Riv. Mat. Univ. Parma (2) **2** (1961), 237-264

FULVIA SKOF (*)

Proprietà delle serie di potenze prolungabili e criteri sufficienti di non prolungabilità. (**)

Introduzione. - In questo studio viene precisato ed esteso un criterio di non-prolungabilità delle serie di potenze fuori del cerchio di convergenza, dovuto a L. ILIEV [3]. I criteri di non-prolungabilità del tipo qui considerato si basano su ipotesi riguardanti « tratti ridotti » (cioè di ampiezza relativa infinitesima) della successione dei coefficienti (1). Anche noi prenderemo come strumento

---

(*) Indirizzo: Istituto Matematico Università Milano (Italia).

(**) Ricevuto il 14 settembre 1961.

Studio eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 14 (1960-61) del C.N.R.

(1) Criteri che considerano il « tratto ridotto » si trovano, per esempio, in F. LÖSCH [5], H. CLAUS [1], G. RICCI [7], [8], M. CUGIANI [2], M. E. NOBLE [6].

Il criterio di non-prolungabilità di ILIEV, sopra ricordato, è il seguente:

« Teorema. Sia $\varphi(x)$ definita per $x \geqq 0$, a) $0 \leqq \varphi(x) \leqq x$, $\varphi(x)$ crescente, $\dfrac{\varphi(x)}{x} \to 0$ per $x \to +\infty$; b) $\varphi'(x)$ decrescente, $\varphi'(x) \to 0+$ per $x \to +\infty$, e per ogni $\varepsilon > 0$ esista $x_0(\varepsilon)$ tale che per $x \geqq x_0(\varepsilon)$ risulti $\varepsilon[\varphi(x) - x\varphi'(x)] + \log \varphi'(x) \geqq 0$; c) esistano $\alpha > 0$, $\lambda_0 > 0$, $0 < q < 1$ tali che per ogni λ con $0 < \lambda < \lambda_0$ le uniche radici positive x_1 e x_2 rispettivamente delle due equazioni $\varphi'(x) - \lambda = 0$, $\varphi(x) - \lambda q x = 0$ verifichino la disuguaglianza $x_2 < x_1^{\alpha}$; d) $\varphi(x)/\log x \to +\infty$ per $x \to \infty$.

Sia $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ con

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/n} = 1, \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}} |a_n|^{1/\varphi(n)} = 1 .$$

Se esistono due successioni di indici $\{m_\nu\}$, $\{n_\nu\}$, $m_\nu < n_\nu$ $(\nu = 1, 2, \ldots)$ tali che

$$\lim_{\nu\to+\infty} |a_{n_\nu}|^{1/\varphi(n_\nu)} = 1; \quad a_{m_\nu - k} = a_{n_\nu - k}, \quad k = 1, 2, \ldots, [\varphi(n_\nu)],$$

c_{m_ν}/c_{n_ν} non tende a 1 per $\nu \to +\infty$, allora la serie $f(z)$ non è prolungabile ».

essenziale un importante lemma, dovuto a G. SZEGÖ [9], riguardante le serie di potenze prolungabili.

Abbiamo introdotta la nozione di «successione maggiorante monotona minima» di una successione assegnata, che ci consente di rendere espressive, semplici e più generali le ipotesi sulla successione $\{a_n\}$ dei coefficienti di $f(z)$, che assicurano la non-prolungabilità (vedi Teoremi III, IV, V al n. 5).

Vengono anche stabilite proprietà delle serie prolungabili (vedi Teoremi I, II al n. 4), alle quali si perviene applicando un Lemma (n. 6) riguardante tali serie, e che riteniamo interessante anche in se stesso.

Per le funzioni $f(z)$ di ordine finito le ipotesi dei nostri criteri assumono forme più semplici che vengono segnalate (n. 7).

1. - La maggiorante monotona minima di una successione.

Vogliamo associare a ogni successione $\{\alpha_n\}$ di numeri reali α_n una successione $\psi(n)$ che sia definitivamente maggiorante di questa e che sia inoltre monotona e, almeno definitivamente, la minima possibile.

Def. Si dice successione *maggiorante monotona minima di* $\{\alpha_n\}$ ogni successione $\psi(n)$ che verifica le seguenti proprietà:

a) $\psi(n) \geqslant \alpha_n$ definitivamente (cioè per $n \geqslant n_0$);

b) $\psi(n)$ è definitivamente monotona (cioè per $n \geqslant n_1$ conveniente);

c) Per ogni successione $\Psi(n)$ che verifica a) e b) esiste n_2 tale che $\psi(n) \leqslant \Psi(n)$ per $n \geqslant n_2$.

La costruzione della successione maggiorante monotona minima di α_n si ottiene nel modo seguente:

1°) Quando $\alpha_n \to -\infty$, oppure $\overline{\lim}\, \alpha_n = A$ (finito) mentre non è definitivamente (cioè per $n \geqslant n_0$ conveniente) $\alpha_n < A$ si pone

$$\psi(n) = \mathrm{Sup}\,(\alpha_n,\ \alpha_{n+1},\ \alpha_{n+2},\ \ldots)\,.$$

2°) Quando $\overline{\lim}\, \alpha_n = +\infty$, scelto un qualunque intero ν (indipendente da n) si pone:

$$\psi(n) = \mathrm{Sup}\,(\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu+1},\ \ldots,\ \alpha_n)\,, \qquad (\text{per } n \geqslant \nu).$$

3°) Quando $\overline{\lim}\, \alpha_n = A$ ed è definitivamente (cioè per $n \geqslant n_0$) $\alpha_n < A$, scelto $\nu \geqslant n_0$ (ν indipendente da n) si pone:

$$\psi(n) = \mathrm{Sup}\,(\alpha_\nu,\ \alpha_{\nu+1},\ \ldots,\ \alpha_n)\,, \qquad (\text{per } n \geqslant \nu).$$

In base alla precedente costruzione di $\psi(n)$ si vede che

Esistono infiniti valori m di n tali che $\psi(m) = \alpha_m$. Infatti: 1°) se $\alpha_n \to -\infty$, ad ogni n si può coordinare il minimo intero $m = m(n) \geqq n$ tale che sia $\psi(n) = \operatorname{Sup}(\alpha_n, \alpha_{n+1}, \dots) = \operatorname{Sup}(\alpha_n, \dots, \alpha_m)$, e allora è $\psi(n) = \operatorname{Max}(\alpha_n, \dots, \alpha_m) = \alpha_m = \psi(m)$; basta scegliere il successivo n maggiore di m, e si continua. Analogamente si ragiona se è $\overline{\lim}\, \alpha_n = A$, ma non è definitivamente $\alpha_n < A$.

2°) Se è $\overline{\lim}\, \alpha_n = +\infty$, sia m il minimo intero $\nu < m = m(n) \leqq n$ per cui vale

$$\psi(n) = \operatorname{Sup}(\alpha_\nu, \dots, \alpha_n) = \operatorname{Max}(\alpha_\nu, \dots, \alpha_n) = \alpha_m = \operatorname{Max}(\alpha_\nu, \dots, \alpha_m) = \psi(m).$$

Basta scegliere il successivo n tale che $\alpha_n > \alpha_m$, e si continua.

3°) Sia $\overline{\lim}\, \alpha_n = A$, con $\alpha_n < A$ definitivamente. Si ragiona come in 2°).

Osservazioni. 1) Mediante la costruzione indicata, nel caso 1°) $\psi(n)$ è univocamente determinata; in ciascuno dei due casi 2°) e 3°) due diverse successioni $\psi_1(n)$ corrispondente a ν_1 e $\psi_2(n)$ corrispondente a ν_2 coincidono almeno per $n \geqq n_1(\nu_1, \nu_2)$; infatti, basta assumere un n_1 tale che $\alpha_{n_1} > \alpha_{\nu_1}$, $\alpha_{n_1} > \alpha_{\nu_2}$ (questo è possibile anche nel caso 3°) poichè $\alpha_{\nu_1} < A$, $\alpha_{\nu_2} < A$).

2) Se $\alpha_n \leqq \beta_n$ per $n \geqq n_0$, allora $\psi_\alpha(n) \leqq \psi_\beta(n)$ per $n \geqq n_1$.

Def. Sia $\psi(n)$ la maggiorante monotona minima di α_n. Si dice *successione di contatto di $\psi(n)$ su α_n* la successione crescente $n_1, n_2, \dots, n_h, \dots$ costituita da tutti gli interi u per i quali è $\psi(u) = \alpha_u$. Osserviamo che è

$$\alpha_{n_h} = \psi(m) \quad \text{per} \quad n_h \leqslant m < n_{h+1} \quad \text{se} \quad \psi(n) \text{ è non decrescente,}$$

$$\alpha_{n_h} = \psi(m) \quad \text{per} \quad n_{h-1} < m \leqslant n_h \quad \text{se} \quad \psi(n) \text{ è non crescente.}$$

Si vede facilmente che la successione $\psi(n)$ costruita nel modo indicato precedentemente, verifica le condizioni a), b), c) della definizione. a) e b) sono evidenti. Dimostriamo c): sia $\Psi(n)$ una successione che verifica a) e b); allora risulta $\psi(n) \leqslant \Psi(n)$ per $n \geqslant n_2$ conveniente. Se fosse, per assurdo, $\Psi(n') < \psi(n')$ per infiniti n', scelti $n_h \leqslant n' < n_{h+1}$ (se $\psi(n)$ è non decrescente), $n_{h-1} < n' \leqslant n_h$ (se $\psi(n)$ è non crescente) si avrebbe

$$\Psi(n_h) \leqslant \Psi(n') < \psi(n') = \psi(n_h) = \alpha_{n_h} \leqslant \Psi(n_h),$$

assurdo.

