Riv. Mat. Univ. Parma (2) **2** (1961), 25-36

GIUSEPPE VECCHIO (*)

Sopra l'equazione locale di una ipersuperficie di S^n in un punto doppio. (**)

1. D. KIRBY ha ottenuto, in [2], una forma particolarmente semplice di equazione locale per una superficie algebrica, contenuta semplicemente in una varietà algebrica V^3 dello spazio affine S^n, in un suo punto multiplo, scegliendo un opportuno sistema di coordinate locali nel punto. In questa Nota estendo alcuni dei risultati di D. KIRBY, considerando ipersuperficie algebriche dello spazio affine S^n (1) dotate di un punto di molteplicità $m \geqslant 2$, con particolare riguardo al caso $m = 2$. Dopo alcune premesse sopra le serie formali di potenze, dimostro che se V è una ipersuperficie avente un punto m-plo O, è possibile ottenere per V, con una scelta conveniente delle coordinate locali $x_1, x_2, \dots, x_n$ nel punto O, un'equazione locale in O della forma:

1.1 $$x_1^m + g_2(x_2, \dots, x_n)\, x_1^{m-1} + \dots + g_m(x_2, \dots, x_n) = 0$$

con $g_i(x_2, \dots, x_n)$ $(i = 2, 3, \dots, m)$ serie formali di potenze di grado $\geqslant i$ (cfr. n. **2**) nelle variabili $x_2, \dots, x_n$. Nel caso particolare $m = 2$, nel quale la 1.1 diviene:

1.2 $$x_1^2 + g(x_2, \dots, x_n) = 0,$$

con $g(x_2, \dots, x_n)$ serie formale di potenze di grado $\geqslant 2$, si dimostra che $g(x_2, \dots, x_n)$ è univocamente definita a meno di equivalenze (cfr. n. **2**).

(*) Indirizzo: Istituto Matematico Università, Genova.
(**) Ricevuto: il 2 maggio 1961.
(1) Gran parte dei risultati che qui ottengo hanno, tuttavia, validità più generale, come il lettore può facilmente constatare.

Inoltre *se il cono quadrico tangente a V in O ha uno spazio doppio di dimensione $n-h$, si può scegliere il sistema di coordinate locali in modo che l'equazione locale di V in O abbia la forma*:

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_h^2 + \varphi(x_{h+1}, \dots, x_n) = 0$$

dove $\varphi(x_{h+1}, \dots, x_n)$ è una serie formale di potenze di grado > 2 nelle sole variabili $x_{h+1}, \dots, x_n$.

2. Sia k un campo algebricamente chiuso e di caratteristica 0 e $k[x_1, \dots, x_n]$ l'anello dei polinomi nelle n indeterminate $x_1, x_2, \dots, x_n$ con coefficienti in k.

Denoteremo con $f_s(x) = f_s(x_1, \dots, x_n)$ un polinomio omogeneo di grado s appartenente a $k[x] = k[x_1, \dots, x_n]$.

Una *serie formale di potenze* di grado s è un'espressione del tipo

2.1 $$f(x) = f_s(x) + f_{s+1}(x) + \dots$$

con $f_s(x) \neq 0$. Le serie di grado zero, cioè aventi un termine costante non nullo $f_0 \in k$, diconsi *unità*; *non unità* le altre.

Due serie formali $f(x)$, $g(x)$ diconsi *equivalenti* se $f(x) = u(x)\, g(x)$ con $u(x)$ unità ([**4**], pag. 80); è chiaro che la relazione di equivalenza così introdotta è riflessiva, simmetrica e transitiva.

Con le definizioni di somma e prodotto usuali le serie formali di potenze in $x_1, \dots, x_n$ formano un anello che denoteremo con $k\{x\} = k\{x_1, \dots, x_n\}$. Le unità di $k\{x_1, \dots, x_n\}$ costituiscono un gruppo (moltiplicativo); gli elementi di $k\{x_1, \dots, x_n\}$ di grado $\geqslant r$ costituiscono ovviamente un sottoanello di $k\{x_1, \dots, x_n\}$ che denoteremo con $k^{(r)}\{x_1, \dots, x_n\}$; in particolare $k^{(1)}\{x_1, \dots, x_n\}$ è il sottoanello costituito da tutte le non unità di $k\{x_1, \dots, x_n\}$.

