Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 301-312

PAOLO SANTORO (*)

Convergenza delle approssimazioni successive per le equazioni differenziali di ordine n. (**)

1. Nel presente lavoro si stabiliscono teoremi di unicità locale e di convergenza delle approssimazioni successive in un intorno destro del punto $0 \equiv (0, 0, ..., 0)$ per il problema iniziale relativo ad un'equazione differenziale d'ordine n, vale a dire per il problema:

$$\text{(A)} \qquad \begin{cases} x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) & x^{(j)} = \dfrac{d^j x}{dt^j} \\ x(0) = x'(0) = \ldots = x^{(n-1)}(0) = 0 \,. \end{cases}$$

Si deducono dapprima (n. **2**), da noti risultati relativi ai sistemi, due teoremi supponendo, oltre altre ipotesi, che la $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ sia definita nel parallelepipedo chiuso $0 \leqslant t \leqslant a$, $|x_j| \leqslant b$ ivi continua e quindi limitata.

In seguito (n. **3**) viene dato un teorema di unicità e convergenza delle approssimazioni successive supponendo che la $f(t, x_1, \ldots, x_n)$ risulti definita e continua soltanto nell'insieme $0 < t \leqslant a$, $|x_i| < b$ (1) con l'aggiunta del punto $(0, 0, \ldots, 0)$ e sia ivi limitata e soddisfi ad altre opportune ipotesi.

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica, Firenze (Italia).

(**) Ricevuto il 20 settembre 1961. L'Autore della presente nota fa parte del 6° Gruppo di Ricerche per la matematica del C.N.R..

(1) Per teoremi di sola unicità negli insiemi non chiusi cfr. [7], [8], [13].

2. Per un'equazione differenziale del primo ordine è classico il seguente teorema [9], [10], [11], oppure [12]:

Teorema A. *Se* $g(t, y)$ *è continua per* $0 \leqslant t \leqslant a$, $|y| \leqslant b$, $a > 0$, $b \geqslant 0$ *e soddisfa la condizione*

$$|g(t, y) - g(t, \bar{y})| \leqslant \frac{k}{t} |y - \bar{y}| \quad per \quad t > 0 \quad \text{e} \quad 0 < k \leqslant 1 \tag{1}$$

allora esiste una sola soluzione del problema

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{y} = g(t, y) \qquad \dot{y} = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \\ y(0) = 0 \end{array} \right. \tag{B}$$

e detta soluzione si può ottenere mediante il procedimento delle approssimazioni successive di PICARD-PEANO *per* $0 \leqslant t \leqslant \delta$ *con*

$$\delta = \min\left(a, \frac{b}{M}\right), \quad ove \quad M = \max_{\substack{0 \leq t \leq a \\ |y| \leq b}} |g(t, y)|. \tag{2}$$

Recentemente è stato dimostrato da vari Autori ([2], [3], [5], [6]) il seguente

Teorema B. *Si considerino le costanti* α, β, k, p, *tali che*

(a) $0 < \alpha < 1$,

(b) $\beta < \alpha$,

(c) $0 < k$, $0 < p$,

(d) $k < 1 + \dfrac{\alpha - \beta}{1 - \alpha}$.

Se $g(t, y)$ *è continua per* $0 \leqslant t \leqslant a$, $|y| \leqslant b$ *e soddisfa le condizioni:*

$$|g(t, y) - g(t, \bar{y})| \leqslant \frac{k}{t} |y - \bar{y}| \quad per \quad t > 0, \tag{3}$$

$$|g(t, y) - g(t, \bar{y})| \leqslant p \frac{|y - \bar{y}|^\alpha}{t^\beta} \quad per \quad t > 0, \tag{3'}$$

allora il problema (B) *ammette una sola soluzione che si può ottenere mediante il procedimento delle approssimazioni successive per* $0 \leqslant t \leqslant \delta$ *con* δ *dato dalle* (2).

In questa prima parte del lavoro esaminiamo alcune estensioni possibili dei due teoremi al caso delle equazioni differenziali d'ordine n.