Le maggioranti monotone minime $\psi(n)$ di α_n godono della seguente proprietà, che riteniamo opportuno segnalare sebbene non se ne faccia uso nel seguito della trattazione.

Teorema. *Da* $\overline{\lim}\,\dfrac{\alpha_n}{n} = 0$, $\overline{\lim}\,\alpha_n > -\infty$ *segue* $\dfrac{\psi(n)}{n} \to 0$. *Da* $\overline{\lim}\,\dfrac{\alpha_n}{n} = 0$, $\alpha_n \to -\infty$ *segue* $\overline{\lim}\,\dfrac{\psi(n)}{n} = 0$.

Osservazione. Nel caso $\alpha_n \to -\infty$ non si può dedurre $\psi(n)/n \to 0$, come viene mostrato dall'esempio seguente.

Sia $\alpha_n = -(m+1)!/\sqrt{m+1}$ per $m! < n \leqq (m+1)!$, $(m = 1, 2, 3, \dots)$. Allora $\{\alpha_n\}$ è monotona non crescente, $\alpha_n \to -\infty$, $\psi(n) = \alpha_n$. Assumiamo $n = m! + 1$; allora

$$\frac{\psi(m!+1)}{m!+1} = -\frac{(m+1)!}{\sqrt{m+1}\cdot(m!+1)} = -\frac{m!}{m!+1}\cdot\sqrt{m+1} \to -\infty .$$

Assumiamo $n = m!$

$$\frac{\psi(m!)}{m!} = -\frac{m!}{\sqrt{m}\cdot m!} = -\frac{1}{\sqrt{m}} \to 0-$$

e pertanto in questo caso è

$$-\infty = \underline{\lim}\,\frac{\psi(n)}{n} < \overline{\lim}\,\frac{\psi(n)}{n} = 0-.$$

Dimostrazione:

1. Se $\overline{\lim}\,\alpha_n = A-$ oppure $= A+$ l'affermazione è evidente, poichè $\psi(n) \to A$ e $\psi(n)/n \to 0$.

2. Sia $\overline{\lim}\,\alpha_n = +\infty$. Allora $\psi(m) = \psi(n_h)$ per $n_h \leqq m < n_{h+1}$ e risulta definitivamente $\psi(n_h) > 0$ e quindi definitivamente

$$0 < \frac{\psi(m)}{m} = \frac{\psi(n_h)}{m} = \frac{\alpha_{n_h}}{n_h}\cdot\frac{n_h}{n} < \frac{\alpha_{n_h}}{n_h},$$

e poichè $\alpha_{n_h} > 0$, dall'ipotesi $\overline{\lim}\,\alpha_n/n = 0$ segue $\alpha_{n_h}/n_h \to 0+$. Ne segue $\psi(n)/n \to 0+$, tenendo conto che ogni n è un m.

3. Sia $\alpha_n \to -\infty$. Allora $\psi(n) \to -\infty$ e $\psi(m) = \psi(n_h)$ per $n_{h-1} < m \leqq n_h$, $\psi(n) < 0$ per $n \geqq \bar{n}$ e

$$0 > \frac{\psi(n)}{n} = \frac{\psi(n_h)}{n} = \frac{\alpha_{n_h}}{n} \geqq \frac{\alpha_n}{n},$$

e dall'ipotesi $\overline{\lim}\,\alpha_n/n = 0$ segue $0 \geqq \overline{\lim}\,\psi(n)/n \geqq 0$ e quindi $\overline{\lim}\,\psi(n)/n = 0$.

2. - La classe $\mathfrak{F}(\varphi(n))$ di funzioni $f(z)$.

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Def. Si dice che $f(z)$ *appartiene alla classe* $\mathfrak{F}(\varphi(n))$ quando

$$\overline{\lim} \, | a_n |^{1/\varphi(n)} \leqslant 1 .$$

Osservazioni. 1) Ogni $f(z)$ avente raggio di convergenza $\geqslant 1$ appartiene a $\mathfrak{F}(n)$.

2) Se è definitivamente $\varphi_1(n) \leqslant \varphi_2(n)$, allora è $\mathfrak{F}(\varphi_1(n)) \subseteq \mathfrak{F}(\varphi_2(n))$.

3) Se $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi(n))$ e $\varphi(n) \to +\infty$, esistono infinite successioni $\varphi_1(n)$ con $\varphi_1(n)/\varphi(n) \to 0$ tali che sia ancora $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi_1(n))$.

Infatti, posto $| a_n | = \exp(n\gamma_n)$ risulta $\overline{\lim}\, n\gamma_n/\varphi(n) \leqslant 0$; poniamo $\beta_n = \operatorname{Sup}_{u \geqq n} \{ u\gamma_u/\varphi(u) \}$.

Se $\beta_n \to \lambda < 0$ oppure $\beta_n \to 0$ — per ogni $\varphi_1(n) = o(\varphi(n))$ risulta $\overline{\lim}\, n\gamma_n/\varphi_1(n) \leqslant 0$ e $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi_1(n))$.

Se $\beta_n \to 0+$, fissato α, con $0 < \alpha < 1$, si assuma $\varphi_1(n) = \beta_n^{1-\alpha}\varphi(n)$, che è $o(\varphi(n))$; allora

$$n\gamma_n/\varphi_1(n) = (n\gamma_n/\varphi(n)) \cdot \varphi(n)/\varphi_1(n) \leqslant \beta_n \cdot \beta_n^{\alpha-1} = \beta_n^{\alpha} \to 0+$$

e quindi ancora $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi_1(n))$.

4) È evidente che per ogni $\beta > 0$ indipendente da n, $\mathfrak{F}(\varphi(n))$ e $\mathfrak{F}(\beta \cdot \varphi(n))$ coincidono.

3. - La classe $\mathfrak{G}(\varphi(n))$ di funzioni $f(z)$.

Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Consideriamo i due vettori (sul campo complesso) $(\tau + 1)$-dimensionali, di cui il secondo normalizzato con l'ultima componente 1,

$$\boldsymbol{a}_{n-\tau,n} \equiv (a_{n-\tau},\ a_{n-\tau+1},\ \dots,\ a_n)$$

$$\boldsymbol{u}^{(\tau)} \equiv (u_\tau^{(\tau)},\ u_{\tau-1}^{(\tau)},\ \dots,\ u_1^{(\tau)},\ 1)$$

e consideriamo il loro prodotto interno ($\bar{u}_h$ coniugato di u_h):

$$(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n},\ \boldsymbol{u}^{(\tau)}) = a_{n-\tau}\,\bar{u}_\tau^{(\tau)} + \dots + a_{n-1}\,\bar{u}_1^{(\tau)} + a_n\,.$$

Sia $\varphi(n)$ una successione di interi positivi.

Def. Diremo che $f(z)$ *appartiene alla classe* $\mathcal{G}(\varphi(n))$ quando esistono

i) due numeri A, Θ con $A > 0$, $0 < \Theta < 1$,

ii) un vettore $\boldsymbol{u}^{(\tau)}$, $(\tau = \varphi(m))$

tali che si verifichino le $m - \tau + 1$ disuguaglianze

$$\left\{\begin{array}{l} |\ (\boldsymbol{a}_{n-\tau,n},\ \boldsymbol{u}^{(\tau)})\ | < A \cdot \Theta^\tau \\ \tau = \varphi(m);\ n = \tau,\ \tau + 1, \dots,\ m\,, \end{array}\right. \tag{3.1}$$

dove A e Θ sono indipendenti da m e n, mentre $\boldsymbol{u}^{(\tau)}$ dipende da m.

Osservazioni. 1) Sia $f(z) \in \mathcal{G}(\varphi(n))$. Volendo porre in evidenza le costanti Θ possibili per $f(z)$, potremo scrivere

$$f(z) \in \mathcal{G}(\varphi(n);\ \Theta^*)$$

dove Θ^*, $0 < \Theta^* < 1$, è l'estremo inferiore dei numeri Θ ai quali è possibile associare A e $\boldsymbol{u}^{(\tau)}$ in modo che valga (3.1).

2) Se $\varphi(n) \leqslant \varphi_1(n) \leqslant \beta \cdot \varphi(n)$ con $\beta \geqslant 1$, allora da $f(z) \in \mathcal{G}(\varphi(n))$ segue $f(z) \in \mathcal{G}(\varphi_1(n))$; più precisamente da $f(z) \in \mathcal{G}(\varphi(n);\ \Theta^*)$ segue $f(z) \in \mathcal{G}(\varphi_1(n);\ \Theta_1^*)$ con $\Theta_1^* \leqslant \Theta^{*1/\beta}$.

4. - Alcune proprietà delle serie prolungabili.

Denotiamo con $(\mathfrak{A})$ il complesso delle seguenti condizioni per la successione $\varphi(n)$, al quale qui e nel seguito faremo ricorso:

$$0 < \varphi(n) \leqslant n, \quad \frac{\varphi(n)}{n} \ \text{monotona non crescente}, \quad \frac{\varphi(n)}{\log n} \to +\infty\,. \tag{$\mathfrak{A}$}$$

Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$, $\psi(n)$ la maggiorante monotona minima di $\log |a_n|$ ($\log |a_n| = -\infty$ per $a_n = 0$), e consideriamo, accanto al sistema $(\mathfrak{A})$, anche la seguente condizione che impegna $\varphi(n)$ e $f(z)$ simultaneamente

$$\overline{\lim}\ \frac{\psi(n)}{\varphi(n)} \leqslant 0. \tag{$\mathfrak{B}$}$$

Conviene porre i sistemi $(\mathfrak{A})$ e $(\mathfrak{B})$ in relazione con la famiglia $\mathfrak{F}(\varphi(n))$; vale il seguente

Lemma. 1) *Se $\varphi(n)$ e $f(z)$ verificano* $(\mathfrak{A})$ e $(\mathfrak{B})$, *allora* $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi(n))$.