La 2.1 dicesi *regolare* in x_i se non è unità e contiene un termine $a x_i^s$ con $0 \neq a \in k$. Sono fondamentali i due seguenti teoremi:

TEOREMA 2.1 (Teorema di preparazione di WEIERSTRASS (cfr. [**1**], pag. 183)). *Se $f(x) \in k\{x_1, \dots, x_n\}$ è di grado s ed è regolare in x_i, $f(x)$ è equivalente ad una serie della forma*

$$x_i^s + A_1 x_i^{s-1} + \dots + A_s$$

con $A_h \in k^{(h)}\{x_1, \dots, x_{h-1}, x_{h+1}, \dots, x_n\}$ $(h = 1, 2, \dots s)$.

TEOREMA 2.2 (Cfr. [**1**], pag. 39). *Sia dato il sistema*

2.2 $$f_i(x_1, \dots, x_n; y_1, \dots, y_m) = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, m),$$

dove $f_i \in k^{(1)}\{x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots y_m\}$. *Se per* $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ *il determinante dei coefficienti dei termini di primo grado nelle* y_i *è* $\neq 0$, *il sistema* 2.2 *ha una unica soluzione*:

$$y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

con $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n) \in k^{(1)}\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Se $y_1, y_2 \ldots, y_n$ sono altre n indeterminate, diremo *regolare* la trasformazione di $k\{y\}$ in $k\{x\}$ data dalle relazioni

2.3 $$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + P_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

con $a_{ij} \in k$, $|a_{ij}| \neq 0$ e $P_i(x_1, \ldots, x_n) \in k^{(2)}\{x_1, \ldots, x_n\}$. Per il teorema 2.2 il sistema 2.3 ha un'unica soluzione:

2.4 $$x_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} y_j + Q_i(y_i, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, .., n)$$

con $b_{ij} \in k$, $Q_i(y_1, \ldots, y_n) \in k^{(2)}\{y_1, \ldots, y_n\}$; e risulta inoltre $|b_{ij}| \neq 0$.

Le 2.4 dànno la trasformazione inversa della 2.3, anch'essa regolare.

È evidente che una serie di $k\{x_1, \ldots, x_n\}$ è mutata da una trasformazione regolare in un'unità se e solo se è essa stessa una unità.

Se la 2.1 non è regolare in x_i, esiste una trasformazione regolare che la muta in una serie di $k\{y_1, \ldots, y_n\}$ regolare in y_i. Una tale trasformazione è, ad esempio,

$$x_i = t_i y_i, \qquad x_j = t_j y_i + y_j \qquad j \neq i$$

con $t_i \neq 0$, $f_s(t_1, \ldots, t_n) \neq 0$.

3. In uno spazio affine ad n dimensioni S^n, sia dato un sistema di coordinate $X_1, \ldots, X_n$ di origine O ed una ipersuperficie algebrica V passante per O ed avente equazione $F(X_1, \ldots, X_n) = 0$, con $F(X_1, \ldots, X_n) \in k[X_1, \ldots, X_n]$. Se una trasformazione regolare

3.1 $$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + P_i(x_1, \ldots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

con $a_{ij} \in k$, $|a_{ij}| \neq 0$, $P_i(x) \in k^{(2)}\{x\}$, muta $F(X_1, \ldots, X_n)$ in un elemento $f(x_1, \ldots, x_n) \in k^{(1)}\{x_1, \ldots, x_n\}$ diremo che $x_1, \ldots, x_n$ costituiscono un sistema di *coordinate locali* in O e che:

3.2
$$f(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

è l'equazione locale di V in O relativa al sistema di coordinate locali $x_1, \ldots, x_n$.

Se $x'_1, \ldots, x'_n$ sono legate alle coordinate locali $x_1, \ldots, x_n$ dalla trasformazione regolare:

3.3
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x'_j + Q_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

anche $x'_1, \ldots, x'_n$ costituiscono un sistema di coordinate locali di V in O, come subito risulta sostituendo le 3.3 nella 3.1. Le 3.3 mutano $f(x_1, \ldots, x_n)$ in una serie di potenze $f'(x'_1, \ldots, x'_n)$ di egual grado ed $f'(x'_1, \ldots, x'_n) = 0$ è un'altra equazione locale di V in 0.