Il teorema A è stato esteso ai sistemi di equazioni differenziali del primo ordine [1], [4], [10] con il seguente

Teorema A'. *Se $g(t, y)$ è un n-vettore definito in R^{n+1}: $0 \leqslant t \leqslant a$, $\| y \| \leqslant b$, $a > 0$, $b > 0$ ivi continuo e soddisfacente la relazione*

$$(1') \qquad \| g(t, y) - g(t, \bar{y}) \| \leqslant \frac{k}{t} \| y - \bar{y} \|, \qquad t > 0, \quad 0 < k \leqslant 1,$$

allora esiste una sola soluzione del problema

$$(\mathrm{B}') \qquad \begin{cases} \dot{y} = g(t, y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

e detta soluzione si può ottenere mediante il procedimento delle approssimazioni successive per $0 \leqslant t \leqslant \delta$ con $\delta = \min\left(a, \dfrac{b}{M}\right)$ essendo $M = \max\limits_{(t,y) \in R^{n+1}} \| g(t, y) \|$ e con

$$(4) \qquad \| \xi \| = \sum_{i=1}^{n} | \xi_i | \ (^2).$$

D'altra parte è noto che il problema (A) si può ricondurre al problema

$$(\mathrm{C}) \qquad \begin{cases} \dot{u} = \mathfrak{A} u + h(t, u) \\ u(0) = 0 \end{cases}$$

con

$$u = \begin{bmatrix} x \\ \dot{x} \\ \cdots \\ x^{n-1} \end{bmatrix}, \quad \dot{u} = \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \ddot{x} \\ \cdots \\ x^{(n)} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{bmatrix}, \quad h(t, u) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdots\cdots \\ f(t, x, \dot{x}, \ldots, x^{(n-1)}) \end{bmatrix}.$$

---

(2) Si noti che il teorema sussiste ancora allorchè si prenda come norma

$$(4') \qquad \| \xi \| = \max_{1 \leq i \leq n} | \xi_i | \qquad \text{(cfr. [1])};$$

oppure come norma

$$(4'') \qquad \| \xi \| = \Big(\sum_{i=1}^{n} | \xi_i |^2\Big)^{1/2}.$$

Sia

$$\dot{y} = \mathfrak{A} Y , \qquad Y(0) = \mathrm{I}, \tag{5}$$

sia cioè

$$Y = \begin{bmatrix} 1 & t & t^2/2\,! & \dots & t^{n-1}/(n-1)\,! \\ 0 & 1 & t & \dots & t^{n-2}/(n-2)\,! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

ed operiamo la trasformazione

$$u = Yz \tag{6}$$

ed allora il problema (C) diviene equivalente al problema

$$\text{(B}''\text{)} \qquad \begin{cases} \dot{z} = Y^{-1}\, h\,(t,\ z) \\ z\,(0) = 0\,. \end{cases}$$

In base al teorema A′ si ha che il problema (B″) ammette una sola soluzione e le approssimazioni successive convergono se

$$\| \; Y^{-1}\,(h\,(t,\ z) - h\,(t,\ \bar{z})) \; \| \leqslant (k/t) \; \| \; Y\,(z - \bar{z}) \; \| \quad \text{con } t > 0 \text{ e con } 0 < k \leqslant 1. \tag{7}$$

Essendo

$$Y^{-1}\,(t) = Y\,(-t) = \begin{bmatrix} 1 & -t & t^2/2\,! & \dots & (-1)^{n-1}\, t^{n-1}/(n-1)\,! \\ 0 & 1 & -t & \dots & (-1)^{n-2}\, t^{n-2}/(n-2)\,! \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

segue che la (7), tenuto conto di (6) e di (4), diviene

$$(8) \quad |f(t, x_0, x', \dots, x^{(n-1)}) - f(t, \bar{x}_0, \bar{x}', \dots, \bar{x}^{(n-1)})| \leq \frac{k}{t} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} |x^{(j)} - \bar{x}^{(j)}|}{\sum_{j=0}^{n=1} t^j/j!}, \quad x^{(0)} = x \text{ (3)}.$$

Possiamo perciò affermare il seguente corollario al teorema A:

Corollario A'. *Sia* S *l'insieme dei punti* $(t, x_0, x_1, \dots, x_{(n-1)})$, $0 \leq t \leq a$, $|x_j| \leq b$; $(j = 0, 1, \dots, n-1)$. *Se* $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ *è una funzione continua in* S *e soddisfacente per* $t > 0$ *la relazione* (8) *con* $0 < k \leq 1$ *allora il problema* (A) *ammette una sola soluzione che si può ottenere mediante le approssimazioni successive in* $0 \leq t \leq \delta$.