2) *Se $\varphi(n)$ verifica $(\mathfrak{A})$ ed è $\varphi(n)$ monotona non decrescente, ogni $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi(n))$ verifica, insieme con $\varphi(n)$, la condizione $(\mathfrak{B})$.*

Dimostrazione. 1) Osserviamo che è $\varphi(n) > 0$ e, per definizione, $\log |a_n| \leqslant \psi(n)$ e quindi

$$\log |a_n| / \varphi(n) \leqslant \psi(n) / \varphi(n),$$

e dalla $(\mathfrak{B})$ segue $\overline{\lim} |a_n|^{1/\varphi(n)} \leqslant 1$ e $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi(n))$.

2) Se $\psi(n)$ è limitata superiormente, è evidente, poichè $\varphi(n) \to +\infty$, che vale $(\mathfrak{B})$.

Se $\psi(n)$ non è limitata superiormente, allora è $\psi(n) \to +\infty$, e detta $\{n_h\}$ la successione di contatto di $\log |a_n|$ con la maggiorante $\psi(n)$ e posto $n_h \leqslant \leqslant n < n_{h+1}$, col tenere conto che $\varphi(n)$ è monotona, abbiamo

$$\frac{\psi(n)}{\varphi(n)} = \frac{\psi(n_h)}{\varphi(n)} \leqslant \frac{\psi(n_h)}{\varphi(n_h)} = \frac{\log |a_{n_h}|}{\varphi(n_h)},$$

e poichè per ipotesi è $\overline{\lim} \log |a_n| / \varphi(n) \leqslant 0$, ne segue $(\mathfrak{B})$.

Sussiste il seguente

Teorema I. *La successione $\varphi(n)$ verifichi le condizioni $(\mathfrak{A})$ e sia monotona non decrescente.*

La serie $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1 e sia prolungabile.

Allora da $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi(n))$ segue $f(z) \in \mathfrak{G}(\varphi(n))$.

Veniamo a considerare il caso in cui $\varphi(n)$ non è necessariamente monotona; allora sussiste il seguente

Teorema II. *La successione $\varphi(n)$ verifichi le condizioni $(\mathfrak{A})$. La serie $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1 e sia prolungabile.*

Se $f(z)$ verifica $(\mathfrak{B})$ allora $f(z) \in \mathfrak{G}(\varphi(n))$.

Si può precisare: $f(z) \in \mathfrak{G}(\varphi(n); \Theta^*)$, *dove Θ^* dipende soltanto dalla geometria della stella di regolarità per prolungamento radiale di $f(z)$.*

Come conseguenza dei Teoremi I e II, quando si tengano presenti le osservazioni 2) e 3) contenute nel n. **2**, si ottengono i seguenti teoremi:

T e o r e m a I*. *La successione* $\varphi(n)$ *verifichi le condizioni* $(\mathfrak{A})$ *e sia monotona non decrescente.*

La serie $f(z)$ *abbia raggio di convergenza* 1 *e sia prolungabile. Allora, se* $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi(n))$:

1°) *per ogni* $\varphi_1(n) \geqslant \varphi(n)$ *è* $f(z) \in \mathfrak{G}(\varphi_1(n))$;

2°) *esistono infinite successioni* $\varphi_2(n)$ *tali che*

$$\varphi_2(n)/\varphi(n) \to 0, \qquad f(z) \in \mathfrak{G}(\varphi_2(n)).$$

T e o r e m a II*. *La successione* $\varphi(n)$ *verifichi le condizioni* $(\mathfrak{A})$. *La serie* $f(z)$ *abbia raggio di convergenza* 1 *e sia prolungabile. Allora, se* $f(z)$ *verifica* $(\mathfrak{B})$ *valgono* 1°) *e* 2°) *come nel Teorema* I*.

A t t e n u a z i o n e d e l l e i p o t e s i.

Sia $\xi(n)$ la successione maggiorante monotona minima di $\psi(n)/n$. Risulta $\xi(n) \geqq \psi(n)/n$ e $\xi(n) \to 0$.

Sia $\chi(n)$ la successione maggiorante concava minima di $\log|a_n|$ (²).

Allora i *Teoremi* II *e* II* *rimangono validi se alle condizioni* $(\mathfrak{A})$ *e* $(\mathfrak{B})$ *si sostituiscono le condizioni meno restrittive*

$$\begin{cases} (\mathfrak{A}') & 0 < \varphi(n) \leqq n, \quad \varphi(n)/\log n \to +\infty \\ (\mathfrak{B}') & \overline{\lim}\, n\xi(n)/\varphi(n) \leqq 0 \end{cases}$$

oppure $(\mathfrak{A}')$ *e* $(\mathfrak{B}'')$ $\overline{\lim}\,\chi(n)/\varphi(n) \leqq 0$.

D i m o s t r a z i o n e. 1) Cominciamo col dimostrare l'equivalenza $(\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}) \Longleftrightarrow (\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}')$. Da $n\xi(n) \geqq \psi(n)$ risulta $(\mathfrak{B}') \Longrightarrow (\mathfrak{B})$ e pertanto basta dimostrare $(\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}) \Longrightarrow (\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}')$.

1.1) Se $\psi(n)$ è limitata superiormente risulta tale anche $n\xi(n)$ e in questo caso $(\mathfrak{B}) \Longrightarrow (\mathfrak{B}')$.

1.2) Sia $\psi(n) \to +\infty$, e quindi $n\xi(n) \to +\infty$. Se $\{u_k\}$ è la successione di contatto di $n\xi(n)$ su $\psi(n)$ $(u_k\,\xi(u_k) = \psi(u_k))$, per $n \in \{u_k\}$ risulta $n\xi(n) = \psi(n) = o(\varphi(n))$ mentre per i tratti $u_k < n < u_{k+1}$ lungo i quali è

$$\psi(n) < n\xi(n) \leqq (n+1)\cdot\psi(u_{k+1})/u_{k+1}, \quad \varphi(n) \geqq n\cdot\varphi(u_{k+1})/u_{k+1}$$

(²) La successione maggiorante concava minima di $\log(|a_n| + 2)$, che nei casi più interessanti è sostanzialmente equivalente alla precedente, è stata considerata da M. E. Noble [**6**].

risulta

$$\frac{n\,\xi(n)}{\varphi(n)} \leqq \frac{n+1}{n} \cdot \frac{\psi(u_{k+1})}{\varphi(u_{k+1})} \to 0$$

e quindi $(\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}) \Longrightarrow (\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}')$.

La dimostrazione del teorema II (vedi n. **10**) può essere svolta, eseguendo evidenti modificazioni nel caso finale B_2, in guisa da assicurare che ad $(\mathfrak{A}) + (\mathfrak{B}')$ può essere sostituito $(\mathfrak{A}') + (\mathfrak{B}')$.

2) Poichè $(\mathfrak{B}'') \Longrightarrow (\mathfrak{B}')$, basta dimostrare $(\mathfrak{A}') + (\mathfrak{B}') \Longrightarrow (\mathfrak{A}') + (\mathfrak{B}'')$.

2.1) Se $n\xi(n)$ è limitata superiormente, lo stesso accade per $\chi(n)$ e in questo caso $(\mathfrak{B}') \Longrightarrow (\mathfrak{B}'')$.

2.2) Sia $n\xi(n) \to +\infty$ e quindi anche $\chi(n) \to +\infty$. Basterà dimostrare che in questo caso $\chi(n) = O(n\xi(n))$; risulterà anzi che $\chi(n)/(n\xi(n))$, $n\xi(n)/\chi(n)$ sono ambedue limitati.

Sia $\{u_k\}$ la successione di contatto di $\chi(n)$ su $n\xi(n)$; nell'intervallo $u_k \leqq n \leqq u_{k+1}$ consideriamo la successione costante $\psi_1(n) = \psi(u_k)$ e la successione $n\xi_1(n)$ attinente a $\psi_1(n)$; poichè si ha

$$\psi_1(n) \leqq \psi(n), \quad \xi_1(n) \leqq \xi(n), \quad \chi_1(n) = \chi(n),$$

risulta $1 \leqq \chi(n)/(n\xi(n)) \leqq \chi_1(n)/(n\xi_1(n))$ e basterà dimostrare che $\chi_1(n) = O(n\xi_1(n))$.

La successione $n\xi_1(n)$ risulta essere la seguente

$$n\xi_1(n) = \psi(u_k) \qquad \text{per} \quad u_k \leqq n \leqq n_k$$

$$n\xi_1(n) = n \cdot \psi(u_{k+1})/u_{k+1} \qquad \text{per} \quad n_k < n \leqq u_{k+1}$$

(cioè un tratto di invariabilità e un tratto di inclinazione costante), dove n_k è definito nel modo seguente:

$$n_k = \text{parte intera di } u_{k+1}\,\psi(u_k)/\psi(u_{k+1}).$$

Il rapporto $\chi_1(n)/(n\xi_1(n))$ nel tratto $u_k \leqq n < u_{k+1}$, risulta massimo per $n = n_k$, cioè

$$\chi_1(n)/(n\xi_1(n)) \leqq \chi_1(n_k)/(n_k\,\xi_1(n_k)) = \chi_1(n_k)/\psi(u_k)$$

e si tratta di maggiorare questo ultimo rapporto. Osserviamo che (tenuto conto che n_k è una parte intera)

$$\chi_1(n_k) < \psi(u_k) + (n_k + 1 - u_k)\,(\psi(u_{k+1}) - \psi(u_k))/(u_{k+1} - u_k)$$

$$\psi(u_{k+1}) - \psi(u_k) = \psi(u_{k+1}) \cdot (u_{k+1} - n_k + 1)/u_{k+1}$$

e quindi con semplice calcolo si ottiene

$$1 \leqq \chi_1(n_k)/\psi(u_k) \leqq 3.$$

3) Si riconosce che per dimostrare le equivalenze di questa attenuazione non abbiamo avuto bisogno dell'ipotesi $\varphi(n)/\log n \to +\infty$, ma sarebbe bastato $\varphi(n) \to +\infty$.

