Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 217-236

DELFINA ROUX (*)

Sull' isolamento da sistemi di punti e sul modulo delle funzioni intere di genere zero. (**)

1. - Introduzione.

Il comportamento del minimo modulo di una funzione intera risulta, per evidenti motivi, alquanto irregolare: vari Autori si sono interessati allo studio di tale comportamento, specialmente per funzioni di ordine poco elevato.

In questo tipo di questioni occorre spesso dare una valutazione asintotica di prodotti del tipo

$$\prod_{i=1}^{i=n} (z - z_i)$$

per $n \to +\infty$ e a questo scopo viene generalmente utilizzato il ben noto Lemma di BOUTROUX-CARTAN (¹) per la valutazione dal di sotto del modulo di un polinomio.

In una precedente Nota (²), abbiamo già osservato come sia possibile ottenere disuguaglianze migliori di quella classica se le radici del polinomio risultano collocate in posizioni favorevoli: a questo risultato siamo pervenuti introducendo una certa nozione di « isolamento » dei punti di uno spazio metrico da un insieme Z di punti (in numero finito).

(*) Indirizzo: Istituto di Matematica dell'Università, via C. Saldini, 50, Milano (Italia).

(**) Ricevuto il 28 luglio 1961. Studio eseguito nell'ambito del Gruppo di ricerca n. 14. (1960-61) del C.N.R.

(¹) Vedi per esempio R. P. BOAS jr., [1], pp. 46-47.

(²) D. ROUX, [2].

Nella presente Nota estendiamo tale nozione di « isolamento » al caso in cui l'insieme Z sia costituito da infiniti punti e sia privo di punti di accumulazione al finito. Valendoci di questa nozione, stabiliamo una estensione del Lemma di BOUTROUX-CARTAN che consente di migliorare risultati noti sul minimo modulo delle funzioni intere, in ipotesi opportune sulla distribuzione degli zeri della funzione considerata.

In particolare, abbiamo perfezionato una valutazione dal di sotto del minimo modulo dovuta a R. P. BOAS jr. (3).

Un perfezionamento analogo della valutazione di R. P. BOAS in ipotesi di altra natura venne da noi dato in altra Nota precedente (4).

PARTE I.

Isolamento rispetto a un sistema di punti e Lemma di Boutroux-Cartan.

2. - Isolamento rispetto a un sistema di punti.

Consideriamo, in un qualunque spazio metrico X, un insieme Z di punti, non necessariamente distinti: $z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ disposti in ordine di modulo non decrescente e supponiamo che l'insieme Z sia privo di punti di accumulazione al finito.

Sia inoltre assegnata una successione crescente di numeri positivi $\{\delta_h\}$: $0 < \delta_1 < \delta_2 < \ldots < \delta_h < \ldots$.

Diremo che « il punto z è δ-isolato dall'insieme Z » se ogni sfera $|x - z| \leqq \delta_h$ $(h = 1, 2, \ldots)$ contiene meno di h punti.

Una sfera $|x - z| \leqq \varrho$, $\delta_{h-1} < \varrho \leqq \delta_h$, si dice « di δ-addensamento » se contiene almeno h punti z_i.

È evidente che un punto z è δ-isolato dall'insieme Z se e soltanto se non è centro di alcuna sfera di δ-addensamento.

Indichiamo con Y l'insieme dei punti dello spazio che non sono δ-isolati da Z.

Consideriamo le sfere

$$S_{i,h}: \qquad |x - z_i| \leqq \delta_h \quad (i = 1, 2, \ldots; h = 1, 2, \ldots).$$

(3) R. P. BOAS, [1], pp. 49-50.
(4) D. ROUX, [3].

È evidente che l'insieme Y è la riunione degli insiemi seguenti:

Y_1: le sfere $S_{i,1}$ $i = 1, 2, \ldots$

Y_2: le intersezioni $S_{i,2} \cap S_{j,2}$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots$

Y_3: le intersezioni $S_{i,3} \cap S_{j,3} \cap S_{k,3}$

$i \neq j \neq k$, $i, j, k = 1, 2, \ldots$

. . . .

Y_h: le intersezioni $S_{i_1,h} \cap S_{i_2,h} \cap \ldots \cap S_{i_h,h}$

$i_1 \neq i_2 \neq \ldots \neq i_h$; $i_1, i_2, \ldots, i_h = 1, 2 \ldots$

. . . .

cioè

$$Y_h = \bigcup_{[h]} \bigcap_{k=1}^{k=h} S_{i_k,h}, \qquad (h = 1, 2, 3, \ldots)$$

dove con $[h]$ si intendono tutte le combinazioni possibili di h numeri interi positivi.

Risulta dunque

$$Y = \bigcup_{h=1}^{\infty} \bigcup_{[h]} \bigcap_{k=1}^{k=h} S_{i_k,h}.$$

3. - Altezza. Stabilità dell'altezza.

Sia $r > 0$ qualunque. Diciamo $Y(r)$ l'insieme dei punti di Y appartenenti alla sfera $|x| \leqq r$, cioè

$$Y(r) = (|x| \leqq r) \cap Y.$$

Ogni punto di $Y(r)$ dovrà appartenere ad almeno uno degli insiemi Y_h sopra considerati.

Diremo « altezza $H(r)$ dell'insieme Z in $|z| \leqq r$ rispetto alla successione base $\{\delta_h\}$» l'estremo superiore (eventualmente infinito) dei valori h pei quali l'insieme Y_h contiene qualche punto di $Y(r)$, cioè

$$H = H(r) = \operatorname*{Sup}_h \{ Y_h \cap Y(r) \text{ non vuoto} \}.$$

È evidente che la funzione $H(r)$ è monotona non decrescente e di conseguenza se per $r = r_0$ risulta $H(r_0) = +\infty$, lo stesso accadrà per ogni $r > r_0$.