Viceversa, *siano $x_1, \ldots, x_n$ ed $x'_1, \ldots, x'_n$ due sistemi di coordinate locali in O, $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ ed $f'(x'_1, \ldots, x'_n) = 0$ le relative equazioni locali di V in O. Allora $x_1, \ldots, x_n$ ed $x'_1, \ldots, x'_n$ sono legate ad una trasformazione regolare τ e la trasformata di $f(x_1, \ldots, x_n)$ mediante τ è una serie equivalente ad $f'(x'_1, \ldots, x'_n)$.*

Infatti se

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + P_i(x_1, \ldots, x_n);$$

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x'_j + Q_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

dove $a_{ij}, b_{ij} \in k$, $|a_{ij}| \cdot |b_{ij}| \neq 0$, $P_i(x) \in k^{(2)}\{x\}$, $Q_i(x') \in k^{(2)}\{x'\}$, risulta:

3.4
$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + P_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x'_j + Q_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

e quindi per il teorema 2.2:

3.5
$$x_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x'_j + P_i(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

dove $c_{ij} \in k$ ed $P_i(x') \in k^{(2)}\{x'\}$; e risulta $\| c_{ij} \| \cdot \| a_{ij} \| = \| b_{ij} \|$ sicchè $|c_{ij}| \neq 0$. La 3.5 è dunque una trasformazione regolare τ che muta $f(x_1, \ldots, x_n)$ in una serie di potenze $\varphi(x'_1, \ldots, x'_n)$. Poichè $f(x_1, \ldots, x_n)$ ed $f'(x'_1, \ldots, x'_n)$ sono le trasformate di $F(X_1, \ldots, X_n)$ mediante due trasformazioni regolari $T: X_i \to x'_i$, $T': X_i \to x_i$ e risulta $T' = \tau T$, deve essere $\varphi(x'_1, \ldots, x'_n) = u(x'_1, \ldots, x'_n) \cdot f'(x'_1, \ldots, x'_n)$, dove $u'(x'_1, \ldots, x'_n)$ è unità.

4. Se $x_1, \ldots, x_n$ sono coordinate locali in un punto O ed $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ la relativa equazione locale di V in O, il grado di $f(x_1, \ldots, x_n)$ è la *molteplicità* di V in O ed ovviamente non dipende dal particolare sistema di coordinate locali $x_1, \ldots, x_n$ (cfr. n. 2).

Dimostriamo il

TEOREMA 4.1. *Se O è un punto m-plo ($m \geqslant 2$) di una ipersuperficie V l'equazione locle di V in O si può scrivere, con un'opportuna scelta delle coordinate locali, nella forma:*

$$x_1^m + x_1^{m-2} g_2(x_2, \ldots, x_n) + \ldots + g_m(x_2, \ldots, x_n) = 0 \tag{4.1}$$

con $g_i(x_2, \ldots, x_n) \in k^{(i)}\{x_2, \ldots, x_n\}$ $(i = 2, 3, \ldots, m)$.

Sia $x'_1, \ldots, x'_n$ un sistema di coordinate locali in O ed

$$f'(x'_1, \ldots, x'_n) = 0 \tag{4.2}$$

la relativa equazione locale di V in O; $f'(x'_1, \ldots, x'_n) \in k^{(m)}\{x'\}$ si può supporre regolare in x'_1 (cfr. n. 2). Allora per il teorema 2.1 esiste una unità $u(x'_1, \ldots, x'_n)$ tale che:

$$f'(x'_1, \ldots, x'_n) = \tag{4.3}$$

$$= u(x'_1, \ldots, x'_n)\{x_1'^2 + A_i(x'_2, \ldots, x'_n) x_1'^{m-1} + \ldots + A_m(x'_2, \ldots, x'_n)\}$$

dove $A_i(x'_2, \ldots, x'_n) \in k^{(i)}\{x'_2, \ldots, x'_n\}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

