_4 una varietà del VI tipo, cioè:

$$(139) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \gamma & \beta\gamma & \gamma\omega_5(\beta) \\ \delta & \delta\omega_7(\alpha,\beta) & \delta\omega_8(\alpha,\beta) \end{Vmatrix};$$

ed imponiamo l'esistenza di un'equazione come la (18) avente gli integrali $\gamma - 1$, $\delta - 1$, $\beta\gamma - \alpha$, $\gamma\omega_5(\beta) - \theta_2(\alpha)$, $\delta\omega_7(\alpha, \beta) - \alpha$, $\delta\omega_8(\alpha, \beta) - \theta_2(\alpha)$. Per ciò è necessario e sufficiente che le funzioni $\gamma\omega_5 - \theta_2$, $\delta\omega_7 - \alpha$, $\delta\omega_8 - \theta_2$ siano integrali di un'equazione della forma:

$$\lambda\,[X + (\beta - \alpha)\,X^\alpha + (1 - \gamma)\,X^\gamma + (1 - \delta)\,X^\delta] + \nu\,[\gamma X^\alpha + X^\beta] = 0;$$

deve cioè risultare:

$$(140) \qquad \begin{Vmatrix} \omega_5 - \theta_2 - (\beta - \alpha)\,\theta_2^\alpha & \gamma\,(\omega_5^\beta - \theta_2^\alpha) \\ \omega_7 - \alpha + (\beta - \alpha)\,(\delta\omega_7^\alpha - 1) & \gamma\,(\delta\omega_7^\alpha - 1) + \delta\omega_7^\beta \\ \omega_8 - \theta_2 + (\beta - \alpha)\,(\delta\omega_8^\alpha - \theta_2^\alpha) & \gamma(\delta\omega_8^\alpha - \theta_2^\alpha) + \delta\omega_8^\beta \end{Vmatrix} = 0.$$

Sarà intanto nulla la matrice che si deduce dalla (140) ponendovi $\gamma = 0$; e ciò, tenendo conto che ω_7^β ed ω_8^β non possono essere entrambe nulle per l'ipotesi che V_4 non soddisfi la condizione (π_{12}), implica che:

$$\omega_5 - \theta_2 - (\beta - \alpha)\,\theta_2^\alpha = 0;$$

e di qui, derivando i due membri rispetto ad α: $(\alpha - \beta)\,\theta_2^{\alpha\alpha} = 0$.

Questo caso va dunque escluso perchè conduce a varietà contenute in qualche S_7.

21. – Passiamo ora all'esame di varietà dell'VIII tipo, cioè:

$$(141) \qquad M \equiv \begin{Vmatrix} \lambda(\alpha,\gamma,\delta) & \alpha\lambda(\alpha,\gamma,\delta) & \theta_2(\alpha)\,\lambda(\alpha,\gamma,\delta) \\ \mu(\beta,\gamma,\delta) & \beta\mu(\beta,\gamma,\delta) & \theta_5(\beta)\,\mu(\beta,\gamma,\delta) \\ 1 & \gamma & \delta \end{Vmatrix}.$$

Affinchè gli spazi tangenti di una siffatta varietà siano tutti appoggiati al piano π_4, è necessario e sufficiente che abbia caratteristica quattro la matrice:

$$\left\| \begin{matrix} \lambda - 1 & \alpha\lambda - \gamma & \theta_2 \lambda - \delta & \mu - 1 & \beta\mu - \gamma & \theta_5 \mu - \delta \\ \lambda^\alpha & \lambda + \alpha\lambda^\alpha & \theta_2^\alpha \lambda + \theta_2 \lambda^\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu^\beta & \mu + \beta\mu^\beta & \theta_5^\beta \mu + \theta_5 \mu^\beta \\ \lambda^\gamma & \alpha\lambda^\gamma - 1 & \theta_2 \lambda^\gamma & \mu^\gamma & \beta\mu^\gamma - 1 & \theta_5 \mu^\gamma \\ \lambda^\delta & \alpha\lambda^\delta & \theta_2 \lambda^\delta - 1 & \mu^\delta & \beta\mu^\delta & \theta_5 \mu^\delta - 1 \end{matrix} \right\| ,$$

