Riv. Mat. Univ. Parma (2) 2 (1961), 67-76

LUIGI MERLI (*)

Intersezioni di una funzione continua con le somme parziali della sua serie trigonometrica di Fourier e della sua serie di polinomi ortogonali. (**)

1. - È noto che se $\{ P_n(x) \}$ è una successione di polinomi ortogonali e normali, relativa al peso $p(x)$, con $p(x)$ continua e positiva in (a, b), finito od infinito, salvo al più un numero finito di punti nei quali può anche annullarsi, ed $f(x)$ è una funzione continua la cui serie di polinomi $P_n(x)$ è data da

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \tag{1}$$

con

$$a_n = \int_a^b p(x)\, f(x)\, P_n(x)\, \mathrm{d}x, \tag{2}$$

se si pone

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x), \tag{3}$$

la curva $y = S_n(x)$, qualora non coincida identicamente con la $f(x)$, ha almeno $n+1$ intersezioni con $y = f(x)$, cioè in almeno $n+1$ punti dell'inter-

(*) Indirizzo: Istituto Matematico, Università, Firenze, Italia.
(**) Ricevuto il 9-VI-1961.

vallo (a, b), il diagramma della $f(x)$ è attraversato da quello delle somme parziali $S_n(x)$, (¹).

Si osserva così che la $S_n(x)$ è una interpolante della $f(x)$ nell'intervallo (a, b), costruita partendo da $n+1$ di tali intersezioni, scelte come punti fondamentali, e, dato che il loro numero aumenta indefinitamente, per $n \to \infty$, indipendentemente dalla convergenza di $S_n(x)$ verso la $f(x)$, ci si rende conto come la $S_n(x)$, per n sufficientemente grande, si presti in pratica a rappresentare approssimativamente la $f(x)$ in (a, b).

Una proprietà analoga relativa alle serie trigonometriche di FOURIER era stata già rilevata da M. PICONE (²) il quale ha dimostrato che se la funzione $f(x)$, continua nell'intervallo aperto $0 < x < 2\pi$, non è un polinomio trigonometrico di ordine n, il polinomio di FOURIER

$$(4) \qquad S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx),$$

con

$$(5) \qquad a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \cos kt \, dt, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(t) \operatorname{sen} kt \, dt, \qquad (k = 0, 1, \ldots),$$

ad essa relativo, interseca la funzione stessa in almeno $2n+1$ punti interni a $(0, 2\pi)$ ed in almeno $2n+2$ se, essendo σ una certa quantità positiva, $f(x) - S_n(x)$ conserva ugual segno nei due intervalli aperti $0 < x < \sigma$, $2\pi - \sigma < x < 2\pi$, (³).

I ragionamenti usati per la dimostrazione di tali proprietà delle somme parziali non permettono però di dedurre come si distribuiscono tali intersezioni al crescere di n.

In questa Nota studieremo qualche proprietà relativa a tale distribuzione, provando in primo luogo che, nel caso generale dei polimi $\{P_n(x)\}$ prima considerati, *ogni punto di intersezione delle somme parziali* $S_n(x)$, *date dalla* (3), *con la* $f(x)$ *è anche punto di accumulazione di punti di intersezione*, senza però

(¹) L. MERLI, *Una proprietà delle somme parziali della serie di polinomi ortogonali di una funzione continua*, Boll. U.M.I., (3), **4** (1951), 285-287.

(²) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, vol. I, Napoli 1946, pp. 235 e segg..

(³) G. SZEGO nella sua recensione, [Math. Rew., **17** (1956), p. 30], al volume di F. G. TRICOMI, *Vorlesungen uber orthogonalreihen*, Springer-Verlag, Berlin (1955), p. 124, ha fatto notare che, sempre relativamente alle somme parziali delle serie di FOURIER, L. FEJER ne aveva dato una dimostrazione sui Math. Annalen. [L. FEJER, *Uber die Fouricersche Reiche*, Math. Ann., **64**, 273-288, (1907)].

che se ne possa concludere che la distribuzione avvenga in modo uniforme, nel senso che non si può escludere che esista un sottointervallo (c, d) di (a, b) in cui non cadono punti di intersezione.

Prendendo poi in esame il comportamento delle intersezioni nel caso delle serie trigonometriche di FOURIER proveremo che *se* $f(x)$, *definita in* $(0, 2\pi)$ *periodica con periodo* 2π, *con* $f(2\pi) - f(0) \neq 0$, *è derivabile con derivata prima e seconda continue, le somme parziali, date dalla* (3), *hanno, per* n *sufficientemente grande, almeno una intersezione con la* $f(x)$ *in ogni sottointervallo* (c, d), *appartenente all'intervallo* $(0, 2\pi)$.