D'altra parte la trasformazione regolare

$$x'_1 = x_1 - \frac{1}{m} A_1(x_2, \ldots, x_n), \quad x'_i = x_i \qquad (i = 2, \ldots, m) \tag{4.4}$$

muta la 4 3 nella:

$$f(x_1, \ldots, x_n) = u(x_1, \ldots, x_n)\left\{\left[x_1 - \frac{1}{m} A_1(x_2, \ldots, x_n)\right]^m + \right.$$

$$+ A_1(x_2, \ldots, x_n)\left[x_1 - \frac{1}{m} A_1(x_2, \ldots, x_n)\right]^{m-1} + \ldots + A_m(x_2, \ldots, x_n) =$$

$$= u(x_1, \ldots, x_n)\{x_1^m + x_1^{m-2} g_2(x_2, \ldots, x_n) + \ldots + g_m(x_2, \ldots, x_n)\}$$

con $u(x_1, \dots, x_n)$ unità e $g_i(x_2, \dots, x_n) \in k^{(i)}\{x_2, \dots, x_n\}$ $(i = 2, \dots, m)$; sicchè, dividendo per l'unità $u(x_1, x_2, \dots, x_n)$, ne segue il teorema.

Data dunque un'ipersuperficie V avente un punto m-plo O $(m \geqslant 2)$, ad ogni sistema di coordinate locali $x_1, \dots, x_n$ in O restano associate $m-1$ serie formali di potenze $g_i(x_2, \dots, x_n) \in k^{(i)}\{x_2, \dots, x_n\}$ $(i = 2, \dots, m)$. Se $y_1, \dots, y_n$ è un altro sistema di coordinate locali nel punto O, e:

4.1′ $$y_1^m + y_1^{m-2}\varphi(y_2, \dots, y_n) + \dots + \varphi_m(y_2, \dots, y_n) = 0$$

è la relativa equazione locale di V in O, dove $\varphi_i(y_2, \dots, y_n) \in k^{(i)}\{y_2, \dots, y_n\}$ $(i = 2, \dots, m)$ sono le $m-1$ serie di potenze formali associate al sistema di coordinate $y_1, \dots, y_n$ non è detto che per ogni m esista una trasformazione regolare tra le $x_2, \dots, x_n$ e le $y_2, \dots, y_n$ che trasformi ogni $\varphi_i(y_2, \dots, y_n)$ in una serie equivalente a $g_i(x_2, \dots, x_n)$. L'esistenza di una siffatta trasformazione è assicurata per $m = 2$ dal seguente:

TEOREMA 4.2. *Se $x_1, \dots, x_n$ ed $y_1, \dots, y_n$ sono due sistemi di coordinate locali in un punto doppio O di un'ipersuperficie V tali che le relative equazioni locali di V in O si possano scrivere nella forma:*

$$x_1^2 + g(x_2, \dots, x_n) = 0, \qquad y_1^2 + \varphi(y_2, \dots, y_n) = 0$$

con $g(x_2, \dots, x_n) \in k^{(2)}\{x_2, \dots, x_n\}$, $\varphi(y_2, \dots, y_n) \in k^{(2)}\{y_2, \dots, y_n\}$; esiste una trasformazione regolare delle $y_2, \dots, y_n$ nelle $x_2, \dots, x_n$ che muta $\varphi(y_2, \dots, y_n)$ in una serie equivalente a $g(x_2, \dots, x_n)$.

Esiste intanto una trasformazione regolare

4.5 $$y_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + P_i(x_1, \dots, x_n) = \eta_i(x_1, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

con $a_{ij} \in k$, $|a_{ij}| \neq 0$, $P_i(x_1, \dots, x_n) \in k^{(2)}\{x_1, \dots, x_n\}$, che muta $y_1^2 + \varphi(y_2, \dots, y_n)$ in una serie equivalente a $x_1^2 + g(x_2, \dots, x_n)$ (cfr. n. 2), sicchè:

4.6 $$\{\eta_1(x_1, \dots, x_n)\}^2 + \varphi(\eta_2, \dots, \eta_n) = u(x_1, \dots, x_n)\{x_1^2 + g(x_2, \dots, x_n)\},$$

$u(x_1, \dots, x_n)$ essendo unità.