Se $\lim_{h \to \infty} \delta_h = \Delta < +\infty$, l'altezza $H(r)$ risulta finita per ogni r (eventualmente non limitata). Infatti in tal caso il numero $n(z, \delta_h)$ dei punti di Z appartenenti a una sfera di centro z, ($|z| \leqq r$), e raggio δ_h non può superare il numero $n(r + \Delta)$ dei punti di Z appartenenti alla sfera con centro nell'origine e raggio $r + \Delta$, necessariamente finito. Quindi $H(r) \leqq n(r + \Delta) < +\infty$ per ogni $r > 0$.

Se $\delta_h \to +\infty$ per $h \to +\infty$, affinchè l'altezza sia finita per ogni r, è *necessario* che sia definitivamente $n(\delta_h) < h$, (cioè per $h \geqq h_0$ opportuno) ed è *sufficiente* che sia $n(2\delta_h) < h$ per $h \geqq h_0$ opportuno.

Se infatti per infiniti valori h risulta $n(\delta_h) \geqq h$, comunque grande si scelga h_0, esiste un $h > h_0$ tale che la sfera $|x| \leqq \delta_h$ contiene almeno h punti di Z. Dunque $H(r) = +\infty$ per ogni r.

Se invece $n(2\delta_h) < h$ per $h \geqq h_0$, indichiamo con $h_1 = h_1(r)$ il minimo intero h per cui risulta $\delta_h \geqq r$. Per il numero $n(z, \delta_h)$ dei punti di Z appartenenti alla sfera $|x - z| \leqq \delta_h$ risulta allora, per ogni z in modulo non superiore ad r e per ogni $h \geqq h_1(r)$

$$n(z, \delta_h) \leqq n(2\delta_h) < h$$

e dunque $H(r) \leqq \max(h_0, h_1(r) - 1) < +\infty$.

Inoltre per r abbastanza grande dovrà essere di conseguenza

$$\delta_{H(r)} < r.$$

Da queste osservazioni si deduce immediatamente quanto segue.

Sia $n(r) \leqq c_0 r^\alpha$ per $r \geqq r_0$ opportuno, (c_0, α costanti); se risulta

$$\delta_h < 1/2\,(h/c_0)^{1/\alpha} \quad \text{per} \quad h \geqq h_0$$

allora e $H(r) < +\infty$ per ogni $r \geqq 0$ ed è inoltre $\delta_{H(r)} < r$ per r abbastanza grande.

Se invece $n(r) \geqq c_0 r^\alpha$ per $r \geqq r_0$ e *per infiniti valori* h risulta

$$\delta_h \geqq (h/c_0)^{1/\alpha}$$

allora $H(r) = +\infty$ per ogni r.

Se per ogni r risulta $H(r) < +\infty$ e inoltre per $r \to +\infty$ $H(r) \to H_0 < < +\infty$, diremo che «l'insieme Z ha altezza stabile rispetto alla successione base $\{\delta_h\}$».

4. - Teoremi riguardanti il δ-isolamento da un insieme Z infinito.

Nel caso in cui l'altezza $H(r)$ risulti finita per ogni r, (anche se non limitata in $0 \leqq r < +\infty$), è possibile stabilire, per l'insieme Z infinito, teoremi analoghi a quelli validi quando Z sia costituito da un numero finito di punti (5).

Sia $H(r) < \infty$; allora è evidente che nessuna sfera $|x - z| \leqq \varrho$ con $|z| \leqq r$ e $\varrho > \delta_{H(r)}$, può essere di δ-addensamento ed è anche evidente che se una sfera $|x - z| \leqq \varrho$, ($|z| \leqq r$, $\varrho \leqq \delta_{H(r)}$), è di δ-addensamento, i punti z_i ad essa appartenenti sono in modulo non superiori a $r + \delta_{H(r)}$.

Sia $K = K(r)$ il numero dei punti di Z appartenenti alla sfera $|x| \leqq r + \delta_{H(r)}$ e sia Z_K l'insieme di questi punti, cioè

$$K(r) = n(r + \delta_{H(r)}) = \sum_{|z_i| \leqq r + \delta_{H(r)}} 1. \tag{4.1}$$

Poniamo

$$\begin{cases} \Delta_{H,K} = \max(\delta_{l_1} + \delta_{l_2} + \ldots + \delta_{l_s}) \\ l_1 + l_2 + \ldots + l_s \leqq K; \qquad 1 \leqq l_i \leqq H, \qquad 1 \leqq s \leqq K \end{cases} \tag{4.2}$$

Consideriamo ora un sistema di al più h sfere (anche sovrapponentisi) contenente $Y(r)$ e diciamone R la somma dei raggi.

Per ogni h, indichiamo con $\Theta_h(r)$ l'estremo inferiore dei numeri R. Risulta

$$\Theta_1(r) \geqq \Theta_2(r) \geqq \ldots$$

---

(5) Vedi D. Roux, [1].

e, essendo $Y(r)$ costituito da un numero finito di parti di spazio limitate da parti di superficie sferiche in numero finito, risulterà ovviamente da un certo indice h in poi

$$\Theta_h(r) = \Theta(r)$$

con $\Theta(r)$ costante al variare di h.

Sussistono i seguenti teoremi.