Passando poi al caso dei polinomi di LEGENDRE proveremo che, *fissato un intervallo* (a, b) *di* $(-1, 1)$, *nell'ipotesi che la* $f(x)$, *supposta generalmente continua e derivabile, soddisfi alla condizione che posto*

$$\begin{cases} \varphi(\alpha, x) = \dfrac{f(\alpha) - f(x)}{\alpha - x}, & \alpha \neq x, \\ \varphi(x, x) = f'(x), \qquad -1 < \alpha < 1, & -1 < a \leqslant x \leqslant b < 1, \end{cases} \tag{6}$$

e

$$\psi(\alpha, x) = \varphi'(\alpha, x)\,(1 - \alpha^2)\,, \tag{7}$$

risulti

$$\lim_{\alpha \to -1} \psi(\alpha, x) = 0, \quad \textit{con } x \textit{ fissato e tale che } -1 < a \leqslant x \leqslant b < 1, \tag{8}$$

$$\psi(\alpha, x) \ \textit{ non decrescente per } -1 < \alpha < 1, \textit{ e } x \textit{ fissato in } (a, b)\,, \tag{9}$$

$$\lim_{\alpha \to 1} \psi(\alpha, x) = \Phi(x) > 0, \quad \textit{con } x \textit{ fissato in } (a, b), \tag{10}$$

esiste in qualunque intervallo (c, d) *appartenente ad* (a, b), *per* n *sufficientemente grande, almeno una intersezione di* $S_n(x)$ *con* $f(x)$. *Daremo poi un esempio di una funzione soddisfacente alle condizioni* (8), (9) e (10).

Potremo quindi dire, in tal senso, che sia nel caso delle serie trigonometriche di FOURIER, che in quello dei polinomi di LEGENDRE, la distribuzione delle intersezioni, per le classi di funzioni considerate, avviene in modo uniforme.

2. – La prima proprietà, cioè che i punti di taglio sono punti di accumulazione di punti di taglio, nel caso generale dei polinomi ortogonali $P_n(x)$ in considerazione, è quasi immediata. Infatti se $\bar{x}$ è un punto dell'intervallo (a, b), per una nota proprietà dei polnimi ortogonali (4), scelto un numero σ positivo arbitrario nell'intervallo $\bar{x} - \sigma$, $\bar{x} + \sigma$ esisteranno per n sufficientemente grande almeno due zeri di $P_{n+1}(x)$ e quindi, essendo $S_{n+1}(x) - S_n(x) = a_{n+1} P_{n+1}(x)$, nei punti corrispondenti a tali ascisse, $S_{n+1}(x)$ ed $S_n(x)$ si attraverseranno e se $\bar{x}$ è uno degli $n+1$ punti di attraversamento di $f(x)$ e di $S_n(x)$, nell'intervallo compreso tra $\bar{x} - \sigma$ e $\bar{x} + \sigma$, $f(x)$ dovrà attraversare nuovamente $S_n(x)$ o altrimenti taglierà anche $S_{n+1}(x)$.

3. Passiamo ora allo studio della distribuzione delle intersezioni nel caso delle serie trigonometriche di FOURIER.

Facendo uso della formula di DIRICHLET (5), si ha che la (4) può essere scritta nella forma

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x + \alpha) \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\,\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha/2}\, d\alpha\,,$$

e, tenuto conto che è

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\operatorname{sen}(n + 1/2)\,\alpha}{2 \operatorname{sen} \alpha/2}\, d\alpha,$$

posto

$$D_n(x) = S_n(x) - f(x)\,, \tag{11}$$

si ha

$$D_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) - f(x)}{2 \operatorname{sen}(\alpha - x)/2} \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)(\alpha - x)\, d\alpha,$$

e se x_k è uno zero di $\operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right)x$, $\left[x_k = \frac{2k\pi}{2n+1},\ (k = 0, 1, 2, \dots, n)\right]$, si ha

$$D_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\alpha) - f(x_k)}{2 \operatorname{sen}(\alpha - x_k)/2} \operatorname{sen}\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha\, d\alpha\,. \tag{12}$$

(4) G. SZEGO, *Orthogonal Polynomials*, « Amer. Math. Colloquium pubbl. », XXIII, 1939.

(5) G. SANSONE, *Sviluppi in serie di funzioni ortogonali*, Zanichelli, Bologna 1946, p. 70.