Scelta un'unità $U(x_1, \dots, x_n) \in k\{x_1, \dots, x_n\}$ tale che

$$\{U(x_1, \dots, x_n)\}^2 = u(x_1, \dots, x_n),$$

si può supporre $U(0, \dots, 0) = U_0 \neq a_{11}$ (eventualmente sostituendo $U(x_1, \dots, x_n)$ con $-U(x_1, \dots, x_n)$); l'equazione:

4.7 $$\eta_1(x_1, \dots, x_n) - U(x_1, \dots, x_n) = 0$$

si può risolvere in modo unico rispetto ad x_1 (teorema 2.2) e si ottiene per x_1 un'espressione della forma:

4.8 $$x_1 = \frac{a_{12}}{U_0 - a_{11}} x_2 + \frac{a_{13}}{U_0 - a_{11}} x_3 + \dots + \\ + \frac{a_{1n}}{U_0 - a_{11}} x_n + Q(x_2, \dots, x_n) = \Theta(x_2, \dots, x_n),$$

non $Q(x_2, \dots, x_n) \in k^{(2)}\{x_2, \dots, x_n\}$.

Se ora si tiene conto che la 4.6 è un'identità rispetto alle $x_1, \dots, x_n$ e quindi che essa dà luogo ad un'identità rispetto alle $x_2, \dots, x_n$ quando si sotituisca x_1 col secondo membro della 4.8, si ha:

4.9 $$\varphi\{\eta_2[\Theta(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n], \dots, \eta_2[\Theta(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n]\} = \\ = \{U[\Theta(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n]\}^2 g(x_2, \dots, x_n),$$

$U[\Theta(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n]$ essendo unità appartenente a $k\{x_2, \dots, x_n\}$.

Pertanto la trasformazione

4.10 $$y_i = \eta_i[\Theta(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n] \qquad (i = 2, \dots, n)$$

muta $\varphi(y_2, \dots, y_n)$ in $U[\Theta(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n]\, g(x_2, \dots, x_n)$. Resta da provare che la 4.10 è una trasformazione regolare. A tale scopo basta dimostrare che il determinante Δ' dei coefficienti dei termini di primo grado nelle $x_2, \dots, x_n$ è diverso da zero. Infatti:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{21}\dfrac{a_{12}}{U_0 - a_{11}} + a_{22} & a_{21}\dfrac{a_{13}}{U_0 - a_{11}} + a_{23} & \dots & a_{21}\dfrac{a_{1n}}{U_0 - a_{11}} + a_{2n} \\ a_{31}\dfrac{a_{12}}{U_0 - a_{11}} + a_{32} & a_{31}\dfrac{a_{13}}{U_0 - a_{11}} + a_{33} & \dots & a_{31}\dfrac{a_{1n}}{U_0 - a_{11}} + a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1}\dfrac{a_{12}}{U_0 - a_{11}} + a_{n2} & a_{n1}\dfrac{a_{13}}{U_0 - a_{11}} + a_{n3} & \dots & a_{n1}\dfrac{a_{1n}}{U_0 - a_{11}} + a_{nn} \end{vmatrix}$$

è la somma di 2^{n-1} determinanti ad elementi monomi tra i quali tutti quelli che hanno almeno due colonne eguali ai primi addendi di due colonne di Δ' sono nulli; pertanto:

$$\Delta' = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \dots a_{2n} \\ a_{32} & a_{33} \dots a_{3n} \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n2} & a_{n3} \dots a_{nn} \end{vmatrix} + \sum_{r=2}^{n} \begin{vmatrix} a_{22} \dots a_{2,r-1} & \dfrac{a_{1r}}{U_0 - a_{11}} a_{21} & a_{2,r-1} \dots a_{2n} \\ a_{32} \dots a_{3,r-1} & \dfrac{a_{1r}}{U_0 - a_{11}} a_{31} & a_{3,r+1} \dots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n2} \dots a_{n,r-1} & \dfrac{a_{1r}}{U_0 - a_{11}} a_{n1} & a_{n,r+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} .$$