5. - Alcuni criteri sufficienti per la non prolungabilità.

Sulla base del Teorema II (vedi n. 4), siamo ora in grado di stabilire un criterio sufficiente per la non-prolungabilità (Teorema IV), più generale di un analogo criterio formulato da ILIEV (vedi Nota (1)). Ne presentiamo dapprima un caso particolare (Teorema III) riguardante le serie lacunari.

Teorema III. *La successione $\varphi(n)$ verifichi il sistema di condizioni $(\mathfrak{A})$. La serie $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1 e verifichi $(\mathfrak{B})$. Se esiste una successione $\{n_h\}$ crescente di interi tale che*

(i) $\quad |a_{n_h}|^{1/\varphi(n_h)} \to 1$

(ii) $\quad a_m = 0 \quad$ *per* $\quad n_h - \varphi(n_h) \leqslant m < n_h,$

allora $f(z)$ non è prolungabile.

Più in generale, si ha il seguente

Teorema IV. *La successione $\varphi(n)$ verifichi il sistema di condizioni $(\mathfrak{A})$. La serie $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1 e verifichi $(\mathfrak{B})$. Se esistono*

1°) *una successione crescente di coppie di interi (m_h, n_h) $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ con $\varphi(n_h) \leqslant m_h < n_h$;*

2°) *una successione $\{\varrho_h\}$ di numeri non negativi con $\overline{\lim}\, \varrho_h^{1/\varphi(n_h)} \leqslant 1$;*

3°) *una successione di orientazioni $\{\lambda_h\}$,*

tali che

(i) $\quad a_{n_h - s} = a_{m_h - s} \cdot \varrho_h\, e^{i\lambda_h}, \quad$ *con* $\quad s = 1, 2, \ldots, \varphi(n_h);$

(ii) $\quad \lim |a_{n_h} - a_{m_h} \cdot \varrho_h\, e^{i\lambda_h}|^{1/\varphi(n_h)} = 1,$

allora $f(z)$ non è prolungabile fuori dal cerchio $|z| < 1$.

Osservazioni. 1°) All'ipotesi (ii) si può sostituire il sistema delle due seguenti

$$\text{(iii)} \qquad \overline{\lim}\, | a_{n_h} - a_{m_h} \cdot \varrho_h\, e^{i\lambda_h} |^{1/\varphi(n_h)} \geqslant 1, \qquad \varphi(m_h)/\varphi(n_h) \text{ limitato}\,.$$

(Una famiglia di funzioni $\varphi(n)$ che soddisfano alla seconda condizione è costituita, per esempio, dalle funzioni monotone non decrescenti).

Infatti, risulta $f(z) \in \mathfrak{F}(\varphi(n))$ e pertanto

$$\overline{\lim}\, | a_{n_h} |^{1/\varphi(n_h)} \leqslant 1, \ \overline{\lim}\, | a_{m_h} |^{1/\varphi(m_h)} \leqslant 1; \ \overline{\lim}\, \varrho_h^{1/\varphi(n_h)} \leqslant 1,$$

e quindi è anche

$$\overline{\lim}\, (\varrho_h\, | a_{m_h} |)^{1/\varphi(n_h)} \leqslant \overline{\lim}\, \varrho_h^{1/\varphi(n_h)} \cdot \overline{\lim}\, | a_{m_h} |^{1/\varphi(n_h)} \leqslant \overline{\lim} \left\{ | a_{m_h} |^{1/\varphi(m_h)} \right\}^{\varphi(m_h)/\varphi(n_h)} \leqslant 1\,.$$

Ne segue

$$\text{(5.1)} \qquad \overline{\lim}\, | a_{n_h} - a_{m_h}\, \varrho_h\, e^{i\lambda_h} |^{1/\varphi(n_h)} \leqslant 1\,.$$

Infatti è

$$| a_{n_h} - a_{m_h}\, \varrho_h\, e^{i\lambda_h} |^{1/\varphi(n_h)} \leqslant \left\{ 2 \operatorname{Max} (| a_{n_h} |,\ \varrho_h\, | a_{m_h} |) \right\}^{1/\varphi(n_h)},$$

da cui

$$\overline{\lim}\, | a_{n_h} - a_{m_h}\, \varrho_h\, e^{i\lambda_h} |^{1/\varphi(n_h)} \leqslant \overline{\lim}\, 2^{1/\varphi(n_h)} \cdot \overline{\lim} \left\{ \operatorname{Max} (| a_{n_h} |,\ \varrho_h\, | a_{m_h} |) \right\}^{1/\varphi(n_h)} \leqslant 1\,.$$

Da (iii) e (5.1) segue (ii).

2°) All'ipotesi (ii) si può sostituire l'ipotesi più restrittiva (che tuttavia generalizza quella di Iliev)

$$\text{(iv)} \qquad \begin{cases} \varphi(n) \text{ monotona non decrescente} \\ | a_{n_h} |^{1/\varphi(n_h)} \to 1 \\ a_{m_h}\, \varrho_h\, e^{i\lambda_h} / a_{n_h} \text{ non converge a } 1. \end{cases}$$

Si prova subito che da (iv) segue (ii), quando si passi eventualmente ad una successione parziale di $\{ n_h \}$.

Poniamo

$$\text{(5.2)} \qquad a_{m_h}\, \varrho_h\, e^{i\lambda_h} = a_{n_h} \cdot (1 + R_h\, e^{i\theta_h})\,.$$

Se vale (iv) risulta $\overline{\lim}\, R_h > 0$ e quindi esiste un $\omega > 0$ e una successione parziale di $\{n_h\}$ (che denoteremo ancora per semplicità con $\{n_h\}$) per la quale $R_h \geqslant \omega$; pertanto

$$| a_{n_h} - a_{m_h} \varrho_h e^{i\lambda_h} | \geqq \omega \, | a_{n_h} | ,$$

e di qui segue (ii), se si tengono presenti la seconda delle condizioni (iv), la relazione $\omega^{1/\varphi(n_h)} \to 1$ e l'osservazione 1°).

La maggior generalità del Teorema IV in confronto di quello ricordato di Iliev si pone in evidenza osservando che esistono successioni $\{a_n\}$ per le quali vale (ii) pur essendo

$$(5.3) \qquad | a_{n_h} |^{1/\varphi(n_h)} \to 1, \qquad a_{m_h} \varrho_h e^{i\lambda_h} / a_{n_h} \to 1.$$

Infatti, assunta di nuovo la posizione (5.2), risulta valida la seconda di (5.3), quando e soltanto quando $R_h \to 0$, e per la validità di (ii) è sufficiente che sia

$$R_h^{1/\varphi(n_h)} \to 1,$$

cioè che la successione R_h verifichi la condizione

$$(\log R_h)/\varphi(n_h) \to 0.$$

Per esempio, questa è verificata quando è $R_h > e^{-\sqrt{\varphi(n_h)}}$.

3°) Riteniamo utile la seguente osservazione, la quale ci informa sul fatto che nelle ipotesi del Teorema IV le due successioni $\{a_{n_h}\}$, $\{a_{m_h}\}$ non possono troppo rapidamente e simultaneamente convergere a zero:

$$(5.4) \qquad \underline{\lim}\, \mathrm{Max}\{ | a_{n_h} |^{1/\varphi(n_h)}, \quad | a_{m_h} |^{1/\varphi(n_h)} \} \geqslant 1$$

$$(5.5) \qquad \mathrm{Max}\{ | a_{n_h} |^{1/\varphi(n_h)}, \quad | a_{m_h} |^{1/m_h} \} \to 1 \quad \text{per} \quad h \to +\infty .$$

Denotiamo con μ_h e $\bar{\mu}_h$ rispettivamente i due $\mathrm{Max}\{\ldots\}$ che figurano nei primi membri.

1. Dimostriamo che è $\underline{\lim}\, \mu_h \geqslant 1$.

Per assurdo: esista un $\delta > 0$ e una successione parziale $\{m_k, n_k\}$ con

$$| a_{n_k} | < (1-\delta)^{\varphi(n_k)}, \qquad | a_{m_k} | < (1-\delta)^{\varphi(n_k)} .$$

Allora è

$$|a_{n_k} - a_{m_k} \varrho_k e^{i\lambda_k}| \leqslant |a_{n_k}| + \varrho_k |a_{m_k}| \leqslant$$

$$\leqslant 2 \operatorname{Max}\{|a_{n_k}|, \ \varrho_k |a_{m_k}|\} \leqslant$$

$$\leqslant 2 (1-\delta)^{\varphi(n_k)} \operatorname{Max}(1, \ \varrho_k),$$

ed elevando a potenza $1/\varphi(n_k)$ abbiamo

$$\overline{\lim} |a_{n_k} - a_{m_k} \varrho_k e^{i\lambda_k}|^{1/\varphi(n_k)} \leqslant 2^{1/\varphi(n_k)} (1-\delta) \operatorname{Max}\{1, \ \overline{\lim}\, \varrho_k^{1/\varphi(n_k)}\}$$

$$\leqslant 1 - \delta < 1,$$

assurdo, contro (ii).

II. $\overline{\mu}_h \to 1$. Infatti, in primo luogo è $\overline{\lim}\, \overline{\mu}_h \leqslant 1$, poichè $\overline{\lim} |a_{n_h}|^{1/\varphi(n_h)} \leqslant 1$, $\overline{\lim} |a_{m_h}|^{1/m_h} \leqslant 1$.