e cioè che esistano cinque funzioni non tutte nulle A, B, C, D, E tali che:

$$\begin{cases} A(\lambda - 1) + B\lambda^\alpha + D\lambda^\gamma + E\lambda^\delta = 0 \\ A(\alpha\lambda - \gamma) + B(\lambda + \alpha\lambda^\alpha) + D(\alpha\lambda^\gamma - 1) + E\alpha\lambda^\delta = 0 \\ A(\theta_2 \lambda - \delta) + B(\theta_2^\alpha \lambda + \theta_2 \lambda^\alpha) + D\theta_2 \lambda^\gamma + E(\theta_2 \lambda^\delta - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A(\mu - 1) + C\mu^\beta + D\mu^\gamma + E\mu^\delta = 0 \\ A(\beta\mu - \gamma) + C(\mu + \beta\mu^\beta) + D(\beta\mu^\gamma - 1) + E\beta\mu^\delta = 0 \\ A(\theta_5 \mu - \delta) + C(\theta_5^\beta \mu + \theta_5 \mu^\beta) + D\theta_5 \mu^\gamma + E(\theta_5 \mu^\delta - 1) = 0, \end{cases}$$

e quindi:

$$\begin{cases} A(\lambda - 1) + B\lambda^\alpha + D\lambda^\gamma + E\lambda^\delta = 0 \\ A(\alpha - \gamma) + B\lambda - D = 0 \\ A(\theta_2 - \delta) + B\lambda\theta_2^\alpha - E = 0 \end{cases} \tag{142}$$

$$\begin{cases} A(\mu - 1) + C\mu^\beta + D\mu^\gamma + E\mu^\delta = 0 \\ A(\beta - \gamma) + C\mu - D = 0 \\ A(\theta_5 - \delta) + C\mu\theta_5^\beta - E = 0 . \end{cases} \tag{143}$$

Mostriamo in primo luogo che le ipotesi ammesse assicurano che non sono nulle le matrici dei coefficienti di A, B, D, E ed A, C, D, E rispettivamente nei due sistemi (142), (143). Supponiamo invero che sia, ad esempio:

$$\left\| \begin{matrix} \lambda - 1 & \lambda^\alpha & \lambda^\gamma & \lambda^\delta \\ \alpha - \gamma & \lambda & -1 & 0 \\ \theta_2 - \delta & \lambda \theta_2^\alpha & 0 & -1 \end{matrix} \right\| = 0 ;$$

ciò significa che:

$$\lambda^\alpha + \theta_2^\alpha \lambda \lambda^\delta + \lambda \lambda^\gamma = 0 \tag{144}$$

$$\lambda - 1 + \lambda^\delta (\theta_2 - \delta) + \lambda^\gamma (\alpha - \gamma) = 0 . \tag{145}$$

La (145) esprime il fatto che la funzione $\lambda - 1$ è integrale dell'equazione differenziale:

$$X + (\alpha - \gamma)\, X^\gamma + (\theta_2 - \delta)\, X^\delta = 0$$

il cui integrale generale è:

$$X = (\gamma - \alpha)\, \Phi \left[\frac{\delta - \theta_2}{\gamma - \alpha} \right] ,$$

sicchè

$$\lambda = 1 + (\gamma - \alpha)\, \Phi \left[\frac{\delta - \theta_2}{\gamma - \alpha} \right] .$$

Sostituendo nella (144) si trova, ponendo $\xi = \dfrac{\delta - \theta_2}{\gamma - \alpha}$ e tenendo presente che $\Phi \neq 0$ (per l'ipotesi che V_4 non appartenga ad S_7):

$$\Phi(\xi) - \xi \Phi^\xi + \theta_2^\alpha \Phi^\xi = 0$$

il che implica che $\Phi^\xi \neq 0$ e che

$$\theta_2^\alpha = \xi - \Phi / \Phi^\xi \tag{146}$$

sia una costante, in quanto il secondo membro è funzione della sola variabile ξ. Ma ciò è escluso dall'ipotesi che V_4 non appartenga ad alcun S_7.