Denotando con Δ_{ij} il complemento algebrico dell'elemento a_{ij} di $\| a_{ij} \|$, raccogliendo il fattore comune $\dfrac{a_{1r}}{U_0 - a_{11}}$ e spostando al primo posto la $(r-1)$-ma colonna in ognuno dei determinanti della sommatoria, si ha:

$$\Delta' = \Delta_{11} + \sum_{r=2}^{n} \frac{a_{1r}}{U_0 - a_{11}} (-1)^{r-2} \begin{vmatrix} a_{21} \dots a_{2,r-1} & a_{2,r+1} \dots a_{2n} \\ a_{31} \dots a_{3,r-1} & a_{3,r+1} \dots a_{3n} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{n1} \dots a_{n,r-1} & a_{n,r+1} \dots a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \Delta_{11} - \frac{1}{U_0 - a_{11}} \sum_{r=2}^{n} a_{1r} \Delta_{1r} = \frac{U_0 \Delta_{11} - a_{11} \Delta_{11} - \sum_{r=2}^{n} a_{1r} \Delta_{1r}}{U_0 - a_{11}} = \frac{U_0 \Delta_{11} - \Delta}{U_0 - a_{11}}$$

ove $\Delta = | a_{ij} |$. Denotando con A, A_{-1}, rispettivamente, la matrice $\| a_{ij} \|$ e la sua trasposta, e con H, K le matrici delle due forme quadratiche delle due serie $y_1^2 + \varphi(y_2, \dots, y_n)$ e $u(x_1, \dots, x_n) \{ x_1^2 + g(x_2, \dots, x_n) \}$, risulta ovviamente

$$A_{-1} H A = K$$

ossia

$$HA - A_{-1}^{-1} K = 0$$

Il primo elemento della prima riga della matrice $HA - A_{-1}^{-1} K$ è $a_{11} - \dfrac{\Delta a_{11}}{\Delta} U_0^2$, quindi risulta $a_{11} \Delta = a_{11} U_0^2$. Si ha allora:

$$\Delta' = \frac{\dfrac{\Delta a_{11}}{U_0} - \Delta}{U_0 - a_{11}} = \frac{-\Delta (U_0 - a_{11})}{U_0 (U_0 - a_{11})} = - \frac{\Delta}{U_0} \neq 0 .$$

5. Ad una forma particolarmente notevole per l'equazione locale di una ipersuperficie di S^n in un suo punto doppio si perviene con il seguente

TEOREMA 5.1. *Sia V un'ipersuperficie di S^n avente un punto doppio O. Condizione necessaria e sufficiente affinchè il cono tangente a V in O abbia uno spazio doppio di dimensione $n-h$ è che che esista un sistema di coordinate locali $x_1, \dots, x_n$ nel punto O, tali che l'equazione locale di V in O si possa scrivere nella forma:*

5.1 $$x_1^2 + x_2^2 + \dots x_h^2 + \varphi(x_{h+1}, \dots, x_n) = 0$$

con $\varphi(x_{h+1}, \dots, x_n) \in k^{(3)}\{x_{h+1}, \dots, x_n\}$.

Premettiamo le seguenti osservazioni:

1) sia $f(x_1, \dots, x_n)$ una serie formale di potenze di grado 2 e

5.2 $$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j + P_i(y_1, \dots, y_n), \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

dove $P_i(y_i, \dots, y_n) \in k^{(2)}\{y_1, \dots, y_n\}$, una trasformazione regolare. La forma quadratica di $f(x_1, \dots, x_n)$ e quella della serie $\varphi(y_1, \dots, y_n)$, trasformata di $f(x_1, \dots, x_n)$ mediante la 5.2, hanno la stessa caratteristica. Ciò è ben noto se la 5.2 è una trasformazione lineare non degenere, d'altra parte la forma quadratica di $\varphi(y_1, \dots, y_n)$ risulta la trasformata della forma quadratica di $f(x_1, \dots, x_n)$, mediante la trasformazione lineare non degenere

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j \qquad (i = 1, 2, \dots, n).$$

2) Se $f(x), g(x) \in k\{x_1, \dots, x_n\}$ sono tra loro equivalenti, le relative forme quadratiche hanno ovviamente la stessa caratteristica.