Teorema I: $\Theta_K(r) \leqq 2\Delta_{H,K}$

Teorema II: *Esiste una partizione di Z_K in parti disgiunte*

$$Z_K \equiv Z_K^{(1)} \cup Z_K^{(2)} \cup \ldots \cup Z_K^{(p)} \cup Z_K^{(0)}, \quad 1 \leqq p \leqq K = K(r) \tag{4.3}$$

contenenti, rispettivamente, $\nu_1 = H$, ν_2, ..., ν_p, ν_0 *punti* z_i, *con*

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p + \nu_0 = K, \qquad H = \nu_1 \geqq \nu_2 \geqq \ldots \geqq \nu_p \geqq 1$$

per la quale si verificano le seguenti proprietà:

1°) *detto ϱ_i il raggio e c_i il centro della minima sfera con centro in un punto z in modulo non superiore ad r contenente $Z_K^{(i)}$, risulta*

$$\varrho_i \leqq \delta_{\nu_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p;$$

2°) *l'insieme $Y(r)$ dei punti z, $|z| \leqq r$, non isolati da Z è contenuto nella riunione delle p sfere*

$$|x - c_i| \leqq \varrho_i + \delta_{\nu_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

Teorema III: *Considerata la partizione* (4,3), *l'insieme $Y(r)$ è contenuto nella riunione delle $\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p$ sfere definite dalle seguenti p condizioni*

$$|x - Z_K^{(i)}| \leqq \delta_{\nu_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p.$$

5. - Estensione del Lemma di Boutroux-Cartan.

Si consideri un insieme Z di punti z_i soddisfacenti le condizioni

$$0 \leqq |z_1| \leqq |z_2| \leqq \ldots \leqq |z_i| \leqq \ldots$$

$$\lim_{i \to +\infty} |z_i| = +\infty$$

e si scelga la successione $\{ \delta_h \}$ in guisa che l'altezza $H(r)$ risulti finita per ogni r: $H(r) < +\infty$.

Poniamo

$$P_n(z) = \prod_{i=1}^{i=n} (z - z_i).$$

Allora vale il seguente Lemma:

« *Qualunque sia n, risulta*

$$|P_n(z)| > \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_n$$

per ogni $|z| \leqq r$, qualora si escludano i punti z appartenenti a un insieme di sfere per le quali la somma dei raggi non supera

$$2\Delta_{H(r),\, K(r)}$$

dove $\Delta_{H,K}$ è definito in (4.2) ».

Infatti, fissato comunque $r > 0$, sia z un punto appartenente al cerchio $|z| \leqq r$ e non appartenente a Y (e quindi neanche a $Y(r)$).

Allora risulta $|z - z_i| > \delta_1$ per ogni i; $|z - z_i| > \delta_2$ salvo al più per uno z_i, ..., $|z - z_i| > \delta_h$ salvo al più per $h - 1$ punti z_i e così via. Segue

$$|P_n(z)| > \delta_1 \cdot \delta_2 \dots \delta_n \text{ per } |z| \leqq r,\ z \neq Y(r).$$

Ma $Y(r)$ è contenuto (vedi Teor. I) in un insieme di sfere per le quali la somma dei raggi non supera

$$2\Delta_{H(r),\, K(r)}$$

e il Lemma risulta così dimostrato.

6. - Dimostrazione dei Teoremi del n. 4.

Consideriamo le sfere di δ-addensamento con centro in punti z di modulo non superiore ad r e, fra di esse, quelle che contengono il massimo numero di punti z_i, cioè quelle che ne contengono $\nu_1 = H$; fra queste sfere contenenti H punti consideriamo quelle di raggio minimo ϱ_1: scegliamone una qualsiasi, chiamiamola $\sum_1$ e chiamiamo $Z_K^{(1)}$ l'insieme dei punti z_i in essa contenuti: abbiamo già osservato (vedi n. 4) che questi punti z_i appartengono necessariamente a Z_K.

Consideriamo ora l'insieme ottenuto da Z_K sopprimendo i punti appartenenti a $Z_K^{(1)}$: se non esiste alcuna sfera di δ-addensamento con centro in un punto di modulo non superiore ad r contenente almeno uno di questi punti, il procedimento è terminato e l'insieme residuo (eventualmente vuoto) lo chiameremo $Z_K^{(0)}$; in caso contrario, opereremo sull'insieme residuo come abbiamo operato su Z_K: otterremo il numero $\nu_2 \leqslant \nu_1 = H$, il raggio ϱ_2 e l'insieme parziale $Z_K^{(2)}$ e così via.

Ad un certo punto, dopo $p \leqslant K$ operazioni di questo tipo, il procedimento sarà terminato. Avremo così ottenuto una partizione di Z_K

$$Z_K \equiv Z_K^{(1)} \cup Z_K^{(2)} \cup \ldots \cup Z_K^{(p)} \cup Z_K^{(0)}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant K$$

in $p+1$ parti disgiunte (l'ultima delle quali può eventualmente essere vuota): alle prime p parti sono associate le sfere contenenti

$$\textstyle\sum_1, \sum_2, \ldots, \sum_p,$$

il numero dei punti contenuti

$$\nu_1 = H \geqslant \nu_2 \geqslant \ldots \geqslant \nu_p, \qquad (\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p \leqslant K),$$

i valori corrispondenti della successione $\{\delta_h\}$

$$\delta_{\nu_1} \geqslant \delta_{\nu_2} \geqslant \ldots \geqslant \delta_{\nu_p}$$

e i raggi delle sfere contenenti

$$\varrho_1 \leqslant \delta_{\nu_1}, \quad \varrho_2 \leqslant \delta_{\nu_2}, \ \ldots \ \varrho_p \leqslant \delta_{\nu_p}.$$

L'insieme $Z_K^{(i)}$ è dunque contenuto in una sfera di centro c_i e raggio ϱ_i (6); l'insieme dei punti x tali che $|x - Z_K^{(i)}| \leqslant \delta_{\nu_i}$ è allora contenuto nella sfera $|x - c_i| \leqslant \varrho_i + \delta_{\nu_i}$ e il Teorema II è dimostrato.