In secondo luogo, è $\underline{\lim}\, \overline{\mu}_h \geqslant 1$, poichè: per $|a_{m_h}| \geqslant 1$ risulta $\overline{\mu}_h \geqslant 1$; per $|a_{m_h}| < 1$ risulta $|a_{m_h}|^{1/m_h} \geqslant |a_{m_h}|^{1/\varphi(n_h)}$, e quindi $\overline{\mu}_h \geqslant \mu_h$, e dalla (5.4) segue $\underline{\lim}\, \overline{\mu}_h \geqslant 1$ e quindi $\overline{\mu}_h \to 1$.

Corollario. *La successione $\varphi(n)$ verifichi il sistema di condizioni ($\mathfrak{A}$); $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1 e verifichi ($\mathfrak{B}$). Se esiste una successione di tratti di coefficienti a_u ($p_h \leqslant u < q_h$; $h = 1, 2, 3, \ldots$), periodici con periodo k_h (cioè $a_{u-k_h} = a_u$ per $u = p_h + k_h, p_h + k_h + 1, \ldots, q_h - 1$), tale che si abbia*

(i) $\quad q_h - p_h \geqslant \varphi(q_h) + k_h$

(ii) $\quad \lim |a_{q_h} - a_{q_h - k_h}|^{1/\varphi(q_h)} = 1,$

allora $f(z)$ non è prolungabile fuori di $|z| < 1$.

Segue dal Teorema IV per $\varrho_h = 1$, $\lambda_h = 0$, $n_h = q_h$, $m_h = q_h - k_h$.

Sussiste anche il seguente

Teorema V. *Sia $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$; sia $g(y)$ una funzione intera tale che per $\delta > 0$ qualunque e $|y| = r \to +\infty$ risulti*

$$g(y) = O(e^{\delta r});$$

sia

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n)\, a_n z^n .$$

Allora, se $F(z)$ e $\varphi(n)$ soddisfano alle condizioni dichiarate nel Teorema IV *per $f(z)$ e $\varphi(n)$, la serie $f(z)$ non è prolungabile.*

Osservazione. I teoremi III, IV, V rimangono validi se alle condizioni ($\mathfrak{A}$) e ($\mathfrak{B}$) si sostituiscono le condizioni meno restrittive ($\mathfrak{A}'$) e ($\mathfrak{B}'$) oppure ($\mathfrak{A}'$) e ($\mathfrak{B}''$) (vedi n. 4).

Sulle condizioni a tratti.

1) Se le condizioni ($\mathfrak{A}'$) e ($\mathfrak{B}'$) (oppure ($\mathfrak{A}'$) e ($\mathfrak{B}''$)) sono verificate anzichè lungo tutta la successione degli interi m, lungo una successione $\{I_k\}$ di tratti $N_k' \leqq m \leqq N_k''$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, sussiste il seguente

Teorema II$_1$. *La successione $\varphi(m)$ di interi verifichi per $m \in \{I_k\}$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ le condizioni*

$$0 < \varphi(m) \leqq m, \qquad \varphi(m)/\log m \to +\infty \quad \textit{per} \quad m \to +\infty.$$

La serie $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1 *e sia prolungabile. Se $f(z)$ verifica la condizione*

$$\overline{\lim}\, m\, \xi(m)/\varphi(m) \leqslant 0 \quad \textit{per} \quad m \in \{I_k\}\ (k = 1, 2, 3, \ldots),\ m \to +\infty$$

allora esistono

i) *due numeri A e Θ, con $A > 0$ e $0 < \Theta < 1$,*

ii) *un vettore $\boldsymbol{u}^{(\tau)} \equiv (u_\tau^{(\tau)}, \ldots, u_1^{(\tau)}, 1)$* $\qquad (\tau = \varphi(m))$

tali che si verifichino le $m - \tau + 1$ disuguaglianze

$$\begin{cases} |(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n}, \boldsymbol{u}^{(\tau)})| < A \cdot \Theta^\tau \\ \tau = \varphi(m); \quad n = \tau, \tau + 1, \ldots, m; \quad m \in \{I_k\} \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \end{cases}$$

dove A e Θ sono indipendenti da m e n (mentre $\boldsymbol{u}^{(\tau)}$ dipende da m).

La dimostrazione procede come per il Teorema II, salvo evidenti modifiche nel caso B_2).

2) I criteri di non prolungabilità (Teoremi III e IV) continuano a valere se le condizioni $(\mathfrak{A}')$ e $(\mathfrak{B}')$ (oppure $(\mathfrak{A}')$ e $(\mathfrak{B}'')$) sono verificate, anzichè lungo tutta la successione degli interi m, lungo la successione $\{n_k\}$ degli indici corrispondenti ai coefficienti « preponderanti ».

Sussistono infatti i seguenti teoremi:

TEOREMA III_1. *La serie $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1. Se esiste una successione crescente $\{n_k\}$ di interi positivi alla quale sia possibile coordinare una successione $\{\varphi(n_h)\}$ di interi in modo che siano verificate le seguenti proprietà*

i) $\quad 0 < \varphi(n_h) \leqq n_h, \quad \varphi(n_h)/\log n_h \to +\infty, \quad \overline{\lim\limits_{h\to+\infty}}\, n_h\, \xi(n_h)/\varphi(n_h) \leqq 0$

ii) $\quad |a_{n_h}|^{1/\varphi(n_h)} \to 1$

iii) $\quad a_m = 0 \quad per \quad n_h - \varphi(n_h) \leqq m < n_h$

allora $f(z)$ non è prolungabile.

TEOREMA IV_1. *La serie $f(z)$ abbia raggio di convergenza 1. Se esistono*

1°) *una successione crescente $\{m_h, n_h\}$ $(h = 1, 2, 3, \ldots)$ di coppie di interi alla quale si possa coordinare una successione $\{\varphi(n_h)\}$ di interi positivi, con le seguenti proprietà*

i) $\quad 0 < \varphi(n_h) \leqq m_h < n_h, \quad \varphi(n_h)/\log n_h \to +\infty, \quad \overline{\lim\limits_{h\to+\infty}}\, n_h\, \xi(n_h)/\varphi(n_h) \leqq 0$

2°) *una successione $\{\varrho_h\}$ di numeri non negativi con* $\overline{\lim}\, \varrho_h^{1/\varphi(n_h)} \leqq 1$

3°) *una successione di orientazioni $\{\lambda_h\}$,*

tali che

ii) $\quad a_{n_h - s} = a_{m_h - s}\, \varrho_h\, e^{i\lambda_h}, \quad con \quad s = 1, 2, \ldots, \varphi(n_h)$

iii) $\quad \lim |a_{n_h} - a_{m_h}\, \varrho_h\, e^{i\lambda_h}|^{1/\varphi(n_h)} = 1,$

allora $f(z)$ non è prolungabile.

6. - Un lemma.

Per la dimostrazione del Teorema II ci sarà utile il seguente Lemma, che riteniamo interessante in se stesso e che verrà dimostrato nel n. **9**:

Lemma. *Se $f(z)$ ha raggio di convergenza* 1 *ed è prolungabile all'esterno di* $|z| < 1$, *allora, comunque si scelgano gli interi positivi* x_0, X, τ, *con* $x_0 < X$, $X \geqq X_0(f)$ *esistono*

(i) *due numeri* $K = K(f)$ *e* Θ, *con* $K > 0$ *e* $0 < \Theta < 1$;

(ii) *un vettore* $\boldsymbol{u}^{(\tau)} \equiv (u_\tau^{(\tau)}, u_{\tau-1}^{(\tau)}, \ldots, u_1^{(\tau)}, 1)$ *dipendente soltanto dalla stella di regolarità di* $f(z)$

tali che risultino valide le infinite disuguaglianze

$$
(6.1) \quad \begin{cases} |(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n}, \boldsymbol{u}^{(\tau)})| \leqslant K \cdot X \exp\{\mu + \tau \log \Theta + \sigma \cdot (n-\tau)\} \\ (n = \tau, \tau+1, \tau+2, \ldots), \end{cases}
$$

dove

$$
\begin{cases} \sigma = \sigma(X) = 2 \operatorname*{Sup}_{s \geqq X} \left\{ \dfrac{\alpha}{X}; \dfrac{\log |a_s|}{s} \right\}, \ \textit{con} \ \alpha \exp \alpha = 1, \\ \mu = \mu(X) = \operatorname*{Sup}_{x_0 \leqq s \leqq X} \{ \log |a_s| - s \cdot \sigma(X); 0 \} \end{cases}
$$

sono indipendenti da τ *e* n.

7. - Osservazioni sopra le funzioni di ordine finito.

Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ di ordine finito, cioè

$$
\overline{\lim} \frac{\log |a_n|}{\log n} < +\infty .
$$

1) Nei teoremi II, II*, III, IV, in luogo delle condizioni $(\mathfrak{A})$ si può allora sostituire il seguente sistema parziale di condizioni

$$
(\mathfrak{A}_0) \qquad 0 < \varphi(n) \leqslant n, \quad \frac{\varphi(n)}{\log n} \to +\infty,
$$

e la condizione $(\mathfrak{B})$ può venire soppressa.

Basta verificare che per tale tipo di funzioni le ipotesi ridotte ($\mathfrak{A}_0$) sono sufficienti per stabilire il Teorema II, sopra il quale si fondano i teoremi successivi. E infatti, se è $\overline{\lim}\, \frac{\log |a_n|}{\log n} < 0$ (finito o infinito) $f(z)$ rientra nel tipo di funzioni che nel corso della dimostrazione del Teorema II (vedi n. **10**) sono considerate nel caso A; se è $\overline{\lim}\, \frac{\log |a_n|}{\log n} = K$ con $0 \leqslant K < +\infty$, si ha anche $\overline{\lim}\, \frac{\psi(n)}{\log n} = K$, cioè $\psi(n) = O(\log n)$ e si rientra nel caso B_1 (vedi n. **10**). In entrambi i casi per la dimostrazione non si ricorre alle ipotesi $\frac{\varphi(n)}{n}$ monotona non crescente, $\overline{\lim}\, \frac{\psi(n)}{\varphi(n)} \leqslant 0$.