Le (142) implicano che i rapporti $A:B:D:E$ non dipendono dalla variabile β e le (143) che i rapporti $A:C:D:E$ non dipendono da α. Si può allora supporre che A, D, E siano funzioni dell sole variabili γ e δ, che B sia funzione di α, γ, δ e che C sia funzione di β, γ, δ. Derivando rispetto ad α la seconda delle (142) e rispetto a β la seconda delle (143) si ha: $A+(B\lambda)^\alpha=A+(C\mu)^\beta=0$; ne segue $(B\lambda)^\alpha=(C\mu)^\beta$; esiste quindi una funzione H delle sole variabili γ, δ tale che: $(B\lambda)^\alpha=H(\gamma,\ \delta)$, $(C\mu)^\beta=H(\gamma,\ \delta)$ e pertanto esistono due funzioni $K(\gamma,\ \delta)$, $K_1(\gamma,\ \delta)$ tali che:

$$B\lambda=\alpha H+K, \qquad C\mu=\beta H+K_1. \tag{147}$$

Si ha pertanto:

$$A(\alpha-\gamma)+\alpha H+K-D=0,$$

$$A(\beta-\gamma)+\beta H+K_1-\mathrm{D}=0$$

e quindi:

$$(A+H)(\alpha-\beta)+K-K_1=0; \tag{148}$$

anzi, poichè il primo membro della (148) è un polinomio di primo grado in $\alpha-\beta$ con coefficienti che dipendono solo da β e γ, deve essere: $H=-A$, $K=K_1$. Le (147) dànno allora:

$$B\lambda=-\alpha A+K, \qquad C\mu=-\beta A+K, \tag{149}$$

onde la terza delle (142) e la terza delle (143) divengono:

$$A(\theta_2-\delta)-(\alpha A-K)\,\theta_2^\alpha-E=0,$$

$$A(\theta_5-\delta)-(\beta A-K)\,\theta_5^\beta-E=0\,.$$

Ne segue:

$$A(\theta_2-\theta_5-\alpha\theta_2^\alpha+\beta\theta_5^\beta)+K(\theta_2^\alpha-\theta_5^\beta)=0$$

e di qui, derivando rispetto ad α e rispetto a β:

$$\theta_2^{\alpha\alpha}\,(A\alpha - K) = \theta_5^{\beta\beta}\,(A\beta - K) = 0.$$

Per le ipotesi ammesse si ha $\theta_2^{\alpha\alpha}\,\theta_5^{\beta\beta} \neq 0$; quindi: $A = K = 0$; e per le (149) — tenuto conto che $\lambda\mu \neq 0$ —: $B = C = 0$. Le (142), (143) dànno infine: $D = E = 0$.

Si conclude che una V_4 del tipo VIII, che non giaccia in qualche S_7, non può avere tutti gli S_4 tangenti appoggiati al piano π_4.

22. – Consideriamo adesso varietà del tipo IX, cioè:

$$(150)\qquad M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \delta & \beta\delta & \delta\theta_5(\beta) \\ \lambda(\alpha\beta\gamma\delta) & \lambda(\alpha\beta\gamma\delta)\,\gamma & \lambda(\alpha\beta\gamma\delta)\,\theta_8(\gamma) \end{bmatrix}.$$

Affinchè sia soddisfatta la condizione (π_4) è necessario e sufficiente che la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \delta - 1 & \beta\delta - \alpha & \delta\theta_5 - \theta_2 & \lambda - 1 & \lambda\gamma - \alpha & \lambda\theta_8 - \theta_2 \\ 0 & -1 & -\theta_2^{\alpha} & \lambda^{\alpha} & \lambda^{\alpha}\gamma - 1 & \lambda^{\alpha}\theta_8 - \theta_2^{\alpha} \\ 0 & \delta & \delta\theta_5^{\beta} & \lambda^{\beta} & \lambda^{\beta}\gamma & \lambda^{\beta}\theta_8 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda^{\gamma} & \lambda^{\gamma}\gamma + \lambda & \lambda^{\gamma}\theta_8 + \lambda\theta_8^{\gamma} \\ 1 & \beta & \theta_5 & \lambda^{\delta} & \lambda^{\delta}\gamma & \lambda^{\delta}\theta_8 \end{Vmatrix}$$