Ne segue il Teorema I: infatti

$$\Theta_K(r) \leqslant \Theta_p(r) \leqslant \sum_i (\varrho_i + \delta_{\nu_i}) \leqslant 2\sum_i \delta_{\nu_i} \leqslant 2A_{H,K}.$$

Osserviamo ora che, se S è una sfera di δ-addensamento con centro z, $|z| \leqslant r$, e raggio ϱ contenente h punti z_i, dalla disuguaglianza $\varrho \leqslant \delta_h$ segue che almeno uno dei punti z_i appartenenti ad S appartiene a una sfera $\sum_i$ per la quale $\nu_i \geqslant h$. Infatti, se S è una delle sfere $\sum_i$, allora $\nu_i = h$ e ogni punto z_i appartenente a S gode della proprietà segnalata; se S non è una delle sfere $\sum_i$, diciamo $Z_K^{(i)}$ l'insieme parziale ausiliario di minimo indice i contenente qualche punto z_i appartenente ad S; dobbiamo dimostrare

(6) Da questo punto, il procedimento dimostrativo è identico a quello tenuto per dimostrare gli analoghi teoremi per l'insieme Z finito in D. Roux, [2]. Lo riportiamo qui per comodità del lettore.

che $\nu_i \geqslant h$; se, per assurdo, fosse $\nu_i < h$, al momento di definire $Z_K^{(i)}$, fra le sfere di δ-addensamento fra le quali si doveva scegliere $\sum_i$ col massimo numero di punti contenuti, sarebbe stata presente S e quindi sarebbe risultato $\nu_i \geqslant h$.

Veniamo ora a dimostrare il Teorema III. Si tratta di far vedere che ogni punto z, ($|z| \leqslant r$) pel quale siano verificate tutte le p condizioni

$$|z - Z_K^{(i)}| > \delta_{\nu_i}, \qquad i = 1, 2, \ldots, p$$

non appartiene ad Y. Infatti, se esistesse una sfera S: $|x - z| \leqslant \varrho$ che fosse di δ-addensamento, potremmo scegliere $h \leqslant H(r)$, con $\delta_{h-1} < \varrho \leqslant \delta_h$ e la nostra sfera dovrebbe contenere almeno h punti z_i dei quali uno almeno, diciamolo z^*, appartenente ad una sfera $\sum_i$ contenente $\nu_i \geqslant h$ punti e si avrebbe di conseguenza

$$\varrho \leqslant \delta_h \leqslant \delta_{\nu_i} < |z - Z_K^{(i)}| \leqslant |z - z^*| \leqslant \varrho$$

il che è assurdo. Segue il Teorema III.

Parte II.

Valutazione del minimo modulo per una classe di funzioni intere di genere zero.

7. - I risultati.

Vediamo ora come l'estensione del Lemma di Boutroux-Cartan presentata nel n. 5. permetta di migliorare una nota valutazione del minimo modulo per una classe di funzioni intere di genere zero.

Sia $f(z)$ una funzione intera di genere zero, con $f(0) = 1$. Diciamo $n(R)$ il numero degli zeri di $f(z)$ appartenenti al cerchio $|z| \leqq R$ e, seguendo notazioni abituali, poniamo

$$N(R) = \int_0^R t^{-1} n(t)\, dt, \quad Q(R) = R \int_R^\infty t^{-2} n(t)\, dt. \tag{7.1}$$

È noto che: (7)

« Sia $f(z)$ una funzione intera di genere zero, e $f(0) = 1$; se $\varepsilon > 0$ e $\sigma > 1$, esiste una funzione $\Delta(R)$ tendente a $+\infty$, lentamente quanto si vuole, tale che, per R abbastanza grande, risulti

$$\log|f(z)| \geqq N(\sigma R) - \Delta(R)\, Q(\sigma R) \tag{7.2}$$

(7) Vedi R. P. Boas jr., [1], pag. 49.

per ogni z in modulo non superiore ad R, fuori da un insieme di cerchi pei quali la somma dei raggi è al più εR ».

Con l'ausilio di ipotesi favorevoli sulla distribuzione degli zeri di $f(z)$, è possibile stabilire per $\log |f(z)|$ una disuguaglianza migliore della (7.2). Sussiste infatti il seguente

Teorema: *Sia $f(z)$ una funzione intera di genere zero, con $f(0) = 1$ e sia inoltre*

$$c_1 R^\alpha \leqq n(R) \leqq c_0 R^\alpha, \qquad \text{per } R \geqq R_0 \tag{7.3}$$

($0 < c_1 \leqq c_0$, $0 < \alpha \leqq 1$, *indipendenti da* R).

Diciamo $H(R)$ l'altezza dell'insieme degli zeri di $f(z)$, rispetto alla successione base $\{\delta_h\}$

$$\delta_h = c_2 h^{1/\alpha}, \qquad 0 < c_2 < 1/2\, c_0^{-1/\alpha}. \tag{7.4}$$

Allora, per ogni $\sigma > 1$ e per ogni $R \geqq R_0$, risulta

$$\log |f(z)| > N(\sigma R) - Kn(\sigma R) - Q(\sigma R)/(\sigma - 1) \tag{7.5}$$

$$(K = 1/\alpha - \log (c_2 c_1^{1/\alpha}))$$

nel cerchio $|z| \leqq R$, quando si escludano i punti appartenenti a un insieme di cerchi pei quali la somma dei raggi non supera

$$2\, c_0\, c_2\, H^{(1-\alpha)/\alpha}(R + c_2 H^{1/\alpha})^\alpha. \tag{7.6}$$

Osservazioni:

1°) $H(R)$ dipende dalla successione $\{\delta_h\}$ prescelta, ma, per la (7.4), (vedi n. 3), risulta finito per ogni R.

2°) Il risultato è significativo soltanto se la espressione (7.6) è minore di R e ancora più se è $o(R)$.