Partendo dal Teorema B si ha la seguente estensione, che di esso è stata data ai sistemi [2].

Teorema B'. *Se* $g(t, y)$ *è un* n*-vettore definito in* R^{n+1}: $0 \leq t \leq a$, $\| y \| \leq b$, $a > 0$, $b > 0$, *ivi continuo e tale da soddisfare le relazioni*:

$$(3'') \qquad \| g(t, y) - g(t, \bar{y}) \| \leq \frac{k}{t} \| y - \bar{y} \| \qquad \text{per} \quad t > 0,$$

$$(3''') \qquad \| g(t, g) - g(t, \bar{y}) \| \leq p \frac{\| y - \bar{y} \|^{\alpha}}{t^{\beta}} \qquad \text{per} \quad t > 0,$$

con α, β, k, p *costanti soddisfacenti le ipotesi del Teorema B*, $\| \xi \|$ *data da* (4), *allora il problema* (B') *ammette una sola soluzione che si può ottenere mediante il procedimento delle approssimazioni successive.*

---

(3) Se le norme sono quelle considerate in nota (1) si ha rispettivamente

$$(8') \qquad |f(t, x_0, \dots, x^{(n-1)}) - f(t, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}^{(n-1)})| \leq \frac{k}{t} \max_j |x^{(j)} - \bar{x}^{(j)}|$$

$$(8'') \qquad |f(t, x_0, \dots, x^{(n-1)}) - f(t, \bar{x}_0, \dots, \bar{x}^{(n-1)})| \leq \frac{k}{t} \frac{\left(\sum_{j=0}^{n-1} (x^{(j)} - \bar{x}^{(j)})^2 \right)^{1/2}}{\left(\sum_{j=0}^{n-1} \left(\frac{t^j}{j!} \right)^2 \right)^{1/2}}.$$

Dal teorema (B′) si ha un'estensione analoga a quella del teorema (A′) con il seguente

Corollario B′. *Sia $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ continua in S e soddisfacente le relazioni*

$$(9)\qquad |f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - f(t, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})| \leqslant \frac{k}{t} \frac{\sum_{j=0}^{n-1} |x_j - \bar{x}_j|}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!}}, \quad t > 0$$

$$(10)\qquad |f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - f(t, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})| \leqslant \frac{p}{t^\beta} \frac{\left\{\sum_{j=0}^{n-1} |x_j - \bar{x}_j|^\alpha\right\}}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{t^j}{j!}}$$

con α, β, p, k soddisfacenti le ipotesi del teorema B allora esiste una sola soluzione del problema (A) *che si può ottenere mediante il procedimento delle approssimazioni successive per $0 \leqslant t \leqslant \delta$.*

3. Indichiamo con E l'insieme dei punti $(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ tale che $0 < t \leqslant \leqslant a < 1$, $|x_j| < b$, $(j = 0, 1, \dots, n-1)$ e indichiamo con E_0 l'insieme dei punti E con l'aggiunta del punto $(0, 0, \dots, 0)$. Siano poi α_j, L_j, β_j, L, α, γ, δ, k, $(j = 1, 2, \dots n)$ numeri reali tali che

$$(a')\qquad \alpha_j > 0,\ L_j \geqslant 0,\ \beta_j < \alpha_j < 1,\ (j = 1, 2, \dots, n);\ L > 0,$$

$$(b')\qquad \alpha = \max_{1 \leq j \leq n} \alpha_j, \qquad \gamma = \min_{1 \leq j \leq n} \alpha_j,$$

$$(c')\qquad \delta = \min_{1 \leq j \leq n} \{ j(\alpha_j - \beta_j) \},$$

$$(d')\qquad \sum_{j=1}^{n} \frac{L_j}{j!} = k .$$

Si ha il seguente

Teorema. *Se $f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ è una funzione continua in E_0 ed ivi tale che $|f(t, x_0, \dots, x_{n-1})| \leqslant M$ e soddisfacente in E alle condizioni*