abbia rango quattro. Devono dunque esistere cinque funzioni A, B, C, D, E non tutte nulle tali che:

$$(151)\qquad \begin{cases} A\,(\delta - 1) + E = 0 \\ A\,(\beta\delta - \alpha) - B + C\delta + E\beta = 0 \\ A\,(\delta\theta_5 - \theta_2) - B\theta_2^{\alpha} + C\delta\theta_5^{\beta} + E\theta_5 = 0, \end{cases}$$

$$
(152)\qquad \left\{
\begin{array}{l}
A\,(\lambda - 1) + B\lambda^{\alpha} + C\lambda^{\beta} + D\lambda^{\gamma} + E\lambda^{\delta} = 0 \\[2ex]
A\,(\gamma - \alpha) - B + D\lambda = 0 \\[2ex]
A\,(\theta_8 - \theta_2) - B\theta_2^{\alpha} + D\lambda\theta_8^{\gamma} = 0\,.
\end{array}
\right.
$$

Se la matrice dei coefficienti di A, B, C, E nelle (151):

$$
(153)\qquad \left\|
\begin{array}{cccc}
\delta - 1 & 0 & 0 & 1 \\[2ex]
\beta\delta - \alpha & -1 & \delta & \beta \\[2ex]
\delta\theta_5 - \theta_2 & -\theta_2^{\alpha} & \delta\theta_5^{\beta} & \theta_5
\end{array}
\right\|
$$

non è nulla, le (151) dànno:

$$
(154)\qquad A : B : C : E = \delta\,(\theta_2^{\alpha} - \theta_5^{\beta}) : \delta\{\,\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\,\theta_5^{\beta}\,\} :
$$

$$
:\{\,\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\,\theta_2^{\alpha}\,\} : \delta\,(\delta - 1)\,(\theta_5^{\beta} - \theta_2^{\alpha})\,.
$$

Eliminando $D\lambda$ dalla seconda e dalla terza delle (152) si ha poi:

$$
A\,(\theta_8 - \theta_2) - B\theta_2^{\alpha} - \theta_8^{\gamma}\,[A\,(\gamma - \alpha) - B] = 0\,,
$$

ossia, per le (154):

$$
(\theta_2^{\alpha} - \theta_5^{\beta})\,[\theta_8 - \theta_2 + (\alpha - \gamma)\,\theta_8^{\gamma}] + (\theta_8^{\gamma} - \theta_2^{\alpha})\,[\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\,\theta_5^{\beta}] = 0\,;
$$

e di qui, derivando rispetto a γ e tenendo conto che $\theta_8^{\gamma\gamma} \neq 0$ per l'ipotesi che V_4 non appartenga ad S_7:

$$
(\alpha - \gamma)\,(\theta_2^{\alpha} - \theta_5^{\beta}) + \theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\,\theta_5^{\beta} = 0\,.
$$

Ciò implica $\theta_2^{\alpha} - \theta_5^{\beta} = 0$ e quindi $\theta_2^{\alpha\alpha} = \theta_5^{\beta\beta} = 0$ contro le ipotesi.

D'altra parte se la matrice (153) è nulla, risulta ancora $\theta_2^{\alpha} - \theta_5^{\beta} = 0$. Le varietà del IX tipo vanno dunque escluse anch'esse.