Affinchè quest'ultimo fatto sia verificato è sufficiente che sia $H(R) = o(R^\alpha)$, $\alpha < 1$.

3°) L'espressione in (7,6) non supera

$$2R^\alpha (H(R)/c_0)^{(1-\alpha)/\alpha} \tag{7.7}$$

e alla (7.5) si può anche sostituire la seguente che vale a maggior ragione

$$\log |f(z)| > N(\sigma R) - (K + 1/(\sigma - 1))\, Q(\sigma R) \tag{7.8}$$

con le solite modalità circa l'insieme dei punti esclusi.

Dimostrazione [8].

Possiamo scrivere

$$f(z) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z/z_i) = \prod_{|z_i| \leqq \sigma R} (1 - z/z_i) \cdot \prod_{|z_i| > \sigma R} (1 - z/z_i) = P_1(z) \cdot P_2(z)\,. \tag{7.9}$$

Poniamo $|z| = r$ e osserviamo che

$$|1 - z/z_i| \geqq |1 - r/r_i| \qquad (r_i = |z_i|)\,.$$

Di conseguenza

$$\log |P_2(z)| \geqq \sum_{r_i > \sigma R} \log (1 - r/r_i) = \int_{\sigma R}^{\infty} \log (1 - r/t)\, dn(t) =$$

$$= - n(\sigma R) \log (1 - r/(\sigma R)) - r \int_{\sigma R}^{\infty} \frac{n(t)}{t(t - r)}\, dt$$

$$\geqq \frac{rn(\sigma R)}{R} - \frac{\sigma R}{(\sigma - 1)} \int_{\sigma R}^{\infty} t^{-2} n(t)\, dt$$

e quindi, per la seconda delle (7.1), otteniamo in definitiva

$$\log |P_2(z)| \geqq - Q(\sigma R)/(\sigma - 1) \tag{7.10}$$

per ogni $|z| \leqq R$.

Consideriamo ora $P_1(z)$. Possiamo scrivere

$$|P_1(z)| = \prod_{r_i \leqq \sigma R} |1 - r/r_i| = \prod_{r_i \leqq \sigma R} |r - r_i| \cdot \prod_{r_i \leqq \sigma R} r_i^{-1} = P_1^{(1)} \cdot P_1^{(2)}\,. \tag{7.11}$$

([8]) In questa dimostrazione si applica il Lemma del n. 5 estensione del Lemma di Boutroux-Cartan: per il resto il procedimento dimostrativo è analogo a quello usato in R. P. Boas jr., [1], pag. 49-50.

Per $P_1^{(2)}$ si ha

$$\log P_1^{(2)} = -\sum_{r_i \leqq \sigma R} \log r_i = -\int_0^{\sigma R} \log t \; dn(t)$$

$$= -n(\sigma R) \log(\sigma R) + \int_0^{\sigma R} t^{-1} n(t)\, dt$$

e quindi, per la prima delle (7.1)

$$\log P_1^{(2)} = N(\sigma R) - n(\sigma R) \log(\sigma R)\,. \tag{7.12}$$

Valutiamo ora $P_1^{(1)}$. Per il Lemma del n. **5** e per la (7.4) abbiamo

$$P_1^{(1)} > \delta_1 \cdot \delta_2 \ldots \delta_{n(\sigma R)} = c_2^{n(\sigma R)} \cdot \{ n(\sigma R)\,! \}^{1/\alpha} \tag{7.13}$$

per $|z| \leqq R$, fuori di un insieme di cerchi pei quali la somma dei raggi non supera

$$2\Delta_{H,K} = 2c_2 \max (\nu_1^{1/\alpha} + \nu_2^{1/\alpha} + \ldots + \nu_p^{1/\alpha})$$

dove

$$\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_p \leqq K = n(R + \delta_H)$$

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_p \leqq H = H(R), \qquad 1 \leqq p \leqq K\,.$$

Segue

$$2\Delta_{H,K} \leqq 2c_2\, H^{1/\alpha} \cdot K/H \leqq 2c_2\, H^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot n(R + \delta_H) \leqq \tag{7.14}$$

$$\leqq 2c_0\, c_2\, H(R)^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot (R + \delta_H)^\alpha$$

per $R \geqq R_0$.

Da (7.12) e (7.13), sostituendo in (7.11) abbiamo allora

$$\log |P_1(z)| > n(\sigma R) \log c_2 + \log \{ n(\sigma R)\,! \} / \alpha - n(\sigma R) \log(\sigma R) + N(\sigma R)$$

$$= N(\sigma R) + n(\sigma R) \{ \log c_2 + \log(n(\sigma R))^{1/\alpha} - 1/\alpha - \log(\sigma R) \}$$

da cui, per la (7.3)

$$\log |P_1(z)| > N(\sigma R) + \{ \log c_2 + \log c_1/\alpha - 1/\alpha \} n(\sigma R) \tag{7.15}$$

per ogni $|z| \leqq R$, $(R \geqq R_0)$, fuori dai cerchi esclusi.

In definitiva abbiamo allora, sostituendo in (7.9) le (7.10) e (7.15)

$$\log |f(z)| > N(\sigma R) + \{ \log c_2 + \log (c_1^{1/\alpha}) - 1/\alpha \} n(\sigma R) - Q(\sigma R)/(\sigma - 1)$$

per ogni $|z| \leqq R$, $R \geqq R_0$, qualora si escludano i punti appartenenti ad un insieme di cerchi pei quali la somma dei raggi non supera l'espressione assegnata in (7.14).