$$(11)\qquad |f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - f(t, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})| \leqslant$$
$$\leqslant L \left\{ \frac{|x_0 - \bar{x}_0|^{\alpha_n}}{t^{n\beta_n}} + \frac{|x_1 - \bar{x}_1|^{\alpha_{n-1}}}{t^{(n-1)\beta_{n-1}}} + \dots + \frac{|x_{n-1} - \bar{x}_{n-1}|^{\alpha_1}}{t^{\beta_1}} \right\}$$

$$(12)\qquad |f(t, x_0, x_1, \dots, x_{n-1}) - f(t, \bar{x}_0, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1})| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{L_n\,|x_0 - \bar{x}_0|}{t^n} + \frac{L_{n-1}\,|x_1 - \bar{x}_1|}{t^{n-1}} + \dots + \frac{L_1\,|x_{n-1} - \bar{x}_{n-1}|}{t}$$

con le costanti α_j, β_j, L_j, L *tali da soddisfare* (a′) *allora, quando* $k < 1 + \dfrac{\delta}{1-\gamma}$ *il problema* (*A*) *ammette una sola soluzione per* $0 \leqslant t \leqslant c$, *con* $c = \min\left(a, \dfrac{b}{4M}\right)$, *che si può ottenere mediante approssimazioni successive.*

Teniamo conto che è

$$(13)\qquad x(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t-s)^{n-1} x^{(n)}(s)\,ds,\quad \dot{x}(t) = \frac{1}{(n-2)!}\int_0^t (t-s)^{n-2} x^{(n)}(s)\,ds, \dots$$
$$\dots, x^{(n-1)}(t) = \int_0^t x^{(n)}(s)\,ds\,.$$

Sia poi $x_0^n(t)$ una funzione continua definita per $0 \leqslant t \leqslant a$ ed ivi tale che

$$|x_0^{(n)}(t)| \leqslant M$$

e sia

$$(14)\qquad x_{i+1}^{(n)}(t) = f(t, x_i, \dots, x_i^{(n-1)})$$

l'approssimazione $(i+1)$-esima della derivata n-esima.

Dalla (14) tenuto conto delle (13) si ha

$$x_{i+1}(t) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^t (t - x_i(s))^{n-1} f(s, x_i(s), \dots, x_i^{(n-1)}(s))\,ds$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{i+1}^{(n-1)}(t) = \int_0^t f(s, x_i(s), \dots, x_i^{n-1}(s))\,ds$$

e le funzioni $x_i(t)$, $x_i'(t)$, ..., $x_i^{(n-1)}(t)$, $(i = 0, 1, \dots)$ sono equicontinue ed equilimitate per la limitatezza di $f(t, x, \dots, x^{(n-1)})$ in $E_0\,[t \leqslant c]$ e per la limitatezza di $(t-s)^j$ $(j = 1, \dots, n-1)$ e per $0 \leqslant t \leqslant c$.

Dimostriamo che è anche

$$\lim_{i\to\infty} | x^{(n)}_{i+1} - x^{(n)}_i | = 0$$

uniformemente rispetto a t.

Si ha dalla (14)

$$(15) \qquad | x^{(n)}_{i+1} - x^{(n)}_i | \leqslant | f(t, x_i, \dots, x_i^{(n-1)}) - f(t, x_{i-1}, \dots, x_{i-1}^{(n-1)}) |$$

e per la (11)

$$| x'^{(n)}_{i+1} - x^{(n)}_i | \leqslant L \left\{ \frac{| x_i - x_{i-1} |^{\alpha_n}}{t^{n\beta_n}} + \frac{| x'_i - x'_{i-1} |^{\alpha_{n-1}}}{t^{(n-1)\beta_{n-1}}} + \dots + \frac{| x_i^{(n-1)} - x_{i-1}^{(n-1)} |^{\alpha_1}}{t^{\beta_1}} \right\}$$

e per le (13)