Ciò premesso, siano $y_1, \dots, y_n$ coordinate locali in O ed $f(y_1, \dots, y_n) = 0$ la relativa equazione locale di V in O. Denotando con ϱ la caratteristica della forma quadratica di $f(y_1, \dots, y_n)$ è chiaro che il cono tangente a V in O contiene uno spazio doppio di dimensione $n-h$ se e solo se $\varrho = h$. In particolare O risulta uniplanare se e solo se $\varrho = 1$ e biplanare se e solo se $\varrho = 2$. In forza del n. 2 e del teorema 4.1 si può supporre che $f(y_1, \dots, y_n)$ sia regolare in y_1 ed abbia la forma

5.3 $$f(y) = y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$$

con $g(y_2, \dots, y_n) \in k\{y_2, \dots, y_n\}$ di grado $s \geqslant 2$.

Se O è uniforme, cioè se $\varrho = 1$, risulta $s > 2$. Infatti quando $s = 2$ la caratteristica della forma quadratica di $f(y) = y_1^2 + g(y_2, \dots, y_n)$ è > 1.

Se O non è uniplanare risulta invece $s = 2$; ed in tal caso si può supporre che $g(y_2, \dots, y_n)$ sia regolare in y_2 e quindi, per il teorema di preparazione di Weirstrass, si ha:

$$g(y_2, \dots, y_n) = u(y_2, \dots, y_n)\left\{ y_2^2 + A_1(y_3, \dots, y_n)\, y_2 + A_2(y_3, \dots, y_n)\right\}$$

dave $u(y_2, \dots, y_n)$ è unità ed $A_i(y_3, \dots, y_n) \in k^{(i)}\{y_3, \dots, y_n\}$ $(i = 1, 2)$.

In forza del teorema 4.1, la trasformazione (regolare):

$$5.4 \qquad y_2 = y_2' - \frac{1}{2} A_1(y_3', \dots, y_n'); \qquad y_i = y_i' \qquad (i \neq 2),$$

muta l'equazione 5.3 in

$$5.5 \qquad y_1'^2 + u_2(y_2', \dots, y_n')\{ y_2'^2 + g'(y_3', \dots, y_n')\} = 0$$

dove $u_2(y_2', \dots, y_n')$ è unità e $g(y_3', \dots, y_n') \in k\{y_3', \dots, y_n'\}$ è di grado $s \geqslant 2$.

La 5.5, moltiplicata per l'unità $\{u_2(y_2', \dots, y_n')\}^{-1}$, diviene:

$$5.6 \qquad \{u_2(y_2', \dots, y_n')\}^{-1} y_1'^2 + y_2'^2 + g'(y_3', \dots, y_n') = 0\,.$$

Se O è biplanare deve essere $s > 2$. Infatti se fosse $s = 2$, la forma quadratica del 1° membro della 5.6 e quindi anche quella di $f(y)$, avrebbe caratteristica $\varrho > 2$.

Se O non è uniplanare, nè biplanare, risulta invece $s = 2$. La $g'(y_3', \dots, y_n')$ se può, al solito, supporre regolare in y_3'; si può quindi applicare il teorema di preparazione di Weierstrass e poi, successivamente, un'opportuna trasformazione, che faccia passare dal sistema di coordinate locali $y_1', \dots, y_n'$ ad un altro sistema di coordinate locali $y_1'', \dots, y_n''$ del tipo 5.4 dove, in particolare $y_i'' = y_i'$ per $i \neq 3$, in modo che l'equazione locale di V in O assuma la forma:

$$5.7 \quad \{u_2(y_2'', \dots, y_n'')\}^{-1} y_1''^2 + y_2''^2 + u_3(y_3'', \dots, y_n'')\{y_3''^2 + g''(y_4'', \dots, y_n'')\} = 0$$

dove $g''(y_4'', \dots, y_n'') \in k^{(2)}\{y_4'', \dots, y_n''\}$ e $\{u_2(y_2'', \dots, y_n'')\}^{-1}$ e $u_3(y_3'', \dots, y_n'')$ sono unità. La 5.7, moltiplicandola per l'unità $\{u_3(y_3'', \dots, y_n'')\}^{-1}$ diviene

$$5.8 \qquad \{u_2(y_2'', \dots, y_n'')\}^{-1}\{u_3(y_3'', \dots, y_n'')\}^{-1} y_1''^2 + \\ + \{u_3(y_3'', \dots, y_n'')\}^{-1} y_2''^2 + y_3''^2 + g''(y_4'', \dots, y_n'') = 0\,.$$