Tenendo presente che è $c_2 < c_0^{-1/\alpha}/2$, ne segue (vedi n. 3) $H(R) < +\infty$ per ogni R, $\delta_{H(R)} < R$ e di conseguenza

$$2\Delta_{H,K} \leqq 2c_2 \cdot H^{(1-\alpha)/\alpha} \cdot n(2R) < c_0^{(\alpha-1)/\alpha} \cdot H^{(1-\alpha)/\alpha}(2R)^\alpha < 2(H/c_0)^{(1-\alpha)/\alpha} R^\alpha$$

per $R \geqq R_0$. Inoltre risulta ovviamente

$$K \geqq 1/\alpha - \log (c_2\, c_1^{1/\alpha}) > 0$$

ed essendo $n(R) \leqq Q(R)$, vale la (7.8).

8. - Condizioni sull'insieme Z che conducono all'altezza $H(r) = o(r^\alpha)$.

Abbiamo già osservato che, per potere apprezzare i risultati del teorema del n. precedente, occorre procedere a una valutazione dell'altezza $H(r)$ dell'insieme degli zeri della funzione intera $f(z)$ presa in esame rispetto ad una opportuna successione $\{\delta_h\}$.

A tale proposito sussiste il seguente

Lemma I. *L'insieme Z soddisfi le seguenti condizioni*

a) *sia* $n(r) < c_0 r^\alpha$ $(0 < \alpha \leqq 1)$;

b) *esistano due numeri* $\Delta_0 \geqq 0$, $c_1 > 0$ *e una funzione positiva non decrescente* $R(\Delta)$, *tale che* $R(\Delta)/\Delta \to +\infty$, *per i quali sia verificata la condizione*

$$n(\varrho + \Delta) - n(\varrho) < c_1 \Delta^\alpha$$

per ogni $\Delta \geqq \Delta_0$ *e per ogni* ϱ *soddisfacente la limitazione*

$$\Delta < \varrho < R(\Delta).$$

Allora esiste $\bar{c} > 0$ *tale che, per ogni* $0 < c < \bar{c}$, *l'altezza* $H(r)$ *dell'insieme* Z *rispetto ad una successione base* $\{\delta_h\}$, *con*

(8.1) $$\delta_h \leqq c h^{1/\alpha}$$

verifica la limitazione $H(r) = o(r^\alpha)$.

Osservazione: Si può assumere per esempio:

$$\bar{c} = \min\,(c_0^{-1/\alpha}/4,\ c_1^{-1/\alpha}/2)\,. \tag{8.2}$$

Dimostrazione.

È ovvio che basterà provare che questo Lemma è vero per la successione

$$\delta_h = ch^{1/\alpha} \tag{8.3}$$

in quanto, diminuendo δ_h, $H(r)$ non può aumentare.

Sia $r > 0$ qualunque: dobbiamo valutare il numero $n(z,\ \delta_h)$ dei punti z_i appartenenti alle sfere $|x - z| \leqq \delta_h$, per ogni z in modulo non superiore ad r.

Sia $|z| \leqq 3\delta_h$: ovviamente il numero dei punti z_i contenuti in una sfera di centro z e raggio δ_h non supera quello dei punti z_i contenuti nella sfera con centro nell'origine e raggio $4\delta_h$ e quindi, per l'ipotesi a) e le (8.3), (8.2), avremo

$$n(z,\ \delta_h) \leqq n(4\delta_h) < c_0\,(4\delta_h)^\alpha = c_0\,(4ch^{1/\alpha})^\alpha < h \tag{8.4}$$

per ogni $h \geqq 1$ e per $|z| \leqq 3\delta_h$.

Diciamo ora $h_0 = h_0(r)$ il minimo intero h per cui risulta

$$r - \delta_h < R\,(2\delta_h)\,. \tag{8.5}$$

Se $3\delta_h < |z| \leqq r$, il numero dei punti z_i appartenenti alla sfera di centro z e raggio δ_h non supera quello dei punti z_i interni o sul contorno dello strato limitato dalle due sfere con centro nell'origine e raggio, rispettivamente, $|z| + \delta_h$ e $|z| - \delta_h$, cioè

$$\begin{aligned} n(z,\ \delta_h) &\leqq n(|z| + \delta_h) - n(|z| - \delta_h -) \\ &= n((|z| - \delta_n) + 2\delta_h) - n(|z| - \delta_h -)\,. \end{aligned}$$

Osserviamo ora che, per $h \geqq h_0$, in forza della (8.5) risulta

$$2\delta_h < |z| - \delta_h \leqq r - \delta_h < R\,(2\delta_h)\,.$$

Per l'ipotesi b), ponendo $\varrho = |z| - \delta_h - \eta$, $\Delta = 2\delta_h + \eta$ $(0 < \eta < |z| - 3\delta_h$, arbitrariamente piccolo) e ricordando le (8.1) e (8.2), avremo

$$n(z,\ \delta_h) < c_1\,(2\delta_h + \eta)^\alpha = c_1\,(2ch^{1/\alpha} + \eta)^\alpha < h \tag{8.6}$$

per ogni $h \geqq h_0(r)$, $3\delta_h < |z| \leqq r$.

Dalla (8.4) e (8.6) discende ovviamente che

$$H(r) \leqq h_0(r) .$$

D'altra parte, essendo $R(\delta_h)/\delta_h \to +\infty$, cioè

$$\delta_h = o(R(\delta_h))$$

e inoltre, per la (8.3)

$$2\delta_{h-1} > \delta_h$$

risulta, grazie alla (8.5)

$$r \geqq R(2\delta_{h_0-1}) > R(\delta_{h_0}) ,$$

cioè

$$R(\delta_{h_0}) = O(r) .$$

Ne segue

$$H(r) \leqq h_0(r) = o(r^\alpha) \quad \text{c.d.d.}$$

9. - Un corollario nel caso $n(r) \sim c_0 r^\alpha$.