$$(16) \qquad | x^{(n)}_{i+1} - x^{(n)}_i | \leqslant L \left\{ \frac{| \int_0^t (t-s)^{n-1} (x_i^{(n)}(s) - x_{i-1}^{(n)}(s)) \, ds |^{\alpha_n}}{[(n-1)!]^{\alpha_n} t^{n\beta_n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{| \int_0^t (t-s)^{n-2} (x_i^n(s) - x_{i-1}^n(s)) \, ds |^{\alpha_{n-1}}}{[(n-2)!]^{\alpha_{n-1}} t^{(n-1)\beta_{n-1}}} + \dots + \frac{| \int_0^t (x_i^{(n)}(s) - x_{i-1}^{(n)}(s)) \, ds |^{\alpha_1}}{t^{\beta_1}} \right\}.$$

Essendo

$$| x_1^{(n)}(t) - x_0^{(n)}(t) | \leqslant | f(t, x_0, \dots, x_0^{n-1}) - x_0^{(n)}(t) | \leqslant 2M$$

dalla (16) segue

$$| x_2^{(n)} - x_1^{(n)} | \leqslant L \left\{ \frac{| \int_0^t (t-s)^{n-1} \alpha M \, ds |^{\alpha_n}}{[(n-1)!]^{\alpha_n} t^{n\beta_n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{| \int_0^t (t-s)^{n-2} 2M \, ds |^{\alpha_{n-1}}}{[(n-2)!]^{\alpha_{n-1}} t^{(n-1)\beta_{n-1}}} + \dots + \frac{| \int_0^t 2M \, ds |^{\alpha_1}}{t^{\beta_1}} \right\}$$

posto

$$N = \max(1,\ 2\ M) \tag{17}$$

si ha

$$| x_2^{(n)} - x_1^{(n)} | \leqslant L\, N^\alpha\, t^\delta\, n\,. \tag{16_1}$$

Da (16_1) e da (16) si ricava

$$| x_3^{(n)} - x_2^{(n)} | \leqslant L \left\{ \frac{\left| \int_0^t (t-s)^{n-1} L N^\alpha t^\delta n \, ds \right|^{\alpha_n}}{[(n-1)!]^{\alpha_n} t^{n\beta_n}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\left| \int_0^t (t-s)^{n-2} L N^\alpha t^\delta n \, ds \right|^{\alpha_{n-1}}}{[(n-2)!]^{\alpha_{n-1}} t^{(n-1)\beta_{n-1}}} + \ldots + \frac{\left| \int_0^t L N^\alpha t^\delta n \, ds \right|^{\alpha_1}}{t^{\beta_1}} \right\}$$

e posto

$$L^* = \max(1,\ L) \tag{18}$$

si ha

$$| x_3^{(n)} - x_2^{(n)} | \leqslant L^{*(1+\alpha)}\, n^{(1+\alpha)}\, N^{\alpha^2}\, t^{\delta\gamma+\delta} \tag{16_2}$$

ed in generale

$$| x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} | \leqslant (L^*)^{1+\alpha+\ldots+\alpha^{i-1}}\, n^{1+\alpha+\ldots+\alpha^{i-1}}\, N^{\alpha^i}\, t^{\delta(1+\gamma+\ldots+\gamma^{i-1})}$$

e fissato i_0 per tutti gli $i > i_0$ risulta

$$| x_{i+1}^{(n)} - x_i^{(n)} | \leqslant (L^*)^{1/(1+\alpha)}\, n^{1/(1+\alpha)}\, N\, t^{\delta\eta} \tag{19}$$

ove si è posto $\eta = 1 + \gamma + \ldots + \gamma^{i_0-1}$.

Dalla (12) e tenuto conto di (15) si ha

$$(20)\qquad |x^{(n)}_{i+m+1}-x^{(n)}_{i+m}| \leqslant \frac{L_n\,|x_{i+m}-x_{i+m-1}|}{t^n}+$$

$$+\frac{L_{n-1}|x'_{i+m}-x'_{i+m-1}|}{t^{n-1}}+\ldots+\frac{L_1\,|x^{n-1}_{i+1}-x^{(n-1)}_{i+m-1}|}{t}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{L_n\,\left|\int\limits_0^t(t-s)^{n-1}(x^{(n)}_{i+m}(s)-x^{(n)}_{i+m-1}(s))\,ds\right|}{(n-1)!\,t^n}+\ldots+\frac{L_1\left|\int\limits_0^t(x^{(n)}_{i+m}(s)-x^{(n)}_{i+m-1}(s))\,ds\right|}{t}.$$