Posto

$$(13)\qquad \begin{cases} \varphi(\alpha,\ x_k) = \dfrac{f(\alpha) - f(x_k)}{2 \operatorname{sen}(\alpha - x_k)/2}, & \alpha \neq x_k , \\ \varphi(x_k,\ x_k) = f'(x_k) , \end{cases}$$

con una integrazione per parti si ottiene

$$D_n(x_k) = \frac{2}{\pi}(-1)^{k+1} \int_0^{2\pi} \varphi(\alpha,\ \bar{x}_k)\, \mathrm{d}\, \frac{\cos(n + 1/2)\,\alpha}{2n+1} =$$

$$= \frac{2\,(-1)^{k+1}}{\pi\,(2n+1)} \left\{ [-\varphi(2\pi,\ x_k) - \varphi(0,\ x_k)] - \int_0^{2\pi} \varphi'(\alpha,\ x_k) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha\, \mathrm{d}\alpha \right\},$$

ossia

$$(14)\qquad D_n(x_k) = \frac{(-1)^k}{\pi\,(2n+1)} \left[\frac{f(2\pi) - f(0)}{\operatorname{sen} x_k/2} - \int_0^{2\pi} \varphi'(\alpha,\ x_k) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha\, \mathrm{d}\alpha \right].$$

Ma $\varphi'(\alpha,\ x_k)$, per le nostre ipotesi è funzione continua in $(0,\ 2\pi)$ e pertanto, per il teorema di LEBESGUE (6), sarà

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \varphi'(\alpha,\ x_k) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha\, \mathrm{d}\alpha = 0 .$$

È possibile allora scegliere n così grande che, assumendo per ipotesi la $f(x)$ agli estremi dell'intervallo di periodicità valori disuguali, la differenza

$$\frac{f(2\pi) - f(0)}{\operatorname{sen} x_k/2} - \int_0^{2\pi} \varphi'(\alpha,\ x_k) \cos\left(n + \frac{1}{2}\right) \alpha\, \mathrm{d}\alpha ,$$

risulti sempre dello stesso segno qualunque sia x nell'intervallo $(0,\ 2\pi)$.

---

(6) Cfr. loc. cit. in (5), p. 64.

D'altra parte fissato un qualsiasi intervallo (c, d) interno a $(0, 2\pi)$, per n sufficientemente grande, cadranno in esso almeno due zeri consecutivi x_k e x_{k+1} di $\operatorname{sen}\left(n+\frac{1}{2}\right) x$. Ma allora, per la (14), $D_n(x_k)$ e $D_n(x_{k+1})$ hanno segno contrario in (c, d) e pertanto, in base alla (11), $S_n(x)$ ed $f(x)$ si attraverseranno ivi almeno una volta, come volevasi dimostrare.

4. – Studieremo ora lo stesso problema relativamente ai polinomi di LEGENDRE. Dalla formula sommatoria di CHISTOFFEL (7), si ha

$$S_n(x) = \frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,P_{n+1}(\alpha) - P_{n+1}(x)\,P_n(\alpha)}{\alpha - x} f(\alpha)\,d\alpha, \tag{15}$$

ed essendo

$$1 = \frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{1} \frac{P_n(x)\,P_{n+1}(\alpha) - P_{n+1}(x)\,P_n(\alpha)}{\alpha - x}\,d\alpha,$$

posto

$$D_n(x) = S_n(x) - f(x), \tag{16}$$

risulta

$$D_n(x) = \frac{1}{2}(n+1)\int_{-1}^{1} \frac{f(a) - f(x)}{\alpha - x}\,[P_n(x)\,P_{n+1}(\alpha) - P_n(\alpha)\,P_{n+1}(x)\,d\alpha. \tag{17}$$

Fissato ora un intervallo (c, d) appartenente ad (a, b), che si suppone interno a $(-1, 1)$, scegliamo n così grande che in esso cadano due zeri consecutivi di $P_n(x)$ che indicheremo brevemente con x_n' e x_n''.