23. – Mostriamo infine che nessuna varietà del X tipo, che non giaccia in spazi di dimensione $\leqslant 7$, può avere tutti gli S_4 tangenti appoggiati al piano π_4. Infatti la condizione necessaria e sufficiente affinchè gli S_4 tangenti di una V_4 del tipo:

$$M \equiv \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \theta_2(\alpha) \\ \delta & \beta\delta & \delta\theta_5(\beta) \\ \gamma & \gamma g(\alpha, \beta) & \gamma\Phi_8[g(\alpha, \beta)] \end{bmatrix}$$

siano tutti appoggiati al piano π_4 è che la matrice:

$$\begin{Vmatrix} \delta - 1 & \beta\delta - \alpha & \delta\theta_5 - \theta_2 & \gamma - 1 & \gamma g - \alpha & \gamma\Phi_8(g) - \theta_2 \\ 0 & -1 & -\theta_2^\alpha & 0 & \gamma g^\alpha - 1 & \gamma\Phi_8^g g^\alpha - \theta_2^\alpha \\ 0 & \delta & \delta\theta_5^\beta & 0 & \gamma g^\beta & \gamma\Phi_8^g g^\beta \\ 0 & 0 & 0 & 1 & g & \Phi_8 \\ 1 & \beta & \theta_5 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

abbia caratteristica quattro.

Come nel n. 21 si riconosce l'esistenza di cinque funzioni A, B, C, D, E non tutte nulle, tali che sussistano le (154) e tali inoltre che:

$$(155) \qquad \begin{cases} A(\gamma - 1) + D = 0 \\ A(g - \alpha) + B(\gamma g^\alpha - 1) + C\gamma g^\beta = 0 \\ A(\Phi_8 - \theta_2) + B(\gamma\Phi_8^g g^\alpha - \theta_2^\alpha) + C\gamma\,\Phi_8^g g^\beta = 0\,. \end{cases}$$

Supponendo, come è lecito in forza delle (154), che A, B, C non dipendano da γ, la seconda e la terza delle (155), che sono lineari rispetto a γ, implicano che:

$$Bg^\alpha + Cg^\beta = 0,$$

e quindi:

$$\delta\,[\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\,\theta_5^\beta]\,g^\alpha + [\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\,\theta_2^\alpha]\,g^\beta = 0;$$

e ciò, dato che il primo membro è un polinomio di primo grado rispetto a δ, esige che:

$$[\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\, \theta_5^{\beta}]\, g^{\alpha} = [\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\, \theta_2]\, g^{\beta} = 0 \, .$$

Ora g^{α} e g^{β} non possono essere entrambe nulle, perchè altrimenti V_4 apparterrebbe ad un S_6; quindi:

$$[\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\, \theta_5^{\beta}]\, [\theta_5 - \theta_2 + (\alpha - \beta)\, \theta_2^{\alpha}] = 0 \, .$$

Ne segue subito: $\theta_2^{\alpha\alpha}\, \theta_5^{\beta\beta} = 0$; e ciò è contrario all'ipotesi che V_4 non appartenga ad alcun S_7.

Rileviamo esplicitamente che i risultati dei n. 22, 23 non sono in contrasto con quelli del n. 19, ove abbiamo ottenuto delle V_4 con gli spazi tangenti appoggiati ai quattro piani π_i e seganti secondo piani tre S_5; ma questi tre S_5 non sono generici, avendo a comune il piano π_3.

24. – Ricordo infine, per comodità del lettore, alcuni dei risultati conseguiti in [2].

1°). Esistono nello spazio S_8 due diverse famiglie di V_4 differenziabili, non coni, le quali hanno gli spazi tangenti che, senza segare secondo piani un medesimo S_5, sono tutti incidenti ai tre piani π_1, π_2, π_3. Esse sono:

$$\text{(XI)} \qquad \begin{Vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \gamma & \gamma K_4(\alpha, \beta) & \gamma\, K_5(\alpha, \beta) \\ \delta & \delta K_7(\alpha, \beta) & \delta K_8(\alpha, \beta) \end{Vmatrix} ;$$

$$\text{(XII)} \qquad \begin{Vmatrix} \beta & \theta_1(\alpha\beta) & \theta_2(\alpha\beta) \\ \gamma & \theta_4(\alpha\gamma) & \theta_5(\alpha\gamma) \\ \delta & \theta_7(\alpha\delta) & \theta_8(\alpha\delta) \end{Vmatrix} .$$

2°). L'unica varietà V_4 di S_8, appartenente alla famiglia (XI) e soddisfacente all'ipotesi (π_4), ma non ad alcuna delle (π_{ik}) è la V_4^6 che al modo di C. Segre rappresenta le coppie di punti estratti da due piani.