Corollario. *Se*

$$n(r) \sim c_0 r^\alpha \qquad (0 < \alpha \leqq 1) \tag{9.1}$$

allora l'insieme Z soddisfa la condizione b) *del Lemma precedente.*
Infatti, poniamo

$$n(r) = c_0 r^\alpha (1 + \varepsilon(r)), \qquad \varepsilon(r) \to 0 \ \text{per} \ r \to +\infty .$$

Avremo, per ogni $r > \Delta$

$$n(r + \Delta) - n(r) = c_0 (r + \Delta)^\alpha \{1 + \varepsilon(r + \Delta)\} - c_0 r^\alpha \{1 + \varepsilon(r)\} =$$

$$= c_0 r^\alpha \left\{ \left(1 + \frac{\Delta}{r}\right)^\alpha (1 + \varepsilon(r + \Delta)) - 1 - \varepsilon(r) \right\} .$$

Diciamo ora $\bar{\varepsilon}(\Delta)$ l'estremo superiore dei valori di $|\varepsilon(r)|$ per $r \geqq \Delta$; $\bar{\varepsilon}(\Delta)$ tende monotamente a 0 per $\Delta \to +\infty$ e potremo scrivere, per ogni $r > \Delta$

$$n(r+\Delta) - n(r) \leqq c_0 r^\alpha \left\{ \left(1 + \frac{\Delta}{r}\right)^\alpha (1 + \bar{\varepsilon}(\Delta)) - 1 + \bar{\varepsilon}(\Delta) \right\}$$

$$\leqq c_0 r^\alpha \left\{ \alpha \frac{\Delta}{r} + \left(2 + \alpha \frac{\Delta}{r}\right) \cdot \bar{\varepsilon}(\Delta) \right\}$$

$$\leqq \alpha\, c_0 \frac{\Delta}{r^{1-\alpha}} + 3\, c_0 r^\alpha \cdot \bar{\varepsilon}(\Delta)\,.$$

Poniamo ora $R(\Delta) = \Delta / \{\bar{\varepsilon}(\Delta)\}^{1/\alpha}$: è evidente che $R(\Delta)$ cresce al crescere di Δ e che $R(\Delta)/\Delta \to +\infty$.

Avremo allora, per ogni $\Delta < r < R(\Delta)$, $\Delta \geqq \Delta_0$ opportuno

$$n(r+\Delta) - n(r) < c_0\, \alpha \Delta^\alpha + 3 c_0\, \Delta^\alpha$$

$$< c\, \Delta^\alpha \qquad \text{c.d.d.}$$

Osservazione. *Se*

$$\overline{\lim_{r\to+\infty}} \{ n(r)/r^\alpha \} = +\infty, \quad \underline{\lim_{h\to+\infty}} \{ \delta_h / h^{1/\alpha} \} > 0$$

allora l'altezza $H(r)$ dell'insieme Z dei punti z_i, rispetto alla successione base $\{\delta_h\}$ è infinita per ogni $r > 0$, cioè:

$$H(r) = +\infty \qquad \text{per ogni} \qquad r > 0\,.$$

Infatti, esistono una successione $\{r_k\}$ crescente e divergente a $+\infty$ per la quale

$$n(r_k)/r_k^\alpha \to +\infty$$

e una costante $c > 0$ tale che

$$\delta_h / h^{1/\alpha} > c \qquad \text{per} \qquad h \geqq h_0\,.$$

Diciamo h_k il minimo intero h per cui risulta

$$r_k < \delta(h_k), \quad (\delta(h) = \delta_h)\,.$$

Avremo allora

$$n(\delta(h_k)) \geqq \frac{n(r_k)}{r_k^\alpha} r_k^\alpha \geqq \frac{n(r_k)}{r_k^\alpha} \cdot \delta^\alpha(h_k - 1)$$

$$> \frac{n(r_k)}{r_k^\alpha} \cdot c^\alpha \cdot (h_k - 1)$$

$$> h_k$$

per k abbastanza grande, poichè $n(r_k)/r_k \to +\infty$.

Ne segue $H(r) = +\infty$ per ogni r.

10. - Distribuzione regolare per settori, sul piano complesso, che conduce all'altezza $H(r)$ stabile.

Supponiamo ora che lo spazio metrico preso in considerazione sia il piano della variabile complessa z e supponiamo che i punti di Z siano distribuiti regolarmente in un settore di piano. Anche in questo caso è possibile dare informazioni sull'ordine di grandezza di $H(r)$ rispetto a successioni $\{\delta_n\}$ opportune. Vale infatti il seguente

Lemma II. *L'insieme Z soddisfi le condizioni seguenti*

a) $n(r) < c_0 r^\alpha, \quad 0 < \alpha \leqq 1$;

b) *i punti z_i appartengano al settore $\varphi_1 \leqq \arg z \leqq \varphi_2$ $(0 \leqq \varphi_1 < \varphi_2 \leqq 2\pi)$ e per ogni coppia ϑ_1, ϑ_2 con $\varphi_1 \leqq \vartheta_1 < \vartheta_2 \leqq \varphi_2$, il numero $n(r; \vartheta_1, \vartheta_2)$ dei punti z_i appartenenti al settore $\vartheta_1 \leqq \arg z < \vartheta_2$, $|z| \leqq r$, soddisfi la condizione*

$$n(r;\ \vartheta_1,\ \vartheta_2) \sim \frac{\vartheta_2 - \vartheta_1}{\varphi_2 - \varphi_1} n(r).$$

Allora esiste $\bar{c} > 0$ tale che, per ogni $0 < c < \bar{c}$, l'altezza $H(r)$ dell'insieme Z dei punti z_i rispetto ad una successione base $\{\delta_h\}$ soddisfacente la condizione

$$\delta_h < c h^{1/\alpha}$$

è stabile, cioè

$$H(r) \to H^* < +\infty \quad \text{per} \quad r \to +\infty.$$

Osservazione. Si può assumere, per esempio:

$$\bar{c} = \min\left\{\frac{1}{3}\, c_0^{-1/\alpha}\left(\frac{3\,(\varphi_2-\varphi_1)}{\pi}\right)^{1/\alpha};\ \frac{1}{3}\, c_0^{-1/\alpha}\right\}. \tag{10.1}$$

Dimostrazione. Basta considerare il caso

$$\delta_h = ch^{1/\alpha}. \tag{10.2}$$

Sia $r > 0$ qualunque. Andiamo a valutare $n(z, \delta_h)$ per gli z in modulo non superiori ad r.