Osserviamo d'altra parte che per le funzioni di ordine finito la condizione $\overline{\lim}\, \frac{\psi(n)}{\varphi(n)} \leqslant 0$ risulta sempre verificata. Infatti si ha

$$\overline{\lim}\, \frac{\psi(n)}{\varphi(n)} = \overline{\lim} \left\{ \frac{\psi(n)}{\log n} \cdot \frac{\log n}{\varphi(n)} \right\} \leqslant 0.$$

2) Se $\varphi(n)$ è una qualunque funzione che verifica le condizioni ($\mathfrak{A}_0$), allora ogni funzione $f(z)$ di ordine finito appartiene alla classe $\mathfrak{F}(\varphi(n))$.

Infatti è

$$\overline{\lim}\, \frac{\log |a_n|}{\log n} = \overline{\lim} \left\{ \frac{\log |a_n|}{\log n} \cdot \frac{\log n}{\varphi(n)} \right\} \leqslant 0\,.$$

Ne segue che il Teorema I (n. **4**) assume la seguente forma più semplice:

Teorema. *La successione $\varphi(n)$ verifichi le condizioni ($\mathfrak{A}_0$). La serie $f(z)$ sia di ordine finito, abbia raggio di convergenza* 1 *e sia prolungabile.*

Allora $f(z) \in \mathfrak{G}(\varphi(n))$.

Analogamente per il Teorema I* (n. **4**).

8. Richiamo di un classico lemma di G. Szegö [9].

Sia $0 < r \leqslant 1 < R$, $0 < \alpha < \pi$, e denotiamo con $\Gamma(r, R; \alpha)$ il circuito costituito dalle seguenti linee

$$|z| = r, \qquad \alpha < \arg z < 2\pi - \alpha$$

$$r \leqslant |z| \leqslant R, \qquad \arg z = \pm\alpha$$

$$|z| = R, \qquad -\alpha < \arg z < \alpha.$$

Allora sussiste il seguente

L e m m a. Fissati α e R, con $0<\alpha<\pi$ e $R>1$, è possibile determinare tre numeri reali A, Θ, r_0, con $A>0$, $0<\Theta<1$, $0<r_0<1$, e una successione di polinomi

$$Q_\tau\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{z^\tau}+\frac{u_1^{(\tau)}}{z^{\tau-1}}+\ldots+u_\tau^{(\tau)}, \qquad (\tau=1,\,2,\,3,\,\ldots)$$

tali che sia

$$\left|Q_\tau\left(\frac{1}{z}\right)\right|<A\;\Theta^\tau, \qquad (\tau=1,\,2,\,3,\,\ldots), \tag{8.1}$$

per ogni $z\in\Gamma(r,\;R;\;\alpha)$ e ogni $r_0\leqslant r<1$.

O s s e r v a z i o n e. L'estremo inferiore Θ^* dei numeri Θ ai quali è possibile coordinare i numeri A e r_0 dipende soltanto da R e α.

Poichè da $R_1\leqslant R_2$, $\alpha_1\leqslant\alpha_2$ segue che il circuito $\Gamma_2=\Gamma(r,\,R_2;\,\alpha_2)$ è contenuto nel dominio esterno limitato da $\Gamma_1=\Gamma(r,\,R_1;\,\alpha_1)$, il massimo modulo di $Q_\tau\left(\frac{1}{z}\right)$ lungo Γ_2 non supera quello lungo Γ_1; pertanto, in relazione alla validità di (8.1), Θ^* non cresce all'aumentare di R e di α.

9. - Dimostrazione del Lemma.

1) M a g g i o r a z i o n e d i $|f(z)|$ s u $|z|=\exp(-\sigma)$, $\sigma>0$.

Poniamo

$$\log|a_n|=n\gamma_n,$$

con la convenzione di porre $\gamma_n=-\infty$ se $a_n=0$; allora è $\gamma_n\geqslant-\infty$ e $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\,\gamma_n=0$.

Sulla circonferenza $|z|=\exp(-\sigma)$, $(\sigma>0)$, si ha

$$|f(z)|\leqslant\sum_{n=0}^{\infty}|a_n|\cdot|z|^n=\sum_{n=0}^{\infty}\exp\{(\gamma_n-\sigma)\,n\}=$$

$$=\sum_{0}^{x_0}\ldots+\sum_{x_0+1}^{X}\ldots+\sum_{X+1}^{\infty}\ldots=\Sigma_1+\Sigma_2+\Sigma_3.$$

1, a) Maggioriamo $\sum_2$. Posto

$$\mu = \operatorname*{Sup}_{x_0 \leq n \leq X} \{ (\gamma_n - \sigma)\, n;\ 0 \}, \qquad (\mu = \mu(x_0,\ X;\ \sigma)),$$

si ha

$$\sum\nolimits_2 \leqslant (X - x_0) \exp \mu < X \exp \mu . \tag{9.1}$$

1, b) Maggioriamo $\sum_3$. Per $X > 0$ intero fissato, sia

$$\sigma = \sigma(X) = 2 \operatorname*{Sup}_{s \geq X} \left\{ \frac{\alpha}{X}\ ;\ \gamma_s \right\},$$

dove α è l'unica radice (positiva) dell'equazione $\xi \exp \xi = 1$. Risulta $\sigma(X) > 0$, $\sigma(X) \to 0+$ per $X \to +\infty$. Con questa scelta di σ, posto $\bar{\gamma}_X = \operatorname{Sup} \gamma_s$, si ha, per $n \geqslant X$:

$$\sigma - \gamma_n \geqslant \operatorname*{Sup}_{s \geq X} \left\{ \frac{2\alpha}{X} - \gamma_n;\ 2\gamma_s - \gamma_n \right\} \geqslant \operatorname{Sup} \left\{ \frac{2\alpha}{X} - \gamma_n;\ 2\bar{\gamma}_X - \gamma_n \right\} \geqslant$$

$$\operatorname{Sup} \left\{ \frac{2\alpha}{X} - \bar{\gamma}_X;\ \bar{\gamma}_X \right\} = \lambda(X) \geqslant \frac{\alpha}{X} > 0 ,$$

e pertanto, ricordando il significato di α, risulta

$$\sum\nolimits_3 \leqslant \sum_{X+1}^{\infty} \exp(-n \cdot \lambda(X)) \leqslant \int_X^{\infty} \exp(-x \cdot \lambda(X))\, dx$$

da cui

$$\sum\nolimits_3 \leqslant (\lambda \cdot X \exp(\lambda \cdot X))^{-1} X \leqslant X \qquad (\lambda = \lambda(X)). \tag{9.2}$$

1, c) Osserviamo che nel caso $\mu(X) > 0$ risulta $X < X \exp \mu$, e quindi da (9.1) e (9.2) segue

$$|f(x)| \leqslant \sum\nolimits_1 + 2X \cdot \exp \mu(X), \qquad |z| = \exp(-\sigma(X)) .$$

Nel caso $\mu(X) = 0$ si ha

$$\sum\nolimits_2 \leqslant X \exp \mu(X) = X, \qquad \sum\nolimits_3 \leqslant X,$$

e quindi $|f(z)| < \sum_1 + 2X$.

Ne segue che risulta in ogni caso

$$|f(z)| \leqslant \sum\nolimits_1 + 2X \exp \mu(X), \qquad |z| = \exp(-\sigma(X)). \tag{9.3}$$

2) Maggiorazione di $|f(z)|$ su Γ_σ.

Teniamo conto dell'ipotesi della prolungabilità di $f(z)$ fuori dal cerchio $|z|<1$; possiamo supporre, senza limitare la generalità, che un arco di regolarità per $f(z)$ sia l'arco $z=\exp(i\varphi)$ con $-\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha$.

Posto $r=r(X)=\exp(-\sigma(X))$ consideriamo la linea $\Gamma_\sigma(r(X), R; \alpha)$ del tipo considerato nel n. **8**, con R e α indipendenti da X, ed $R>1$, $0<\alpha<\pi$, scelti in modo che $f(z)$ sia regolare su Γ_σ ed all'interno. Sia r_0, $0<r_0<1$, la costante di cui nel lemma di SZEGÖ: poichè $\sigma(X)\to 0$ per $X\to+\infty$, possiamo scegliere $X_0(f)$ abbastanza grande, in modo che per $X \geqq X_0(f)$ si abbia $r=\exp(-\sigma(X)) \geqq r_0$. Sia L la linea costituita dai seguenti archi

$$z = R\cdot\exp(i\varphi) \qquad \text{per} \quad -\alpha \leqslant \varphi \leqslant \alpha$$

$$z = r\cdot\exp(\pm i\alpha) \qquad \text{per} \quad 0 \leqslant r < R,$$

e poniamo

$$M = \operatorname*{Max}_{z\in L} |f(z)|\,;$$

allora risulta $M=M(f; R, \alpha) < +\infty$, e per $z \in \Gamma_\sigma$ si ha, in base a (9.3),

$$|f(z)| \leqslant M + \sum\nolimits_1 + 2X\exp\mu(X) < X\cdot\exp\mu(X)\cdot\{2 + M + \sum\nolimits_1\}$$

e quindi

$$|f(z)| \leqslant c_1\cdot X\exp\mu(X) \tag{9.4}$$

dove $c_1 = c_1(f;\ x_0;\ R_0,\ \alpha)$.

3) Maggiorazione di $|(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n}, \boldsymbol{u}^{(\tau)})|$.