Essendo in tali punti $P_n(x_n') = P_n(x_n'') = 0$, si ha

$$D_n(x_n') = -\frac{1}{2}(n+1)\,P_{n+1}(x_n')\int_{-1}^{1} \frac{f(\alpha) - f(x_n')}{\alpha - x_n'} P_n(\alpha)\,d\alpha, \tag{18_1}$$

---

(7) Cfr. loc. cit. in (5), p. 199.

e

$$D_n(x_n'') = -\frac{1}{2}\,(n+1)\,P_{n+1}(x_n'')\int_{-1}^{1}\frac{f(\alpha)-f(x_n'')}{\alpha - x_n''}\,P_n(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,. \tag{18$_2$}$$

Si osservi ora che, tenuto conto della (6), qualunque sia x in $(a,\ b)$, con una integrazione per parti si ottiene

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\alpha,\ x)\,P_n(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = [\varphi(\alpha,\ x)\int_{-1}^{\alpha}P_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi]_{-1}^{1} -$$

$$-\int_{-1}^{1}\varphi'(\alpha,\ x)\,(\int_{-1}^{\alpha}P_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi)\,\mathrm{d}\alpha = -\int_{-1}^{1}\varphi'(\alpha,\ x)\int_{-1}^{1}P_n(\xi)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\alpha$$

e, per una nota relazione tra i polinomi di LEGENDRE [8],

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\alpha,\ x)\,P_n(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{n\,(n+1)}\int_{-1}^{1}\varphi'(\alpha,\ x)\,(1-\alpha^2)\,P_n'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{1}{n\,(n+1)}\int_{-1}^{1}\psi(\alpha,\ x)\,P_n'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha\,.$$

Tenuto conto delle (8), (9) e (10), applicando il secondo teorema della media, ne viene

$$\int_{-1}^{1}\varphi(\alpha,\ x)\,P_n(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha = \frac{1}{n\,(n+1)}\,\Phi(x)\int_{\eta}^{1}P_n'(\alpha)\,\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{1}{n\,(n+1)}\,\Phi(x)\,[1-P_n(\eta)] > 0,\ \text{per}\ \ -1 < c \leqslant x \leqslant \mathrm{d} < 1.$$

Ricordando che x_n' e x_n'' sono due zeri consecutivi di $P_n(x)$, in essi $P_{n+1}(x)$ ha valore di segno opposto; dalle (18) e (18$_2$) segue allora che $D_n(x_n')$ e $D_n(x_n'')$ hanno segno contrario e pertanto $D_n(x)$ dovrà annullarsi almeno una volta tra c e d. Quindi, per la (16), $S_n(x)$ ed $f(x)$ avranno almeno una intersezione, per n sufficientemente grande, in $(c,\ d)$, come volevasi dimostrare.

([8]) Cfr. loc. cit. in ([5]), p. 176.

5. – Daremo ora un esempio di una funzione $f(x)$ soddisfacente alle condizioni (8), (9) e (10).

Fissato un punto b interno all'intervallo $(-1, 1)$, sia

$$f(\alpha) \equiv 0, \qquad \text{per} \qquad 0 < \alpha < b,$$

$$f(\alpha) = -\log(1-\alpha), \qquad \text{per} \qquad b \leqslant \alpha < 1.$$

In base alla (6) sarà allora

$$\varphi(\alpha, x) \equiv 0, \qquad \text{per} \qquad 0 < \alpha < b, \quad 0 < a \leqslant x \leqslant b < 1$$

$$\varphi(\alpha, x) = -\frac{\log(1-\alpha)}{\alpha - x}, \qquad \text{per} \qquad b \leqslant \alpha < 1, \qquad 0 < a \leqslant x \leqslant b < 1.$$

Risulterà inoltre, tenuto conto che per la (7) è,

$$\psi(\alpha, x) = \varphi'(\alpha, x)\,(1-\alpha^2),$$

$$\psi(\alpha, x) = \frac{(\alpha - x)(1+\alpha) + (1-\alpha^2)\log(1-\alpha)}{(\alpha - x)^2}.$$

Ma si ha

i) $\lim\limits_{\alpha \to -1} \psi(\alpha, x) = 0,$

ii) $\lim\limits_{\alpha \to 1} \psi(\alpha, x) = \dfrac{2}{1-x} > 0,$

iii) $\psi(\alpha, x)$ non decrescente per $-1 < \alpha < 1$, con x fissato in

$$-1 < a < c \leqslant x \leqslant \mathrm{d} < b < 1,$$

essendo

$$\psi'(\alpha, x) = \frac{(\alpha - x)(2 - \alpha - x) - 2(1 - \alpha x)\log(1-\alpha)}{(\alpha - x)^4}$$

e, per $\alpha > x$, come è nelle nostre ipotesi, $\psi'(\alpha, x) > 0$.

Pertanto le (8), (9) e (10) risultano verificate.

6. - Osserviamo infine che una funzione ottenuta aggiungendo alla $f(x)$ un polinomio $P(x)$ arbitrario si comporta, riguardo alla distribuzione delle intersezioni, come la $f(x)$ stessa.

Summary.

Some properties of the intersections of a cotinuous functions with the partial sums of its trigonometrical series and of its series of orthogonal polynomials are studied.