Cominciamo col considerare i punti z pei quali $|z| \leqq 2\,\delta_h$.

Possiamo scrivere

$$n(z, \delta_h) \leqq n(3\delta_h) < c_0\,(3\delta_h)^\alpha = c_0\,(3ch^{1/\alpha})^\alpha$$

e quindi, per la (10.1)

$$n(z, \delta_h) < h \tag{10.3}$$

per ogni h e per $|z| \leqq 2\delta_h$.

Sia ora $2\delta_h < |z| \leqq r$ e poniamo $|z| = \varrho$.

Il numero dei punti appartenenti al cerchio $|x - z| \leqq \delta_h$ non può superare quello dei punti interni e sul contorno del settore circolare del cerchio $|x| \leqq \varrho + \delta_h$ limitato dai raggi uscenti dall'origine e tangenti al cerchio $|x - z| \leqq \delta_h$: tale settore ha evidentemente ampiezza 2 arc sen (δ_h/ϱ).

Potremo dunque scrivere, per $\varepsilon > 0$ e per $h \geqq h_0(\varepsilon)$, (indipendente da r), abbastanza grande

$$n(z, \delta_h) \leqq \frac{2+\varepsilon}{\varphi_2 - \varphi_1}\,\text{arc sen}\,\frac{\delta_h}{\varrho}\cdot n(\varrho + \delta_h). \tag{10.4}$$

Essendo $\delta_h/\varrho < 1/2$, risulta

$$\begin{aligned}
\text{arc sen}\,\frac{\delta_h}{\varrho} &= \frac{\delta_h}{\varrho} + \frac{1!!}{2!!\,3}\left(\frac{\delta_h}{\varrho}\right)^3 + \ldots \\
&< \frac{\delta_h}{\varrho}\left\{1 + \frac{1!!}{2!!\,3}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \ldots\right\} \\
&= \frac{2\delta_h}{\varrho}\left\{\frac{1}{2} + \frac{1!!}{2!!\,3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \ldots\right\} \\
&= \frac{2\pi}{6}\,\frac{\delta_h}{\varrho}
\end{aligned}$$

e cioè

$$\text{arc sen}\,\frac{\delta_h}{\varrho} < \frac{\pi}{3}\,\frac{\delta_h}{\varrho} \tag{10.5}$$

Essendo $\delta_h/\varrho < 1/2$, risulta anche

$$\left(1+\frac{\delta_h}{\varrho}\right)^{\alpha} < \left(\frac{3}{2}\right)^{\alpha} \tag{10.6}$$

Da (10.4), ricordando l'ipotesi a), le (10.5) e (10.6), otteniamo

$$n(z,\ \delta_h) \leqq \frac{(2+\varepsilon)\,\pi}{3\,(\varphi_2-\varphi_1)}\,\frac{\delta_h}{\varrho}\cdot c_0\,(\varrho+\delta_h)^{\alpha}$$

$$= \frac{(2+\varepsilon)\,\pi c_0}{3\,(\varphi_2-\varphi_1)}\cdot\frac{\delta_h}{\varrho^{1-\alpha}}\left(1+\frac{\delta_h}{\varrho}\right)^{\alpha}$$

$$< \left(\frac{2}{3}\right)^{1-\alpha}\frac{(1+\varepsilon)\,\pi c_0}{(\varphi_2-\varphi_1)}\,\frac{\delta_h}{\varrho^{1-\alpha}}\,.$$

Ma $\delta_h/\varrho < 1/2$ e quindi

$$n(z,\ \delta_h) < \frac{(1+\varepsilon)\,\pi c_0}{3^{1-\alpha}\,(\varphi_2-\varphi_1)}\cdot\delta_h^{\alpha} = \frac{(1+\varepsilon)\,\pi c_0}{3^{1-\alpha}\,(\varphi_2-\varphi_1)}\,(c h^{1/\alpha})^{\alpha}$$

$$< h$$

in forza della (10.1) per $\varepsilon < (\bar{c}/c)^{\alpha} - 1$, $h \geqq h_0(\varepsilon)$ abbastanza grande e per ogni $|z| > 2\delta_h$.

Ne segue, per qualunque r, tenendo presente anche la (10.3)

$$H(r) \leqq h_0 \ \text{(costante)}\ \text{c.d.d.}$$

Bibliografia.

[1] R. P. BOAS jr., *Entire functions*, New York, N.Y., 1954.

[2] D. ROUX, *Sull'isolamento rispetto a sistemi di punti*, Ist. Lombardo Accad. Sci. Lett. Rend. A. **92**, (1957), 107-116.

[3] D. ROUX, *Sul minimo modulo delle funzioni intere di genere zero*, Riv. Mat. Univ. Parma, **8**, (1957), 227-250.

Sunto.

Viene estesa al caso di un insieme Z costituito da infiniti punti una nozione di «isolamento» già da noi introdotta nel caso di un insieme Z finito. Sulla base di tale nozione viene stabilita una estensione del Lemma di BOUTROUX-CARTAN *sulla valuiazione dal di sotto del modulo di un polinomio, che permette di migliorare risultati noti sul comportamento del minimo modulo delle funzioni intere, qualora si facciano ipotesi opportune sulla distribuzione degli zeri.*