Da (8.1) e (9.4) segue, per $n=\tau, \tau+1, \ldots$,

$$|(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n}, \boldsymbol{u}^{(\tau)})| = |a_{n-\tau}\,\bar{u}_\tau^{(\tau)} + a_{n-\tau+1}\,\bar{u}_{\tau-1}^{(\tau)} + \ldots + a_{n-1}\,\bar{u}_1^{(\tau)} + a_n|$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_{\Gamma\sigma} \frac{f(z)}{z^{n-\tau+1}}\cdot Q_\tau\left(\frac{1}{z}\right)\mathrm{d}z\right|$$

$$\leqslant \frac{A}{2\pi}\int_{\Gamma\sigma} \frac{|f(z)|}{\exp\{-\sigma(n-\tau+1)\}}\exp(\tau\log\Theta)\,\mathrm{d}s$$

$$\leqslant A\cdot c_2(R)\cdot c_1\cdot X\exp\{\mu(X) + \tau\log\Theta + \sigma\cdot(n-\tau+1)\}.$$

Poichè σ può essere maggiorato con un numero indipendente da X, τ, n (infatti $\sigma \leqslant \log(1/r_0)$), si ottiene

$$\begin{cases} |(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n}, \boldsymbol{u}^{(\tau)})| \leqslant K \cdot X \exp\{\mu(X) + \tau \log \Theta + (n-\tau)\cdot\sigma(X)\} \\ (n = \tau, \tau+1, \ldots) \end{cases}$$

dove $K = K(f; x_0)$ è indipendente da X, τ, n.

Il Lemma risulta così dimostrato.

10. - Dimostrazione del Teorema II.

Consideriamo di nuovo il Lemma stabilito nel n. **9**: le disuguaglianze (6.1), valide per $\tau > 0$ qualunque e per ogni $n \geqslant \tau$, valgono a maggior ragione se, fissato $m > 0$, si assume $\tau = \varphi(m)$ e ci si limita a considerare i valori di n tali che

$$\tau = \varphi(m) < n \leqslant m.$$

La dimostrazione del Teorema II risulterà immediata quando avremo determinato $X = X(m)$ in modo da avere, per m abbastanza grande,

$$\log X + \mu(X) + m\cdot\sigma(X) < \eta\cdot\tau \tag{10.1}$$

dove $\eta < 0$, arbitrariamente piccolo, e in ogni modo tale che sia $\eta < \log(1/\Theta)$, non dipende da m.

Sia $\psi(n)$ la maggiorante monotona minima di $\log|a_n|$. Possono presentarsi due casi.

Caso A: $\psi(n)$ è limitata superiormente. (Poichè $\psi(n)$ è monotona questo caso si verifica quando è $\overline{\lim}\,\gamma_n = 0-$, oppure quando $\psi(n) \to 0+$ o $\psi(n) \to H > 0$ finito). Allora anche $\mu(X)$ è limitato superiormente.

Osserviamo che risulta

$$\frac{2\alpha}{X} \leqslant \sigma = \sigma(X) = 2\,\mathrm{Sup}\left(\frac{\alpha}{X};\, \gamma_X, \gamma_{X+1}, \ldots\right)$$

$$= \frac{2\alpha}{X}, \text{ per } X > X_0 \text{ quando } \overline{\lim}\,\gamma_n = 0-,$$

$$\leqslant \frac{2\alpha}{X} + \frac{2}{X}\mathrm{Sup}\{X\gamma_X, (X+1)\gamma_{X+1}, \ldots\} \text{ quando}$$

$$\text{è } \psi(n) \to 0+ \quad \text{oppure} \quad \psi(n) \to H,\, 0 < H < +\infty$$

$$\leqslant \frac{1}{X}\{2\alpha + 2\,\mathrm{Sup}_{n \geqq X}\,\psi(n)\}.$$

In ogni caso è $\sigma(X) = O(1/X)$; inoltre $\tau = \varphi(m) \to +\infty$ per $m \to +\infty$, e quindi, fissato $\eta > 0$, si può assumere $X = X(m)$ crescente con m, in modo da avere

$$\log X + c_1 \frac{1}{X} m < \eta \cdot \tau .$$

Per questo basta che $X = X(m)$ verifichi le due condizioni

$$\log X = o(\tau), \quad \frac{m}{\tau} = o(X),$$

e quindi basta scegliere $X = X(m)$, con $X(m) \to +\infty$ in modo da avere

$$X(m) = \exp\{ o(\varphi(m)) \}, \quad X(m) \cdot \frac{\varphi(m)}{m} \to \infty .$$

Questa scelta è possibile perchè $\varphi(m)/\log m \to +\infty$. Infatti, basta che $X(m)$ verifichi una limitazione del tipo

$$\frac{m}{\varepsilon_1 \cdot \varphi(m)} < X < \exp\{ \varepsilon_2 \cdot \varphi(m) \}$$

con ε_1, ε_2 positivi convenienti, $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ per $m \to +\infty$. Si può assumere per esempio, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \log m/\varphi(m)$ e risulta

$$\frac{m}{\log m} < X < m .$$

Caso B: $\psi(n) \to +\infty$ (quindi $\psi(n)$ non decrescente). Per soddisfare a (10.1), basta determinare $X = X(m) \to +\infty$ in modo che risulti valida

$$\log X + \psi(X) + m \cdot \sigma(X) < \eta \cdot \tau . \tag{10.2}$$

(Infatti è $\mu(X) = \operatorname*{Sup}_{x_0 \leqq u \leqq X} \{ \gamma_u - u \cdot \sigma;\ 0 \} \leqslant \psi(X)$ per X abbastanza grande). Distingueremo due sottocasi.

B_1) Sia $\psi(n) = O(\log n)$.

Allora risulta $\sigma = \sigma(X) = O\left(\frac{\log X}{X}\right)$. $\Bigg($Infatti si ha $\frac{2\alpha}{X} \leqslant \sigma = \sigma(X) \leqslant 2 \operatorname{Sup}\left\{ \frac{\alpha}{X} ; \frac{\psi(X)}{X}, \frac{\psi(X+1)}{X+1}, \ldots \right\} \leqslant 2 \operatorname{Sup}\left\{ \frac{\alpha}{X} ; H_1 \cdot \frac{\log X}{X}, H_1 \cdot \frac{\log(X+1)}{X+1}, \ldots \right\} = 2H_1 \cdot \frac{\log X}{X}$ per X abbastanza grande$\Bigg)$.

Basta quindi che $X = X(m)$ verifichi la seguente disuguaglianza

$$c_2 \log X + c_3 \frac{\log X}{X} \cdot m < \eta \cdot \tau ,$$

e per questo basta scegliere $X(m)$ in modo che risulti

$$\log X = o(\tau), \quad \frac{m}{\tau} = o\left(\frac{X}{\log X}\right)$$

cioè

$$X(m) = \exp\{ \varepsilon_1 \cdot \varphi(m) \}, \quad \frac{X(m)}{\log X(m)} = \frac{m}{\varepsilon_2 \cdot \varphi(m)}$$

con ε_1, ε_2 positivi convenienti, $\varepsilon_1 \to 0$, $\varepsilon_2 \to 0$ per $m \to +\infty$. Basta scegliere, per esempio, $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \log m / \varphi(m)$ e quindi $X(m) = m$.

B_2) Sia $\overline{\lim}\, \psi(n)/\log n = +\infty$.

Diciamo $\xi(n)$ la maggiorante monotona minima (non crescente) di $\psi(n)/n$. Allora è

$$\xi(n) \geqslant \psi(n)/n, \ \xi(n_h) = \psi(n_h)/n_h \quad \text{per infiniti } n_h;$$

inoltre, poichè vale $0 \leqslant \overline{\lim}\, \dfrac{\psi(n)}{n} \leqslant \overline{\lim}\, \dfrac{\psi(n)}{\varphi(n)} \leqslant 0$, risulta $\overline{\lim}\, \dfrac{\psi(n)}{n} = 0$ e quindi $\xi(n) \to 0 +$.

(Se è $\psi(n)/n$ monotona, si ha $\xi(n) = \psi(n)/n$ per ogni n).

Osserviamo che risulta

$$\begin{aligned} \frac{2\alpha}{X} \leqslant \sigma = \sigma(X) &= 2 \operatorname{Sup} \left\{ \frac{\alpha}{X} ;\ \gamma_X,\ \gamma_{X+1}, \dots \right\} \\ &\leqslant 2 \operatorname{Sup} \left\{ \frac{\alpha}{X} ;\ \frac{\psi(X)}{X},\ \frac{\psi(X+1)}{X+1}, \dots \right\} \\ &\leqslant 2 \operatorname{Sup} \left\{ \frac{\alpha}{X} ;\ \xi(X),\ \xi(X+1), \dots \right\} \\ &= 2\xi(X) \quad \text{per } X \text{ abbastanza grande.} \end{aligned}$$

Perchè risulti verificata (10.2), basta che sussista la disuguaglianza

$$\log X + \psi(X) + 2m \cdot \xi(X) < \eta \cdot \tau , \tag{10.3}$$

e questa vale se poniamo $X = X(m) = m$.

Infatti, per ipotesi, è $\log m = o(\varphi(m))$. In secondo luogo, consideriamo il minimo $n_h \geqslant m$: ricordando la definizione di $\xi(n)$ e le condizioni ($\mathfrak{A}$) e ($\mathfrak{B}$), si ha $\psi(n) = o(\varphi(n))$, e quindi risulta

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\psi(m)}{m} \leqslant \xi(m) \\ &\xi(m) = \xi(n_h) = \frac{\psi(n_h)}{n_h} = o\left(\frac{\varphi(n_h)}{n_h}\right) = o\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right). \end{aligned}\right.$$

Ne segue

$$\frac{\psi(m)}{m} + 2\,\xi(m) \leqslant 3\,\xi(m) = o\left(\frac{\varphi(m)}{m}\right)$$

e vale (10.3) per $X = m$ abbastanza grande.