È facile riconoscere, come prima, che se il cono tangente a V in O ha uno spazio doppio di dimensione $n-3$, la $g''(y''_4, \ldots, y''_n)$ ha grado > 2.

Se invece ha uno spazio doppio di dimensione $< n-3$, la $g''(y''_4, \ldots, y''_n)$ ha grado 2. Reiterando il procedimento, si trova che se O è un punto doppio di V, nel quale il cono tangente a V ha uno spazio doppio di dimensione $n-h$, esiste un sistema di coordinate locali $z_1, \ldots, z_n$ in O tali che la relativa equazione locale di V in O assuma la forma:

5.9 $$U_1(z_2, \ldots, z_n)\, z_1^2 + U_2(z_3, \ldots, z_n)\, z_2^2 + \ldots + U_{h-1}(z_h, \ldots, z_n)\, z_{h-1}^2 + z_h^2 + \varphi_{h+1}(z_{h+1}, \ldots, z_n) = 0$$

dove $\varphi(z_{h+1}, \ldots, z_n) \in k^{(3)}\{z_{h+1}, \ldots, z_n\}$ ed

$$U_i(z_{i+1}, \ldots, z_n) = \{u_{i+1}(z_{i+1}, \ldots, z_n)\}^{-1}\{u_{i+2}(z_{i+2}, \ldots, z_n)\}^{-1} \ldots \{u_h(z_h, \ldots, z_n)\}^{-1}$$

$(i = 1, 2, \ldots, h-1)$ è unità.

Posto allora

$$U_i(z_{i+1}, \ldots, z_n) = \{v_i(z_{i+1}, \ldots, z_n)\}^2 = \{b_i + Q_i(z_{i+1}, \ldots, z_n)\}^2 \quad (i = 1, 2, \ldots, h-1)$$

dove $0 \neq b_i \in k$ e $Q_i(z_{i+1}, \ldots, z_n) \in k^{(1)}\{z_{i+1}, \ldots, z_n\}$, dalla 5.8, mediante la trasformazione regolare:

$$x_i = \{b_i + Q_i(z_{i+1}, \ldots, z_n)\} z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, h-1)$$

$$x_j = z_j, \qquad (j = h, h+1, \ldots, n)$$

si ottiene per V l'equazione locale in O:

5.10 $$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_h^2 + \varphi(x_{h+1}, \ldots, x_n) = 0$$

dove $\varphi(x_{h+1}, \ldots, x_n) \in k^{(3)}\{x_{h+1}, \ldots, x_n\}$.

È evidente, viceversa, che se l'equazione locale in un punto doppio O di un'ipersuperficie V è della forma 5.10, con $\varphi(x_{h+1}, \ldots, x_n) \in k^{(3)}\{x_{h+1}, \ldots, x_n\}$, il cono tangente a V in O ha uno spazio doppio di dimensione $n-h$.

Il teorema 5.1 è così dimostrato.

Bibliografia

[1] S. Bochner and W. T. Martin, *Several complex variables*, Princeton, 1948.

[2] D. Kirby, *The structure of on isolated multiple point of a surface* I. Proc. London Math. Soc. 6 (1956), 597-.609

[3] D. Kirby, *The structure of an isolated multiple point of a surface* II, III. Proc. London Math. Soc. 7, (1957) 1-28.

[4] S. Lefschetz, *Algebraic geometry*, Princeton, 1953.

[5] C. L. Siegel, *Analitic functions of several complex variables*, Notes by P.T. Bateman on lectures delivered at the Institute for advanced Study. 1948-49.

[6] J. Walker, *Algebraic curves*, Princeton, 1950.