Perciò per $m=1$ si ha, tenuto conto di (19):

$$|x^{(n)}_{i+2}-x^{(n)}_{i+1}|\leqslant\frac{L_n\left|\int\limits_0^t(t-s)^{n-1}(L^*)^{1/(1-\alpha)}Nn^{1/(1-\alpha)}s^{\delta\eta}\,ds\right|}{(n-1)!\,L_n}+\ldots+\frac{L_1\left|\int\limits_0^t(L^*n)^{1/(1-\alpha)}Ns^{\delta\eta}\,ds\right|}{t}\leqslant$$

$$\leqslant(L^*n)^{1/(1-\alpha)}N\left\{\frac{L_n}{t^n(n-1)!}\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n-1}{k}\frac{t^{n-1-k}}{L+k+\delta\eta}\cdot t^{k+\delta\eta+1}\right|+\right.$$

$$\left.+\ldots+\frac{L_1}{t}\left|\frac{t^{\delta\eta+1}}{1+\delta\eta}\right|\right\}\leqslant(L^*n)^{1/(1-\alpha)}N\,\frac{k}{1+\delta\eta}\,t^{\delta\eta}\quad(^4).$$

([4]) Se l è un reale positivo ed n intero è

$$(1)\qquad\frac{1}{1+l}-\binom{n}{1}\frac{1}{2+l}+\binom{n}{2}\frac{1}{3+l}-\ldots(-1)^n\binom{n}{n}\frac{1}{n+1+l}\leqslant\frac{1}{(n+1)(1+l)}.$$

Mostriamo prima che è

$$(2)\qquad(l+2)\ldots(l+n+1)-\binom{n}{1}(l+1)(l+3)\ldots(l+n+1)\ldots(-1)^k\binom{n}{k}(l+1)(l+2)\ldots$$

$$\ldots(l+k)(l+k+2)\ldots(l+n+1)+(-1)^n(l+1)\ldots(l+n)=n!$$

Infatti la (2) è vera per $n=1$. Supposta la (2) vera per qualunque intero n dimostriamo che è vera anche per $n+1$. Infatti è

$$(l+2)\ldots(l+n+1)(l+n+2)-(n+1)(l+1)(l+3)\ldots(l+n+1)(l+n+2)+$$

$$+\ldots+(-1)^{n+1}(l+1)\ldots(l+n)(l+n+1)=\Big\{(l+2)\ldots(l+n+1)-$$

$$-\binom{n}{1}(l+1)(l+3)\ldots(l+n+1)+\ldots+(1)^n\binom{n}{n}(l+1)\ldots(l+n)\Big\}(l+n+2)-$$

Per $m = 2$ si ha

$$| x^{(n)}_{i+3} - x^{(n)}_{i+2} | \leqslant (L^* n)^{1/(1-\alpha)} N \left(\frac{k}{1+\delta\eta}\right)^2 t^{\delta\eta}$$

ed in generale per m qualunque

$$(21) \qquad | x^{(n)}_{i+m+1} - x^{(n)}_{i+m} | \leqslant (L^* n)^{1/(1-\alpha)} N \left(\frac{k}{1+\delta\eta}\right)^m t^{\delta\eta} ,$$

essendo $\eta = 1 + \gamma + \gamma^2 + ... + \gamma^{i_0 - 1}$ e $k < 1 + \dfrac{\delta}{1-\gamma}$ possiamo scegliere i_0 in (19) in modo tale che risulti $k < 1 + \delta\eta < 1 + \dfrac{\delta}{1-\gamma}$ onde $\dfrac{k}{1+\delta\eta} < 1$, e da (21) segue la convergenza delle approssimazioni successive.