Dunque, con la scelta di $X = X(m)$ indicata sopra nei diversi casi, la disuguaglianza (10.1) risulta verificata, e pertanto, per m abbastanza grande, si ha

$$\begin{aligned} |(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n}, \boldsymbol{u}^{(\tau)})| &= |a_{n-\tau}\,\bar{u}_\tau^{(\tau)} + \ldots + a_n| \\ &\leqslant K \cdot \exp\{(\eta + \log\Theta)\,\tau\}, \end{aligned}$$

da cui, posto $\eta + \log\Theta = \log\Theta_1 < 0$ si ottiene

$$|(\boldsymbol{a}_{n-\tau,n}, \boldsymbol{u}^{(\tau)})| \leqslant K \cdot \Theta_1^{\varphi(m)}$$

con K e Θ_1 indipendenti da m.

Il Teorema II è così completamente dimostrato.

11. - Dimostrazione del Teorema IV.

La dimostrazione procede per assurdo. Supponiamo $f(z)$ prolungabile fuori dal cerchio $|z| < 1$. Per il Teorema II esiste un vettore $\boldsymbol{u}^{(\tau)}$ tale che per esso risulti

$$(11.1)\qquad \left\{\begin{aligned} &|a_{m_h-\tau}\,\bar{u}_\tau^{(\tau)} + \ldots + a_{m_h}| < K \cdot \Theta^{\varphi(n_h)} \\ &|a_{n_h-\tau}\,\bar{u}_\tau^{(\tau)} + \ldots + a_{n_h}| < K \cdot \Theta^{\varphi(n_h)} \end{aligned}\right.$$

dove K e Θ, con $K > 0$ e $0 < \Theta < 1$, non dipendono da h. Da queste, ricordando che $\varrho_h \geqslant 0$, otteniamo

$$(11.1)' \qquad \begin{cases} \left| \varrho_h \, e^{i\lambda_h} \left(a_{m_h - \tau} \, \overline{u}_\tau^{(\tau)} + \ldots + a_{m_h}\right) \right| \leqslant K \cdot \varrho_h \, \Theta^{q(n_h)} \\ \left| a_{n_h - \tau} \, \overline{u}_\tau^{(\tau)} + \ldots + a_{n_h} \right| < K \cdot \Theta^{q(n_h)} \end{cases}$$

e ancora, ricordando la condizione (i), otteniamo

$$(11.2) \qquad \left| a_{n_h} - a_{m_h} \, \varrho_h \, e^{i\lambda_h} \right| \leqslant K \cdot (1 + \varrho_h) \, \Theta^{q(n_h)},$$

e poichè si ha evidentemente

$$K^{1/q(n_h)} \to 1, \quad (1 + \varrho_h)^{1/q(n_h)} \leqslant \operatorname{Max}\left\{ 2^{1/q(n_h)}, \ (2\varrho_h)^{1/q(n_h)} \right\},$$

$$\overline{\lim} \, (1 + \varrho_h)^{1/q(n_h)} \leqslant \operatorname{Max}\left\{ \overline{\lim} \, 2^{1/q(n_h)}, \ \overline{\lim} \, (2\varrho_h)^{1/q(n_h)} \right\} = 1,$$

da (11.2) segue

$$\overline{\lim} \left| a_{n_h} - a_{m_h} \, \varrho_h \, e^{i\lambda_h} \right|^{1/q(n_h)} \leqslant \Theta < 1 \, ,$$

assurdo, contro l'ipotesi (ii). Il teorema IV è dunque dimostrato.

12. - Dimostrazione del Teorema V.

Per un teorema noto, $F(z)$ ha raggio di convergenza 1. Inoltre, poichè soddisfa alle ipotesi del Teorema IV, essa non è prolungabile fuori di $|z| < 1$.

Consideriamo, in particolare il punto $z = \exp(i\omega)$ con $0 < \omega \leqslant 2\pi$ (singolare per $F(z)$) e portiamolo nel punto 1 mediante la rotazione $\zeta = z \cdot \exp(-i\omega)$.

Si ha

$$F(z) = F_1(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} g(n) \, a_n \exp(in\omega) \cdot \zeta^n,$$

e si verifica facilmente che, dopo la trasformazione, i coefficienti della nuova serie $F_1(\zeta)$ soddisfano ancora alle condizioni (i), (ii) dichiarate per $f(z)$ nel Teorema IV, con un'opportuna scelta di $\{\varrho_h\}$, $\{\lambda_h\}$, eventualmente in dipendenza di ω.

Infatti, ponendo

$$(12.1) \qquad a_n'(\omega) = a_n \cdot \exp(in\omega) \, ,$$

dall'ipotesi (i), valida per $F(z)$, otteniamo

$$g(n_h - s)\, a'_{n_h - s}(\omega) \cdot \exp\{-i(n_h - s)\omega\} =$$
$$= g(m_h - s)\, a'_{m_h - s}(\omega) \exp\{-i(m_h - s)\omega\}\, \varrho_h \exp(i\lambda_h$$

da cui

$$g(n_h - s)\, a'_{n_h - s}(\omega) = g(m_h - s)\, a'_{m_h - s}(\omega) \cdot \varrho_h \exp\{i(\lambda_h + (n_h - m_h)\omega)\}.$$

Posto

$$\lambda'_h \equiv \lambda_h + (n_h - m_h)\omega \pmod{2\pi}$$

risulta che i coefficienti $g(n_h - s)\, a'_{n_h - s}(\omega)$, $g(m_h - s)\, a'_{m_h - s}(\omega)$ di $F_1(\zeta)$, con $s = 1, 2, \dots, \varphi(n_h)$, verificano la condizione

$$\text{(i}'\text{)} \qquad g(n_h - s)\, a'_{n_h - s}(\omega) = g(m_h - s)\, a'_{m_h - s}(\omega) \cdot \varrho_h \exp(i\lambda'_h).$$

Analogamente, l'ipotesi (ii) su $F(z)$ con la posizione (12.1) assume la forma

$$\lim |\, g(n_h)\, a'_{n_h}(\omega) \exp(-in_h\omega) - g(m_h)\, a'_{m_h} \exp(-im_h\omega)\, \varrho_h \exp(i\lambda_h)\,|^{1/\varphi(n_h)} = 1$$

da cui, moltiplicando per $\exp(in_h\omega)$ l'espressione entro $|\dots|$, e tenendo conto dell'espressione di λ'_h otteniamo la relazione

$$\text{(ii}'\text{)} \qquad \lim |\, g(n_h)\, a'_{n_h}(\omega) - g(m_h)\, a'_{m_h}(\omega) \cdot \varrho_h \exp(i\lambda'_h)\,|^{1/\varphi(n_h)} = 1,$$

che è l'ipotesi (ii) per $F_1(\zeta)$.

Ci possiamo dunque riferire alla serie $F_1(\zeta)$ (per la quale il punto 1 è singolare) ed applicare il seguente lemma [3]:

« Lemma. Sia $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ una serie col raggio di convergenza 1. Sia $g(y)$ una funzione intera tale che per $\delta > 0$ qualunque e $|y| = r \to +\infty$ risulti $g(y) = O(\exp(\delta r))$, di modo che

$$F(z) = \sum_0^\infty g(n)\, a_n z^n$$

converge per $|z| < 1$. Allora, se per $F(z)$ il punto 1 è singolare, esso è singolare anche per $f(z)$ ».

Ne segue che $\zeta = 1$ è singolare anche per la serie $f_1(\zeta)$ ottenuta da $f(\zeta)$ mediante la rotazione $\zeta = z \exp(-i\omega)$ e il teorema risulta dimostrato.

---

(3) Vedi per es. E. LANDAU [4].

Bibliografia.

[1] CLAUS, H. - *Neue Bedingungen für die Nichtfortsetzbarkeit von Potenzreihen*, Math. Zeitschr., **49** (1943-44), 161-191.

[2] CUGIANI, M. - *Variazioni di segno condizionate, tratto ridotto e teorema di Fabry-Pólya*, Riv. Matem. Univ. Parma, **8** (1955), 99-132.

[3] ILIEV, L. - *Una classe di serie di potenze non prolungabili analiticamente*, Izv. Bulgar. Akad. Nauk, Fiz.- Mat., **4** (1960), 153-159 (in bulgaro).

[4] LANDAU, E. - *Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie*, Berlin (1929); in partic. p. 79.

[5] LÖSCH, F. - *Ueber nichtfortsetzbare Potenzreihen mit Lücken*, Math. Zeitschr., **32** (1930), 415-421.

[6] NOBLE, M. E. - *A note on non-continuable power series*, Journ. London Math. Soc., **35** (1960), 117-127.

[7] RICCI, G. - *Emisimmetria di tratti e teorema di Vivanti-Pringsheim-Hadamard-Fabry relativo ai punti critici*, Boll. U.M.I., (3) **9** (1954), 126-135.

[8] RICCI, G. - *Variazioni di segno condizionate e teorema di Fabry*, Annali di Matem. pura e appl., (4) **38** (1955), 1-31.

[9] SZEGÖ, G. - *Tschebyscheffsche Polynome und nichtfortsetzbare Potenzreihen*, Math. Ann., **87** (1922), 90-111.

Summary.

Some properties of continuable power series $\sum a_n z^n$ are established, using the « least monotonic majorant » of the sequence $\{ \log | a_n | \}$, $(n = 0, 1, 2, ...)$. Sufficient conditions for the non-continuability and concerning tracts of vanishing relative length in the sequence $\{ a_n \}$ are given. The results improve and extend an ILIEV's Theorem. Finally, the particular case of functions of finite order is considered.