3°). La ricerca delle V_4 della famiglia (XII) che soddisfano alla condizione (π_4), ma non ad alcuna delle (π_{ik}), conduce ai seguenti tipi:

$$(156)\qquad \begin{Vmatrix} \alpha+\beta & A_1(\alpha)+B_1(\beta) & A_2(\alpha)+B_2(\beta) \\ \alpha+\gamma & A_1(\alpha)+C_1(\gamma) & A_2(\alpha)+C_2(\gamma) \\ \alpha+\delta & A_1(\alpha)+D_1(\delta) & A_2(\alpha)+D_2(\delta) \end{Vmatrix},$$

$$(157)\qquad \begin{Vmatrix} \beta & \alpha+B_1(\beta) & \varphi(\alpha)+B_2(\beta) \\ \gamma & \alpha+C_1(\gamma) & \varphi(\alpha)+C_2(\gamma) \\ \delta & \alpha+D_1(\delta) & \varphi(\alpha)+D_2(\delta) \end{Vmatrix},$$

$$(158)\qquad \begin{Vmatrix} \lambda(\alpha)+\beta\varphi_0(\alpha) & \mu(\alpha)+\beta\varphi_1(\alpha) & \nu(\alpha)+\beta\varphi_2(\alpha) \\ \lambda(\alpha)+\gamma\varphi_0(\alpha) & \mu(\alpha)+\gamma\varphi_4(\alpha) & \nu(\alpha)+\gamma\varphi_5(\alpha) \\ \lambda(\alpha)+\delta\varphi_0(\alpha) & \mu(\alpha)+\delta\varphi_7(\alpha) & \nu(\alpha)+\delta\varphi_8(\alpha) \end{Vmatrix},$$

$$(159)\qquad \begin{Vmatrix} \beta & \beta\lambda(\alpha)+\varphi_1(\alpha) & \beta\mu(\alpha)+\varphi_2(\alpha) \\ \gamma & \gamma\lambda(\alpha)+\varphi_4(\alpha) & \gamma\mu(\alpha)+\varphi_5(\alpha) \\ \delta & \delta\lambda(\alpha)+\varphi_7(\alpha) & \delta\mu(\alpha)+\varphi_8(\alpha) \end{Vmatrix}.$$

Le (156), (157) sono entrambe del tipo:

$$M \equiv \begin{Vmatrix} A_0(\alpha)+B_0(\beta) & A_1(\alpha)+B_1(\beta) & A_2(\alpha)+B_2(\beta) \\ A_0(\alpha)+C_0(\gamma) & A_1(\alpha)+C_1(\gamma) & A_2(\alpha)+C_2(\gamma) \\ A_0(\alpha)+D_0(\delta) & A_1(\alpha)+D_1(\delta) & A_2(\alpha)+D_2(\delta) \end{Vmatrix},$$

le (158), (159) sono serie semplicemente infinite di spazi S_3 appoggiati ai quattro piani π_i; in particolare, le (159) sono serie di ∞^1 S_3 seganti i piani π_i in quattro punti complanari.

I teoremi enunciati al n. 1 *sono così dimostrati.*

Bibliografia.

[1] D. GALLARATI, *Alcune osservazioni sopra le varietà i cui spazi tangenti si appoggiano irregolarmente a spazi assegnati,* Rend. Acc. Lincei (8) **20** $(1956)_1$, 193-199.

[2] D. GALLARATI, *Intorno a certe V_4 di S_8 ed una proprietà caratteristica della V_4^6 che rappresenta le coppie di punti di due piani,* Ricerche di Matematica **8** (1959), 52-82.

[3] F. SEVERI e B. SEGRE, *L'inviluppo di un sistema più volte infinito di curve piane,* Annali di Matematica (4) **8** (1930), 173-199.

N. B. Nei lavori qui citati il lettore troverà ulteriori ampie notizie bibliografiche.

* * *