Dimostriamo infine l'unicità della soluzione del problema (A). Supponiamo che il problema ammetta due soluzioni e siano esse $x(t)$ ed $y(t)$, prendiamo allora una prima volta come prima approssimazione $x^{(n)}(t)$ stessa ed avremo $x^{(n)}(t) = x^{(n)}_0(t) = ... f(t, x_0, ... x^{(n-1)})$ e prendiamo una seconda volta $y^{(n)}(t)$ come prima approssimazione ed avremo $y^{(n)}(t) = y^n_0(t) = y^{(n)}_1(t) = ... = ... = f(t, y_0, y', ... y^{(n-1)})$. Allora con ragionamenti analoghi a quelli fatti per ottenere la (21) si avrà

$$(22) \qquad | x^{(n)} - y^{(n)} | = | x^{(n)}_{i+N} - y^{(n)}_{i+N} | \leqslant (L^* n)^{1/(1-\alpha)} N \left(\frac{k}{1+\delta\eta}\right)^m t^{\delta\eta}$$

e ciò è assurdo essendo $x^{(n)} \neq y^{(n)}$.

$$-\Big\{ (l+3) ... (l+n+1)(l+n+2) + ... + (-1)^{n-1} \binom{n}{n-1} (l+2) ...$$

$$... (l+n)(l+n+2) + (-1)^n (l+2) ... (l+n+1) \Big\} (l+1) .$$

La prima $\{\ \}$ vale $n!$ per la (2). Si ha allora tenendo conto ancora di (2)

$$(l+2) ... (l+n+2) + ... + (-1)^{n+1} (l+1) ...$$
$$... (l+n+1) = n!\,(l+n+2) - n!\,(l+1) = (n+1)! .$$

Dal principio di induzione completa segue la dimostrazione.

Tenuto poi conto di (2) si ha

$$\frac{1}{1+l} - \binom{n}{1}\frac{1}{2+l} + \binom{n}{2}\frac{1}{3+l} - ... + (-1)^n \frac{1}{n+1+l} =$$
$$= \frac{n!}{(1+l) ... (n+1+l)} \leqslant \frac{n!}{(1+l)\cdot 2\cdot 3 ... (n+1)}$$

e quindi (1).

Bibliografia.

[1] BARBUTI U., *Su un caso di convergenza delle approssimazioni successive*, Atti, Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat., (8) **11** (1951), 150-157.

[2] KOOI O., *The method of successive approximations and a uniqueness theorem of Krasnosel'skii and Krein in the theory of differential equations*, Nederl. Akad. Witensch. Indag. Math. **20**, (1958), 322-327.

[3] KRASNOSEL'SKII M. A., KREIN S. G., *Su una classe di teoremi di unicità per l'equazione* $y = f(t, y)$ (in russo), Uspehi Mat. Nauk. **11**, (67), (1956), 209-213.

[4] LA SALLE J. A., *Uniqueness theorems and successive approximations*, Ann. of Math. **50** (1949), 722-729.

[5] LUXEMBURG W. A. J., *On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations*, Can. Math. Bull. **1**, (1958), 9-20.

[6] LUXEMBURG W. A. J., *On the convergence of successive approximations in the theory of ordinary differential equations*. II, Nederl. Akad. Wetensch. Indag. Math. **20**, (1958), 540-546.

[7] MERLI L., *Sul teorema di unicità per il problema di Cauchy relativo all'equazione differenziale* $x^{(n)} = f(t, x, x^{(1)}, \dots x^{(n-1)})$. Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. (8), **22** (1957), 508-586.

[8] MERLI, L., *Un teorema di unicità locale per le equazioni differenziali ordinarie del primo ordine* $x' = f(t, x)$. Riv. Univ. Parma (2), **2**, (1961), 61-66.

[9] NAGUMO M., *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung*, Jap. J. Math. **3**, (1926), 107-112.

[10] PERRON O., *Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösungen von Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Z., **28**, (1928), 216-219.

[11] ROSENBLATT A., *Ueber die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen*, Arch. för Math. Astr. och. Fys., **5**, (1909), n. 2, 4.

[12] SANSONE G., *Equazioni differenziali nel campo reale*, Vol. II. Zanichelli, Bologna 1948, p. 102.

[13] WINTNER A., *On the local uniqueness of the initial value problem of the differential equation* $d^n x/dt^n = f(t, x)$. Boll. Un. Mat. Ital. (3), **13**, (1956), 486-498.